

ПРОГРАММА

курса «Дискретная математика»

механико-математический факультет МГУ, 4-й курс, 7-й семестр, 1-й поток,
2022/2023 уч. год (лектор — проф. Р. М. Колпаков)

Функции алгебры логики

1. Функции алгебры логики. Равенство функций. Задание функций таблицами. Существенные и несущественные переменные. Формулы. Представление функций формулами. Операция суперпозиции. Замкнутые классы относительно операции суперпозиции (классы Поста). Операция введения несущественной переменной. Замкнутые классы относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной (замкнутые классы). Свойства замкнутых классов. Примеры классов Поста, не являющихся замкнутыми.
2. Полные системы функций. Примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Представление булевых функций полиномами. Линейные функции. Свойства линейных функций. Пример порождающей системы для линейных функций. Лемма о нелинейной функции. Классы конъюнкций и дизъюнкций и их свойства. Монотонные функции. Свойства монотонных функций. Пример порождающей системы для монотонных функций. Лемма о немонотонной функции. Лемма о порождении функций $x \vee y$ и xy . Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константы 0 и 1. Замкнутые классы, содержащие константы 0 и 1.
3. Лемма Z. Функции, удовлетворяющие условию $\langle 0^\infty \rangle$. Свойства функций $x \vee yz$ и $d_p(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq 2$. Основная лемма о порождении монотонных функций. Лемма о порождении монотонной функции f системой функций $\{x \vee yz, d_{p(f)}\}$. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций, содержащих константу 1. Замкнутые классы монотонных функций, содержащие константу 1. Лемма о порождении импликации. Лемма о монотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константу 1.
4. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции. Функции, сохраняющие константы. Пример порождающей системы для функций, сохраняющих 1. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, не содержащих констант 0 и 1. Теорема Поста о конечной порожденности всех замкнутых классов булевых функций. Мощность семейства всех замкнутых классов булевых функций.

Комбинаторика

5. Выборки. Размещения без повторений (перестановки) и с повторениями (упорядоченные наборы). Сочетания без повторений (подмножества) и с повторениями. Производящие функции для числа подмножеств (бином Ньютона) и числа сочетаний с повторениями. Биномиальные коэффициенты $\binom{k}{n}$ и их свойства. Полиномиальные коэффициенты и их свойства. Полиномиальная теорема.
6. Формулы включения-исключения для числа предметов, не обладающих ни одним свойством. Формула для функции Эйлера. Неравенства Бонферрони для частичных формул включения-исключения.
7. Производящие функции и их свойства. Операции над производящими функциями. Примеры применения метода производящих функций для решения комбинаторных задач.
8. Рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами (линейные рекуррентные соотношения). Производящая функция для решения линейного рекуррентного соотношения. Теорема об общем виде решения линейного рекуррентного соотношения. Числа Фибоначчи. Явная формула (формула Бине) для чисел Фибоначчи. Свойства чисел Фибоначчи.
9. Числа Каталана. Рекуррентное соотношение, производящая функция и явная формула для чисел Каталана. Получение явной формулы для чисел Каталана через число путей на целочисленной решетке.
10. Разбиения множеств различных элементов на заданное число непустых подмножеств. Числа Стирлинга 2-го рода. Явные формулы и рекуррентные соотношения для чисел Стирлинга 2-го рода. Числа Стирлинга 2-го рода как коэффициенты перехода между полиномиальными системами. Числа Белла. Явная формула и рекуррентное соотношение для чисел Белла.
11. Числа Стирлинга 1-го рода (без знака) как коэффициенты перехода между полиномиальными системами. Явные формулы и рекуррентные соотношения для чисел Стирлинга 1-го рода. Число Стирлинга 1-го рода как число перестановок с фиксированным количеством циклов.

12. Арифметическая функция Мебиуса. Арифметическая формула обращения Мебиуса. Перечисление циклических последовательностей заданного периода («задача об ожерельях»). Применение функции Эйлера для задачи об ожерельях.
13. Формула для числа I_k^p неприводимых нормированных многочленов степени k с коэффициентами из $GF(p)$. Существование неприводимых многочленов заданной степени, асимптотически точная формула для I_k^p .
14. Формальные степенные ряды, операции над рядами. Кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов и его свойства; необходимые и достаточные условия существования обратных элементов. Формальная производная, свойства формальной производной. Тождества Ньютона.

Кодирование

15. Алфавитное кодирование (алфавитный код), схема алфавитного кодирования. Разделимые (взаимно однозначные) кодирования (коды). Префиксные и суффиксные коды и их свойства. Критерий разделимости алфавитного кода.
16. Неравенство Крафта–Макмиллана. Существование префиксного кода с длинами кодовых слов, удовлетворяющих неравенству Крафта–Макмиллана.
17. Полные коды. Критерий полноты для разделимого кода. Критерий полноты для произвольного алфавитного кода. Построение полного (двоичного) кода по заданному префиксному коду.
18. Оптимальные коды (коды с минимальной избыточностью). Свойства оптимальных p -ичных кодов. Верхняя и нижняя оценки стоимости оптимального кода. Метод Шеннона построения кода, близкого к оптимальному. Достаточное условие оптимальности кодов, построенных методом Шеннона. Оптимальность заданного полного префиксного кода для некоторого распределения P . Свойства кодовых деревьев оптимальных префиксных кодов. Теорема о редукции. Алгоритм Хаффмана построения оптимального p -ичного кода.
19. Коды, исправляющие ошибки над полем $GF(p)$. Расстояние Хэмминга. Граница сферической упаковки (граница Хэмминга). Мощностной метод построения кода, исправляющего t ошибок. Верхняя и нижняя оценки мощности максимального кода. Совершенные коды. Примеры совершенных кодов.
20. Линейные коды над $GF(p)$. Порождающие и проверочные матрицы линейных кодов. Двойственные коды. Параметры линейных кодов. Необходимые и достаточные условия существования линейных кодов с заданным минимальным расстоянием. Граница Синглтона. Граница Варшавова–Гилберта. Код Хэмминга и его свойства. Алгоритм декодирования кода Хэмминга. Расширенный код Хэмминга и его свойства. Обобщенный код Хэмминга и его свойства. Алгоритм декодирования обобщенного кода Хэмминга.
21. Коды Рида–Маллера и их свойства. Мажоритарный алгоритм декодирования.
22. Двоичные коды БЧХ (Боуза–Чоудхури–Хоквингема). Построение кодов БЧХ, исправляющих t ошибок. Параметры кодов БЧХ. Алгоритм декодирования для кодов БЧХ, исправляющих две ошибки. Общая схема декодирования кода БЧХ. Алгоритм Питерсона–Горенштейна–Цирлера.