

ПРОГРАММА

курса «Дискретная математика»

механико-математический факультет МГУ, 4-й курс, 7-й семестр, 1-й поток,
2024/2025 уч. год (лектор — проф. Р. М. Колпаков)

Функции алгебры логики

1. Функции алгебры логики. Равенство функций. Задание функций таблицами. Существенные и несущественные переменные. Формулы. Представление функций формулами. Операция суперпозиции. Замкнутые классы относительно операции суперпозиции (классы Поста). Операция введения несущественной переменной. Замкнутые классы относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной (замкнутые классы). Свойства замкнутых классов. Примеры классов Поста, не являющихся замкнутыми.
2. Полные системы функций. Примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Представление булевых функций полиномами. Линейные функции. Свойства линейных функций. Пример порождающей системы для линейных функций. Лемма о нелинейной функции. Классы конъюнкций и дизъюнкций и их свойства. Монотонные функции. Свойства монотонных функций. Пример порождающей системы для монотонных функций. Лемма о немонотонной функции. Лемма о порождении функций $x \vee y$ и xu . Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константы 0 и 1. Замкнутые классы, содержащие константы 0 и 1.
3. Лемма Z. Функции, удовлетворяющие условию $\langle 0^\infty \rangle$. Свойства функций $x \vee yz$ и $d_p(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq 2$. Основная лемма о порождении монотонных функций. Лемма о порождении монотонной функции f системой функций $\{x \vee yz, d_{p(f)}\}$. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций, содержащих константу 1. Замкнутые классы монотонных функций, содержащие константу 1. Лемма о порождении импликации. Лемма о монотонной функции. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, содержащих константу 1.
4. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Лемма о несамодвойственной функции. Функции, сохраняющие константы. Пример порождающей системы для функций, сохраняющих 1. Теорема о конечной порожденности замкнутых классов, не содержащих констант 0 и 1. Теорема Поста о конечной порожденности всех замкнутых классов булевых функций. Мощность семейства всех замкнутых классов булевых функций.
5. Особенности k -значных логик ($k \geq 3$). Пример Мучника замкнутого класса со счетным базисом. Построение континуального семейства замкнутых классов функций k -значной логики ($k \geq 3$).
6. Алгебраическое определение оператора замыкания. Инвариантные классы Яблонского. Deskриптивные свойства инвариантных классов. Континуальность числа инвариантных классов.

Комбинаторика

7. Выборки. Размещения без повторений (перестановки) и с повторениями (упорядоченные наборы). Сочетания без повторений (подмножества) и с повторениями. Производящие функции для числа подмножеств (бином Ньютона) и числа сочетаний с повторениями. Биномиальные коэффициенты $\binom{k}{n}$ и их свойства. Полиномиальные коэффициенты и их свойства. Полиномиальная теорема.
8. Формулы включения-исключения для числа предметов, не обладающих ни одним свойством. Формула для функции Эйлера. Неравенства Бонферрони для частичных формул включения-исключения.
9. Производящие функции и их свойства. Операции над производящими функциями. Примеры применения метода производящих функций для решения комбинаторных задач.
10. Рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами (линейные рекуррентные соотношения). Производящая функция для решения линейного рекуррентного соотношения. Теорема об общем виде решения линейного рекуррентного соотношения. Числа Фибоначчи. Явная формула (формула Бине) для чисел Фибоначчи. Свойства чисел Фибоначчи.
11. Числа Каталана. Рекуррентное соотношение, производящая функция и явная формула для чисел Каталана. Получение явной формулы для чисел Каталана через число путей на целочисленной решетке.

12. Числа Стирлинга 2-го рода как коэффициенты перехода между полиномиальными системами. Явные формулы и рекуррентные соотношения для чисел Стирлинга 2-го рода. Число разбиений множеств различных элементов на заданное число непустых подмножеств. Числа Белла. Явная формула и рекуррентное соотношение для чисел Белла.
13. Числа Стирлинга 1-го рода (без знака) как коэффициенты перехода между полиномиальными системами. Явные формулы и рекуррентные соотношения для чисел Стирлинга 1-го рода. Число Стирлинга 1-го рода как число перестановок с фиксированным количеством циклов.
14. Арифметическая функция Мебиуса. Арифметическая формула обращения Мебиуса. Перечисление циклических последовательностей заданного периода («задача об ожерельях»). Применение функции Эйлера для задачи об ожерельях.
15. Сходимость бесконечных сумм формальных рядов. Критерий сходимости бесконечной сумм формальных рядов. Бесконечные произведения формальных рядов. Дифференцирование бесконечного произведения формальных рядов.
16. Формула для числа I_k^p неприводимых нормированных многочленов степени k с коэффициентами из \mathbb{Z}_p . Существование неприводимых многочленов заданной степени, асимптотически точная формула для I_k^p .
17. Формальные степенные ряды, операции над рядами. Кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов и его свойства; необходимые и достаточные условия существования обратных элементов. Формальная производная, свойства формальной производной. Тождества Ньютона.

Кодирование

18. Алфавитное кодирование (алфавитный код), схема алфавитного кодирования. Разделимые (взаимно однозначные) кодирования (коды). Префиксные и суффиксные коды и их свойства. Критерий разделимости алфавитного кода.
19. Неравенство Крафта–Макмиллана. Существование префиксного кода с длинами кодовых слов, удовлетворяющих неравенству Крафта–Макмиллана.
20. Оптимальные коды (коды с минимальной избыточностью). Свойства оптимальных q -ичных кодов. Нижняя оценка стоимости оптимального кода, анализ достижимости равенства в ней. Метод Шеннона построения кода, близкого к оптимальному.
21. Верхняя оценка стоимости оптимального кода. Свойства кодовых деревьев оптимальных префиксных кодов. Лемма о редукции. Алгоритм Хаффмана построения оптимального q -ичного кода.
22. Передача информации по каналу связи. Ошибки при передаче информации. Расстояние между наборами. Кодовое расстояние. Обнаружение и исправление ошибок. Граница сферической упаковки для кодов, исправляющих ошибки. Верхняя и нижняя оценки максимальной мощности кода, исправляющего ошибки. Совершенные коды.
23. Линейный код над полем \mathbb{Z}_p . Порождающая матрица. Кодирование с помощью порождающей матрицы. Кодовое расстояние линейного кода. Проверочная матрица. Синдром. Вектор ошибок, его связь с синдромом. Исправление ошибок с помощью проверочной матрицы.
24. Линейные коды с кодовым расстоянием 3, p -ичный код Хэмминга, его проверочная матрица, параметры и исправление ошибки. Кодирование, исправление ошибки и декодирование с помощью двоичного кода Хэмминга. p -ичный код Хэмминга как совершенный код.