Перекладывающиеся разбиения тора

А.В. Шутов

2023 год

L – d-мерная решетка.
Множество T будем называть фундаментальной областью решетки L, если

- Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует точка $x' \in T$, такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$.
- Любые две точки $x, x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует естественное взаимно-однозначное отображение $\pi : T \to \mathbb{T}^d$ между фундаментальной областью T и тором $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / L$.

α – вектор, иррациональный в решетке L (вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей).
На торе $\mathbb{T}^d$ определен сдвиг $S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod{L}$.
Рассмотрим разбиение фундаментальной области

$$T = \bigsqcup_{i=0}^{d} T_i.$$

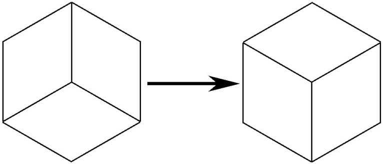
Данное разбиение будем называть перекладывающимся, если существуют векторы $v_0, \ldots, v_d$ такие, что отображение $S : x \to x + v_j$, если $x \in T_j$, переводит множество T в себя и диаграмма

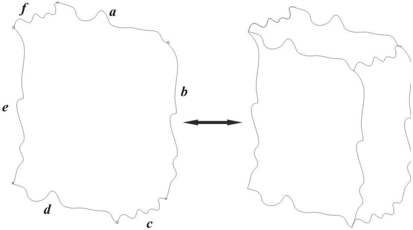
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\pi"] & T \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^d \arrow[r, "S_\alpha"] & \mathbb{T}^d \end{tikzcd}$$

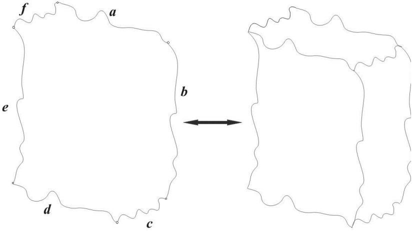
$$d = 1,\ L = \mathbb{Z},\ T = [0;1),\ S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod 1.$$

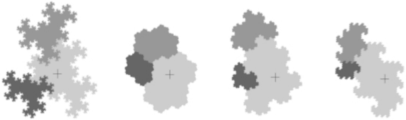
$d = 1,\ L = \mathbb{Z},\ T = [0;1),\ S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod 1.$
$T = [0; 1-\alpha) \sqcup [1-\alpha; 1),\ v_1 = \alpha,\ v_2 = \alpha - 1.$

$d = 1,\ L = \mathbb{Z},\ T = [0;1),\ S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod 1.$
$T = [0; 1-\alpha) \sqcup [1-\alpha; 1),\ v_1 = \alpha,\ v_2 = \alpha - 1.$
$d = 2$




f
a
b
c
d
e





$T(0,1)$ $T(1,1)$ $T(1,2)$ $T(2,2)$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении для произвольной области $X \subset \mathbb{T}^d$ имеет место асимптотическая формула

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_{\alpha}^{k}(x) \in X\} = \frac{|X|}{|\det L|}N + o(N).$$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении для произвольной области $X \subset \mathbb{T}^d$ имеет место асимптотическая формула

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(x) \in X\} = \frac{|X|}{|\det L|} N + o(N).$$

Множество X будем называть множеством ограниченного остатка, если данную асимптотику можно улучшить до асимптотики

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(x) \in X\} = \frac{|X|}{|\det L|} N + O(1).$$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении для произвольной области $X \subset \mathbb{T}^d$ имеет место асимптотическая формула

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(x) \in X\} = \frac{|X|}{|\det L|} N + o(N).$$

Множество X будем называть множеством ограниченного остатка, если данную асимптотику можно улучшить до асимптотики

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(x) \in X\} = \frac{|X|}{|\det L|} N + O(1).$$

Теорема

Множества $\pi(T_j)$, $j = 0, 1, \ldots, d$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S_α.

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует единственная точка $x' \in T$ из фундаментальной области решетки L, сравнимая с x по модулю решетки L. Определим функцию

$$Fr_T(x) = x', x' \in T, x \equiv x' \pmod{L}.$$

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует единственная точка $x' \in T$ из фундаментальной области решетки L, сравнимая с x по модулю решетки L. Определим функцию

$$Fr_T(x) = x', x' \in T, x \equiv x' \pmod{L}.$$

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_j \\ 0, & x \notin T_j \end{cases}$$

Теорема

Существуют векторы $e_0, e_1, \ldots, e_d$ такие, что

$$\chi_j(x) = (Fr_T(x+\alpha) - Fr_T(x), e_j) - \frac{|T_j|}{|\det L|}.$$

$$N_j(\alpha, x, n) = \sharp\{k : 0 \le k < n : S_\alpha^k(x) \in \pi(T_j)\},$$
$$r_j(\alpha, x, n) = N_j(\alpha, x, n) - n\frac{|T_j|}{|\det L|}.$$

Следствие

$$r_j(\alpha, x, n) = (Fr_T(n\alpha + x) - Fr_T(x), e_j).$$

$$N_j(\alpha, x, n) = \sharp\{k : 0 \leq k < n : S_\alpha^k(x) \in \pi(T_j)\},$$
$$r_j(\alpha, x, n) = N_j(\alpha, x, n) - n\frac{|T_j|}{|\det L|}.$$

Следствие

$$r_j(\alpha, x, n) = (Fr_T(n\alpha + x) - Fr_T(x), e_j).$$

Следствие

Единственным линейным соотношением между функциями $r_j(\alpha, x, n)$, выполняющимся для всех n, является соотношение $\sum_{j=0}^{d} r_j(\alpha, x, n) = 0$.

$$N_j(\alpha, x, n) = \sharp\{k : 0 \le k < n : S_\alpha^k(x) \in \pi(T_j)\},$$
$$r_j(\alpha, x, n) = N_j(\alpha, x, n) - n\frac{|T_j|}{|\det L|}.$$

Следствие

$$r_j(\alpha, x, n) = (Fr_T(n\alpha + x) - Fr_T(x), e_j).$$

Следствие

Единственным линейным соотношением между функциями $r_j(\alpha, x, n)$, выполняющимся для всех n, является соотношение $\sum_{j=0}^{d} r_j(\alpha, x, n) = 0$.

Следствие

Множества $\pi(T_j)$ являются множествами ограниченного остатка для всех сдвигов S_β, $\beta \equiv h\alpha \pmod{L}$, $h \in \mathbb{Z}$.

Пусть

$$r_j^-(x) = \inf_n r_j(\alpha, x, n),$$

$$r_j^+(x) = \sup_n r_j(\alpha, x, n)$$

– точные нижняя и верхняя границы остаточного члена $r_j(a, x, n)$. Обозначим через π_j отображение ортогональной проекции на прямую, проходящую через начало координат и имеющую направляющий вектор e_j.

Теорема

$$r_j^-(x) = |e_j|(\inf_{t \in T} \pi_j(t) - \pi_j(x)),$$
$$r_j^+(x) = |e_j|(\sup_{t \in T} \pi_j(t) - \pi_j(x)).$$

Функция распределения остаточного члена

$$\rho_j(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{i : 0 \le i < n, r_j(\alpha,x,i) \in [r_j^-(x);t]\}}{n}.$$

Нормированная функция распределения

$$\overline{\rho}_j(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{i : 0 \le i < n, \frac{r_j(\alpha,x,i)-r_j^-(x)}{r_j^+(x)-r_j^-(x)} \in [0;t]\}}{n}.$$

Теорема

$\overline{\rho}_j(x,t)$ не зависит от x.

Теорема

Пусть

$$T_t = \pi_j^{-1}\left(\left[\frac{r_j^-(x)}{|e_j|}; \frac{t}{|e_j|}\right]\right) \bigcap T.$$

Тогда справедливо равенство

$$\rho_j(x,t) = \frac{|T_t|}{|T|}.$$

Теорема

Пусть T – многогранник. Тогда $\overline{\rho}_j(x,t)$ – кусочный многочлен степени d.

Множество $A = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ назовем алфавитом. Бесконечную последовательность $w = \{w_k\}_{k=0}^{\infty}$, $w_k \in A$ для всех k, назовем словом над алфавитом A. Конечные подпоследовательности $u = \{w_k\}_{k=u_1}^{u_1+u_2-1}$ будем называть подсловами слова w. Число u_2 будем назвать длиной $|u|$ подслова u. Для каждого подслова u и $j \in A$ определим величину

$$|u|_j = \sharp\{k : u_1 \leq k < u_1 + u_2, w_k = j\},$$

то есть количество вхождений символа j в подслово w. Слово w назовем C-сбалансированным, если для любой пары его подслов одинаковой длины u, v и для любого $j \in A$ выполняется неравенство

$$||u|_j - |v|_j| \leq C.$$

Константу C будем называть показателем сбалансированности слова w.

Опеределим бесконечное слово $w = w(\beta, x)$ по правилу $w_k = j$, если $S_\beta^k(x) \in \pi(T_j)$ $(\beta \equiv h\alpha \pmod{L})$.

Теорема

Слово $w(\beta, x)$ является C-сбалансированным с эффективно вычислимым показателем сбалансированности C.

Квазирешеткой $Q = Q(\alpha, l_0, \ldots, l_d)$ $(l_j > 0)$ будем называть множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, заданное условиями

$$\begin{array}{c} x_{-1} = 0; \\ x_{n+1} = x_n + l_j, \text{если } S_\alpha^n(0) \in \pi(T_j) \end{array}.$$

Тригонометрическая сумма. $e(x) = e^{2\pi ix}$, $f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} e(x_j\lambda)$

Тригонометрическая сумма. $e(x) = e^{2\pi i x}$, $f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} e(x_j \lambda)$

Теорема

Пусть $h_Q = \sum_{j=0}^{d} l_j \frac{|T_j|}{|T|}$. Если $h_Q \lambda \notin \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \mathbb{Q} + \mathbb{Q}$, то справедлива оценка

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_1(\widehat{\alpha}, n)) = o(n).$$

Если $h_Q \lambda = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{d} a_j \alpha_j}{b}$, $a_0, a_1, \ldots, a_d, b \in \mathbb{Z}$, $(a_1, \ldots, a_d, b) = 1$ и $|b| > 1$, то справедлива оценка

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_2(\widetilde{\alpha}, n)) = o(n).$$

Если же $h_Q \lambda = a_0 + \sum_{j=1}^{d} a_j \alpha_j$, $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$, то справедлива асимптотическая формула

$$f_n(\lambda) = c_{Q,\lambda} n + O(\Delta_2(\widetilde{\alpha}, n)),$$

Для произвольного $h > 0$ определим h-дробную долю

$$\{x\}_h = x - h[\frac{x}{h}].$$

Очевидно, что $0 \leq \{x\}_h < h$. Последовательность $\{x_n\}$ называется равномерно распределенной по модулю h, если для любых $0 \leq a < b < h$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{k:0\leq k<n:x_k\in[a;b)\}}{n} = \frac{b-a}{h}$.

Для произвольного $h > 0$ определим h-дробную долю

$$\{x\}_h = x - h[\frac{x}{h}].$$

Очевидно, что $0 \leq \{x\}_h < h$. Последовательность $\{x_n\}$ называется равномерно распределенной по модулю h, если для любых $0 \leq a < b < h$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{k:0\leq k<n:x_k\in[a;b)\}}{n} = \frac{b-a}{h}$.

Теорема

Пусть h не представимо в виде

$$h = \frac{Ah_Q}{A_0 + \sum_{j=1}^{d} A_j\alpha_j}$$

с целыми $A, A_0, \ldots, A_d$. Тогда множество точек квазирешетки Q равномерно распределено по модулю h.

X – множество точек в $\mathbb{R}^d$. X – имеет ограниченное расстояние до решетки, если существуют решетка L, взаимно-однозначное отображение $map : X \to L$ и константа C такие, что для любой $x \in X$ $dist(x, map(x)) < C$.

X – множество точек в $\mathbb{R}^d$. X – имеет ограниченное расстояние до решетки, если существуют решетка L, взаимно-однозначное отображение $map : X \to L$ и константа C такие, что для любой $x \in X$ $dist(x, map(x)) < C$.

Теорема

Квазирешетка $Q(\alpha, l_0, \dots, l_d)$ имеет ограниченное расстояние до решетки.

Соответствующая одномерная решетка имеет вид

$$L_Q = \{nh_Q : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Будем говорить, что решетка L_Q сильно вкладывается в квазирешетку Q, если существует h_0 такое, что для любого $n \geq 0$ выполняются неравенства

$$x_{n-1} \leq h_0 + nh_Q < x_n.$$

Будем говорить, что решетка L_Q сильно вкладывается в квазирешетку Q, если существует h_0 такое, что для любого $n \geq 0$ выполняются неравенства

$$x_{n-1} \leq h_0 + nh_Q < x_n.$$

Пусть

$$l^* = \sum_{j=1}^{d} (l_j - l_0) e_j.$$

Теорема

Для того, чтобы решетка L_Q сильно вкладывалась в квазирешетку $Q(\alpha, l_0, \ldots, l_d)$, необходимо и достаточно, чтобы множество $J^* = \bigcap_{j=0}^{d} J_j$, где $J_j = [\sup_{x \in T_j}(x, l^*) - l_j, \inf_{x \in T_j}(x, l^*))$, было непустым. При этом $h_0 \in J^*$.

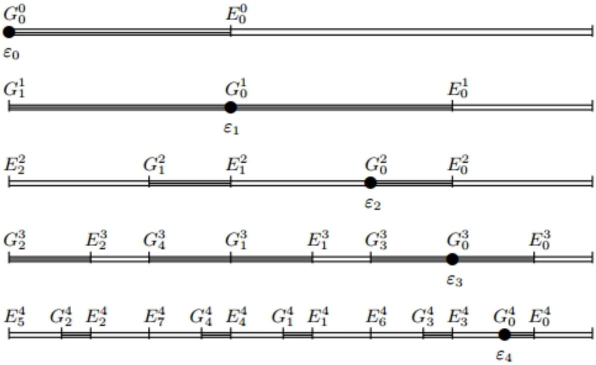
Разбиение

$$T = \bigsqcup_{j=0}^{d} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i).$$

называется обобщенным перекладывающимся, если

1. $S(E_j(i)) = E_j(i+1)$ для всех допустимых значений i, j.
2. Справедливо равенство
$$\bigsqcup_{j=0}^{d} E_j(0) = \bigsqcup_{j=0}^{d} S(E_j(\sharp E_j - 1)).$$
3. Множество $E = \bigsqcup_{j=0}^{d} E_j(0)$ является фундаментальной областью некоторой решетки.

$d = 1$ – обобщенные разбиения Фибоначчи, α – иррационально.
$Til_0 = [0; 1-\alpha) \sqcup [1-\alpha; 1)$
Til_{n+1} получается из Til_n откладыванием отрезка наименьшей длины от левых концов всех отрезков разбиения.



$d = 1$ – обобщенные разбиения Фибоначчи, α – иррационально, $S_\alpha : x \to x + \alpha \mod 1$, T_n – разбиение $[0;1)$ точками $\{i\alpha\}$, $0 \leq i < n$.

Теорема о трех длинах

Разбиение T_n содержит интервалы либо двух, либо трех различных длин. Во втором случае одна из длин равна сумме двух других.

$\{n_k\}$ – подпоследовательность номеров, для которых T_n содержит интервалы только двух длин.
n_k можно явно выписать через разложение α в цепную дробь.
$Til_k = T_{n_k}$

$d = 1$, $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots)$, Q_k – знаменатели подходящих дробей. Разложение Островского-Цеккендорфа

$$n = \sum_{k \geq 0} z_k Q_k.$$

$0 \leq z_0 < q_1$, $0 \leq z_k \leq q_{k+1}$, $z_k = q_{k+1} \Rightarrow z_{k-1} = 0$.
Слово $z_k \ldots z_0$ преобразуем в слово над алфавитом $\{0, 1\}$ при помощи замены $z_i \to 0^{q_{i+1} - z_i} 1^{z_i}$.
$\mathbb{N}(w)$ – множество натуральных чисел, у которых полученное слово заканчивается на w. $\chi(n) = \{(n+1)\alpha\}$.

$$Til_n = \bigsqcup_{w : |w| = n, \mathbb{N}(w) \neq \emptyset} \overline{\chi(\mathbb{N}(w))}$$

В частности, $\overline{\chi(\mathbb{N}(w))}$ либо пусто, либо отрезок

На самом деле три приведенных разбиения эквивалентны с точностью до сдвига. Более того, в некотором смысле других разбиений в одномерном случае нет.

Теорема

Пусть T – перекладывающееся разбиение тора относительно сдвига S_α. Тогда существуют β, n такие, что

$$T = Til_n + \beta \bmod 1$$

Геометрические подстановки.
σ – подстановка над алфавитом $A = \{1, \ldots, d+1\}$.
$M_\sigma = (m_{ij})_{i,j=1}^{d}$, где m_{ij} равно числу вхождений символа i в слово j, $ab(w)$ – $d+1$-мерный вектор-столбец, компоненты которого равны числам вхождений символов алфавита A в слово w.
$(0, i^*) = \{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{d+1} \mu_l e_l : 0 \leq \mu_l < 1\}$, $(x, i^*) = x + (0, i^*)$ для $x \in L$.
$\Theta_\sigma(0, i^*) = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{\substack{W \\ \sigma(j) = YiW}} (M_\sigma^{-1} ab(W), j^*)$
$\Theta_\sigma(x, i^*) = M_\sigma^{-1} x + \Theta_\sigma(0, i^*)$
$\Theta_\sigma \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda \right) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \Theta_\sigma(\lambda)$.

Геометрические подстановки

$$D_k^{(j)} = \Theta_\sigma^k(0, j^*),$$
$$D_k = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} D_k^{(j)}.$$

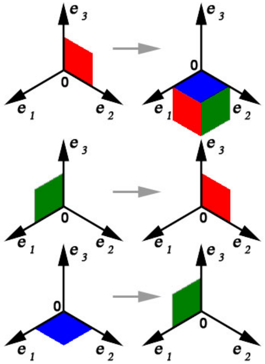
v_σ, v_σ^* – правый и левый собственные векторы матрицы M_σ, соответствующие ее наибольшему собственному значению λ_σ. P_σ d-мерное – подпространство, ортогональное вектору v_σ^*. π – проекция на P_σ вдоль вектора v_σ.
Тогда имеем разбиение множества $\pi(D_k)$ на множества вида $\pi((x, i^*))$.

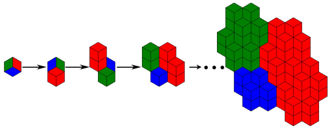
Теорема

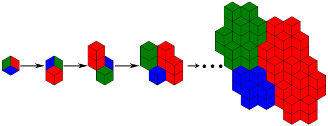
Для примитивной унимодулярной подстановки Пизо построенное разбиение является обобщенным перекладывающимся разбиением.

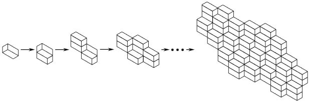
Подстановка Рози

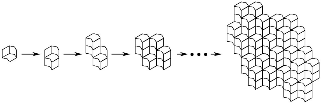
$$\sigma_R : \begin{array}{ccc} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 13 \\ 3 & \to & 1 \end{array}$$







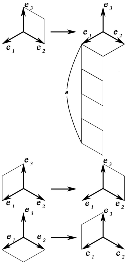


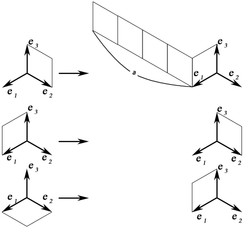


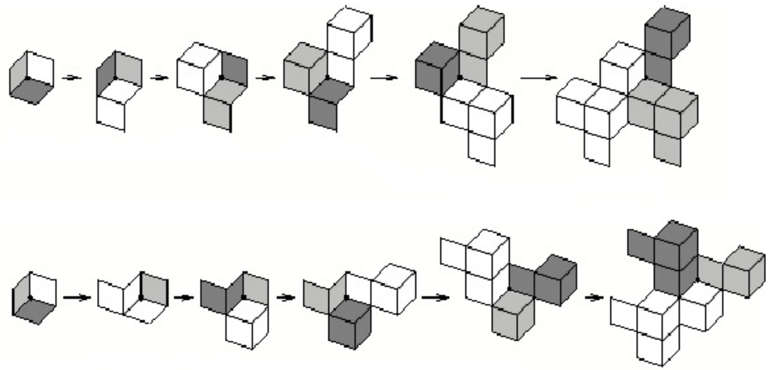
Подстановки Якоби-Перрона

$$\sigma_{(a,0)}: \begin{array}{ccl} 1 & \to & \overbrace{11\ldots1}^{a \text{ раз}}2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array},$$

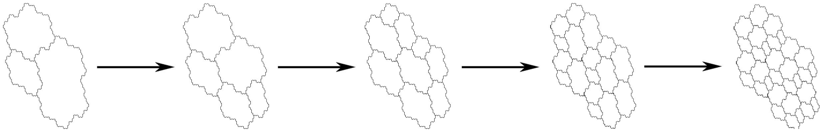
$$\sigma_{(a,1)}: \begin{array}{ccl} 1 & \to & \overbrace{11\ldots1}^{a \text{ раз}}3 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}.$$


e_1 e_2 e_3
a


e_1 e_2 e_3
a



Разбиения Рози



Обобщенное перекладывающееся разбиение

$$T = \bigsqcup_{j=0}^{d} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i).$$

Теорема

Все множества $\pi(E_j(i))$ являются множествами ограниченного остатка.

Пусть дана последовательность обобщенных перекладывающихся разбиений относительно сдвигов S_k:

$$T^d = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_{kj}-1} E_{kj}(i).$$

Пусть выполнены два условия:

1. Существуют постоянные $\lambda > 1$, c_j, $i = 1, \ldots, d+1$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место асимптотические равенства $\sharp E_{kj} \sim c_j \lambda^k$.
2. Множества $E_{kj}(0)$ и векторы w_{kj} не зависят от k.

Примеры:

- Разбиения Фибоначчи для квадратичной иррациональности α с чисто периодическим разложением в цепную дробь
- Разбиения, соответствующие последовательности подстановок σ^m
- Разбиения Рози

Примеры:

- Разбиения Фибоначчи для квадратичной иррациональности α с чисто периодическим разложением в цепную дробь
- Разбиения, соответствующие последовательности подстановок σ^m
- Разбиения Рози

Теорема

Существует эффективно вычислимая постоянная C, не зависящая от k, i, j, x и такая, что

$$\left| \sharp\{m : 0 \le m < n, S_k^m(x) \in E_{kj}(i)\} - \frac{|E_{kj}(i)|}{|T|} \right| \le C.$$