# Комбинаторный анализ (комбинаторика)

*Комбинаторный анализ* (*комбинаторика*) — раздел математики, в котором рассматриваются задачи, связанные с различными количественными характеристиками дискретных множеств. Среди таких задач можно выделить задачи о подсчете (перечислении) в заданном множестве элементов с определенными свойствами. Простейшими задачами такого типа являются задачи о числе перестановок, размещений и сочетаний элементов в конечном множестве.

*Перестановкой* $n$-элементного множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется любой упорядоченный набор $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$, состоящий из элементов множества $A$, в котором каждый элемент из $A$ встречается ровно один раз. Нетрудно видеть, что число перестановок $P_n$ $n$-элементного множества равно

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

*Размещением* из $n$ элементов по $k$ называется произвольная перестановка $k$-элементного подмножества $n$-элементного множества. Число размещений $A_n^k$ из $n$ элементов по $k$ равно

$$A_n^k = \frac{n!}{k!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

*Сочетанием* из $n$ элементов по $k$ называется произвольное $k$-элементное подмножество $n$-элементного множества. Число сочетаний $C_n^k$ из $n$ элементов по $k$ равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Перестановки, размещения и сочетания естественным образом возникают при решении многих комбинаторных задач, при этом часто найденные решения выражаются через величины $P_n$, $A_n^k$ и $C_n^k$, называемые *комбинаторными числами*. В качестве простого примера такой задачи можно привести задачу о числе сочетаний с повторениями. *Сочетанием с повторениями* из $n$ элементов по $k$ называется неупорядоченный $k$-элементный набор, состоящий из элементов $n$-элементного множества. Каждое сочетание с повторениями из $n$ элементов по $k$ однозначно определяется тем, сколько раз каждый элемент множества входит в рассматриваемое сочетание. Пусть в некоторое такое сочетание элемент $\alpha_i$ входит $m_i$ раз, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Этому сочетанию поставим в соответствие набор

$$\underbrace{11\ldots1}_{m_1}0\underbrace{11\ldots1}_{m_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{m_i}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{m_n}$$

из $k$ единиц, сгруппированных в $n$ блоков, и $(n-1)$ нулей, разделяющих эти блоки. В этом наборе первый блок из $m_1$ единиц соответствует элементу $\alpha_1$, второй блок из $m_2$ единиц — элементу $\alpha_2$, и т. д. Очевидно, что набор такого вида однозначно определяет соответствующее ему сочетание с повторениями. Поэтому число сочетаний с повторениями из $n$ элементов по $k$ равно числу наборов из $k$ единиц и $(n-1)$ нулей. Каждый такой набор можно рассматривать как набор значений характеристической функции $k$-элементного подмножества $(n+k-1)$-элементного множества. Следовательно, число сочетаний с повторениями из $n$ элементов по $k$ равно $C_{n+k-1}^k$.

К комбинаторным числам также относятся *числа Стирлинга* первого $s(n,k)$ и второго $S(n,k)$ рода. Эти числа определяются как коэффициенты в равенствах

$$x(x+1)\cdots(x+k-1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \cdot x^k, \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x(x+1)\cdots(x+k-1),$$

и имеют простой комбинаторный смысл: $s(n,k)$ равно числу элементов группы подстановок $S_n$ являющихся произведениями ровно $k$ непересекающихся циклов, а $S(n,k)$ равно числу разбиений $n$-элементного множества на $k$ непустых подмножеств. Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$. Аналогичная сумма чисел Стирлинга второго рода $\sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)$ называется $n$-м числом Белла $B_n$ и равна числу всех разбиений $n$-элементного множества на непустые подмножества. Для чисел Белла справедлива рекуррентная формула $B_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k B_k$.

При решении комбинаторных задач часто оказывается полезна *формула включений-исключений*

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

позволяющая находить мощность объединения множеств, если известны мощности их пересечений. Воспользуемся формулой включений-исключений для получения явной формулы для чисел Стирлинга второго рода. Сначала решим вспомогательную задачу — найдем число способов $R(n,k)$, которыми можно разложить $n$ разных предметов по $k$ занумерованным ящикам так, чтобы не было пустых ящиков. В общем случае, когда допускаются размещения с пустыми ящиками, разложить $n$ предметов по $k$ ящикам можно $k^n$ способами. Из всех таких размещений составим $k$ подмножеств $A_1, \dots, A_k$, так, что $A_i$ будет состоять из всех тех размещений, при которых $i$-й ящик остается пустым. Тогда $R(n,k) = k^n - |A_1 \cup \dots \cup A_k|$, где мощность объединения находится при помощи формулы включений-исключений. Размещения из множества $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}$ можно получить размещая предметы по ящикам, номера которых не принадлежат множеству $\{i_1, \dots, i_m\}$. Поэтому $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}| = (k-m)^n$. Так как число различных множеств $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}$ равно $C_k^m$, то

$$R(n,k) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m (k-m)^n C_k^m = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{(k-m)^n k!}{m!(k-m)!}.$$

Нетрудно видеть, что число $R(n,k)$ ровно в $k!$ раз больше числа таких размещений $n$ различных предметов по $k$ ненумерованным ящикам, при которых нет ни одного пустого ящика. Рассматривая содержимое каждого ненумерованного ящика как подмножество множества размещаемых предметов, получаем, что $S(n,k)k! = R(n,k)$. Таким образом,

$$S(n,k) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{(k-m)^n}{m!(k-m)!}.$$

Мощным средством решения перечислительных комбинаторных задач является метод производящих функций. *Производящей функцией* последовательности $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $F_n \in \mathbb{R}$, называется ряд

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n.$$

Если ряд сходится абсолютно в какой-либо окрестности нуля, то его можно умножить на другой ряд, возвести его в степень, продифференцировать и т. д. Используя такие действия, можно попытаться найти явный вид функции $F(x)$ в случае, когда последовательность $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестна и описывается только какими-нибудь своими свойствами. Если явную формулу для $F(x)$ удается найти, то далее можно попытаться найти явную формулу и для $F_n$ — общего члена последовательности. Сделать это можно, вычислив $n$-ю производную функции $F(x)$ или разложив эту функцию в ряд каким-либо иным способом. В качестве примера использования метода производящих функций рассмотрим задачу нахождения явной формулы для $n$-го члена *последовательности Фибоначчи.* Члены этой последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

при $n \geqslant 2$ (нумерация членов последовательности начинается с нулевого). Правую и левую части рекуррентного соотношения умножим на $x^n$ и просуммируем по всем целым $n$ от 2 до $\infty$. В результате получим равенство

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n F_n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n (F_{n-1} + F_{n-2}) = x \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} F_{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} F_{n-2},$$

которое после несложных преобразований превращается в равенство для производящих функций

$$F(x) - (1 + x) = x(F(x) - 1) + x^2 F(x).$$

Откуда, в свою очередь, для $F(x)$ легко находится явная формула

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2},$$

которая далее представляется в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} = \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}.$$

Раскладывая получившиеся дроби в ряды, видим, что

$$F(x) = \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n.$$

Таким образом

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

Совместное использование производящих функций и алгебраических методов позволяет решать задачи, в которых требуется перечислять не отдельные элементы, а классы эквивалентности. Простым примером задачи такого типа является задача о числе способов, которыми можно раскрасить грани трехмерного кубика. В этой задаче два раскрашенных кубика считаются эквивалентными, если один кубик можно повернуть так, что после поворота одинаково ориентированные грани кубиков будут окрашены одним и тем же цветом. Дополнительным условием в этой задаче может быть условие на число граней, покрашенных определенным цветом. Например, задача может состоять в том, чтобы найти число различных кубиков, у каждого из которых три белых и три черных грани. Техника решения подобных задач была разработана венгерским математиком Д. Пойа в конце тридцатых годов XX века для решения ряда перечислительных задач теории графов, где в качестве классов эквивалентности рассматривались классы изоморфных графов. Используя эту технику, можно показать, что число неизоморфных графов без кратных ребер и петель на $n$ вершинах асимптотически равно $2^{C_n^2}/n!$.

Заметное место в комбинаторном анализе занимают задачи, связанные с изучением экстремальных элементов различных множеств. К числу самых известных задач такого типа относится задача нахождения чисел Рамсея. *Число Рамсея* $R(m, k)$ определяется как наименьшее целое $n$ такое, что в любом полном графе с $n$ вершинами, ребра которого раскрашены в красный и синий цвета, найдется либо подграф с $k$ вершинами, все ребра которого окрашены в красный цвет, либо подграф с $m$ вершинами, все ребра которого окрашены в синий цвет. Точные значения чисел Рамсея известны только при небольших значениях $m$ и $k$, например, $R(3, 3) = 6$, и в случае, когда меньший из аргументов не превосходит двух: легко видеть, что $R(1, m) = 1$ и $R(2, m) = m$. В остальных случаях для чисел Рамсея известны только оценки, например, $R(k, k) > ck2^{\frac{k}{2}}$, где $c$ — константа.

**Рекомендуемая литература**


1. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.

2. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.

3. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир. 1990.

4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005.

5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир. 1977.

6. Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. — М.: Мир. 1976.