

О несуществовании правильногранных тел с данным комбинаторным строением и существовании некоторых простых r -паркетогранников¹

Тимофеев А.В.

Красноярский математический центр, Красноярск, Россия

A.V.Timofeev62@mail.ru

В 2021 г. доказано, [1], существование выпуклого 19-гранника, полученного из икосаэдра заменой его треугольной и смежных с ней трёх граней на три ромба с общей вершиной. При этом изменились оставшиеся двугранные углы, образованные смежными гранями икосаэдра, каждый угол ромбической грани отличается от прямого меньше, чем на $1,5^\circ$, а все треугольные грани остались правильными. В текущем учебном году на семинаре «Группы и паркетогранники» представлены и другие мало отличающиеся от правильногранных тел многогранники. Для каждого из них доказано – независимо от классификационной теоремы Залгаллера [2] – несуществование правильногранника с равным этому телу комбинаторным строением. Рассмотрим алгебраическую модель одного из таких тел, комбинаторно близкого «Опоясанному двуклиннику» M_{24} (тело Джонсона J_{90}). Рассматривая изображение этого правильногранника, см. SageMath-модель², трудно не заметить, что поверхность тела M_{24} разрезается по рёбрам на три поверхности: комбинаторно равную боковой поверхности антипризмы с 6-угольными основаниями полосу из 12 треугольников и две одинаковые 6-гранные поверхности, в каждой из которых кроме двух смежных квадратов в их общих вершинах собраны ещё по два (смежных) треугольника. Отметим также, что общие рёбра квадратных граней тела M_{24} перпендикулярны. Повернём одну из рассмотренных 6-гранных частей так, чтобы угол (скрещающихся) прямых, содержащих общие рёбра квадратов полученного тела, стал острым. Естественно, для соединения вновь трёх этих частей придётся изменить двугранные углы между смежными гранями, а также длины некоторых рёбер. Полученный так 24-гранник и любой комбинаторно ему равный многогранник будем обозначать M_{24a} , см. модель одного из них³.

Теорема 1. Множество вершин модели многогранника M_{24a} равно объединению орбит точек

$$\left(a\sqrt{2} - b, a + b\sqrt{2}, h\right), \left(-b(1 + \sqrt{2}), a(1 + \sqrt{2}), h\right), \left(-a\sqrt{2} - b, a - b\sqrt{2}, h\right), \left(-b, a, h + \sqrt{2}/2\right),$$

где $a = \sqrt{18 + 6\sqrt{6}}/12$, $b = \sqrt{18 - 6\sqrt{6}}/12$, $h = \sqrt{2\sqrt{6}} - 2/4$, при действии группой

$$[2, 2]^+ \cong \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle.$$

Доказательство. Если смежные квадратные грани тела M_{24a} образуют прямой угол, то рассмотренную выше 6-гранную поверхность можно расположить на плоскости так, что ей принадлежат шесть вершин, отличных от общих вершин квадратных граней. Действительно, из двух таких поверхностей состоит поверхность правильногранного тела $P_{3,9} = \Pi_4 + M_2 + M_2$, составленного из куба Π_4 и двух четырёхугольных (правильногранных) пирамид M_2 , см. обозначения и названия, [3]. Это хорошо видно по изображению на рис. 1 этого тела Джонсона «Удлиненная четырёхугольная бипирамида» J_{15} , где числами 1 и 2 помечены обе его фундаментальные вершины, действуя на которые симметриями группы $AutP(3, 9)$, получаем все его вершины. Одна из содержащих эти вершины плоскостей – плоскость xOz – делит поверхность тела $P_{3,9}$ на равные 6-гранные поверхности, в каждой из которых квадратные грани являются смежными гранями куба.

¹Исследование выполнено за счет гранта Красноярского математического центра .

²<https://sagecell.sagemath.org/?q=inufah>

³<https://sagecell.sagemath.org/?q=xupadw>

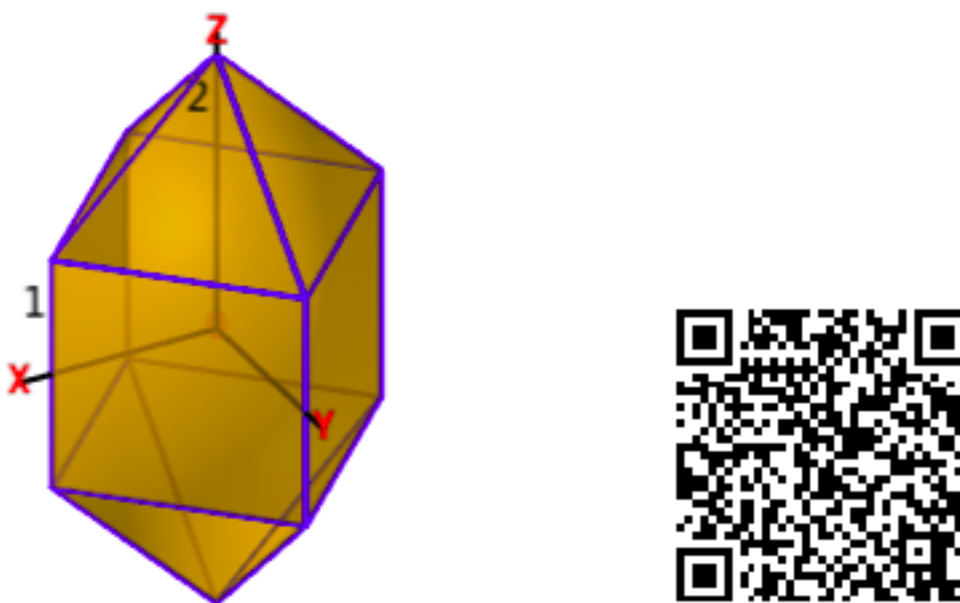


Рис. 1: Правильногранник $P_{3,9} = J_{15}$, <https://sagecell.sagemath.org/?q=tlhusk>

Рассмотренное выше сечение тела $P_{3,9}$ плоскостью xOz есть равносторонний 6-угольник с парой противоположных прямых углов и остальными четырьмя углами по 135° . Расположим этот 6-угольник параллельно плоскости xOy на некотором расстоянии от неё, которому дадим обозначение h . Из соотношений правильной 4-угольной пирамиды с единичными рёбрами находим, что малая диагональ рассматриваемого 6-угольника, соединяющая вершины углов 135° , равна $\sqrt{2}$. На рис. 2 эта диагональ изображается отрезком V_1V_3 , концы которого помечены числами 1 и 3 соот-

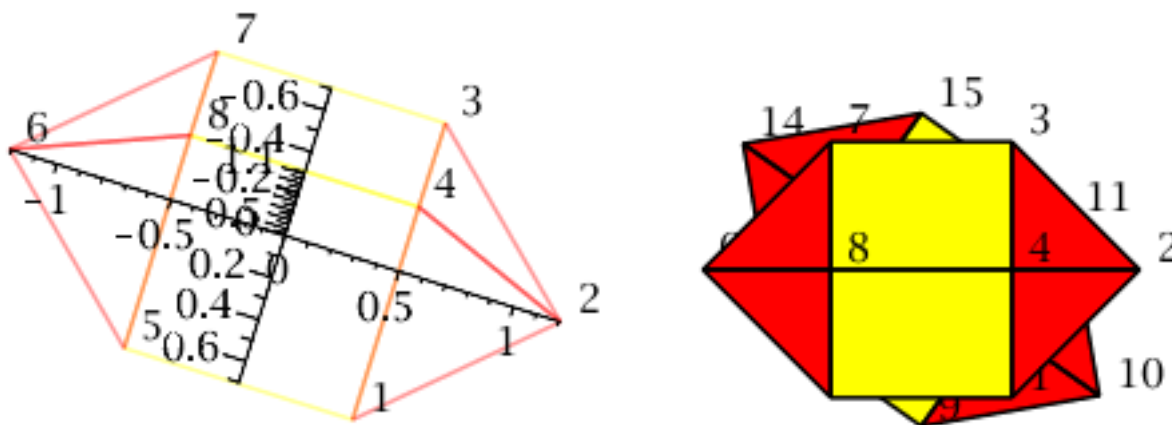


Рис. 2: 6-гранная поверхность и расположение двух таких поверхностей в составе тела M_{24a}

ветственно, сам отрезок составлен из проекций рёбер V_1V_4 и V_4V_3 . То есть стороны прямоугольника $V_1V_3V_7V_5$ равны 1 и $\sqrt{2}$. Теперь записываем координаты вершин V_1, V_2, V_3, V_4 :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, h\right), \left(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, h\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, h\right), \left(0, \frac{1}{2}, h + \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{1}$$

Для нахождения неизвестного пока расстояния h заметим, что ещё одна 6-гранная поверхность тела M_{24a} получена из построенной композицией отражения от плоскости xOy и поворота с осью аппликата на угол, который будем обозначать ρ . На правой части рис. 2 величине ρ равен угол $V_7V_1V_3$, см. также рис. 3. Действительно, повернуть и отразить 6-гранную поверхность надо так, чтобы треугольник $V_3V_{15}V_7$ стал правильным. Равенство его сторон V_3V_{15} и V_7V_{15} обеспечивается таким расположением проекций четырёх квадратов на плоскость xOy , которые на рис. 2 изображены двумя жёлтыми прямоугольниками, что, во-первых, диагональ V_1V_7 верхнего прямоугольника отображается на диагональ V_9V_{15} нижнего и, во-вторых, диагональ V_9V_{15} лежит на оси симметрии прямоугольника $V_1V_3V_7V_5$, а диагональ V_3V_5 верхнего прямоугольника служит осью симметрии нижнего. Поскольку ρ и есть угол между этими диагоналями V_1V_7 и V_9V_{15} , то $\rho = \widehat{V_7V_1V_3}$, что и требовалось. Катеты треугольника $V_3V_1V_7$ уже найдены. Поэтому гипотенуза V_1V_7 равна $\sqrt{3}$. Следовательно, $\cos \rho = \sqrt{2}/\sqrt{3}$, а $\sin \rho = 1/\sqrt{3}$. Таким образом, координаты вершин нижней 6-гранной поверхности получаются из координатных троек восьми вершин верхней такой поверхности умножением каждой координатной её тройки на матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Достроим две полученные поверхности (правильными) треугольниками $V_3V_{15}V_7$ и $V_1V_5V_9$. Они смежны с квадратными гранями верхней поверхности. Рассмотрим равнобочную трапецию, большее основание которой есть отрезок V_9V_{15} , а меньшее соединяет середины рёбер V_3V_7 и V_1V_5 . Очевидно, основания её равны $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$, боковые стороны имеют длину $\sqrt{3}/2$ как высоты правильных треугольников, и высота трапеции равна $2h$. Следовательно,

$$2h = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{6} - 2}}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{2\sqrt{6} - 2}}{4}.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 повернём систему координат вокруг оси аппликата так, чтобы и другие координатные оси совпадали с осями поворотов, совмещающих с собой тело M_{24a} . На рис. 3 эти оси изображены зелёным цветом. Угол поворота должен быть таким, что новая ось абсцисс содержит середины рёбер V_3V_{15} и V_5V_9 . Значит эта ось есть биссектриса рассмотренного выше угла, образованного диагоналями V_1V_7 и V_9V_5 . Выходит, что искомый угол равен $\rho/2$. Поскольку $\cos^2(\rho/2) = (1 + \cos \rho)/2$ и $\cos \rho$ известен, то

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\rho}{2} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}, \\ \cos \frac{\rho}{2} &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{6}}{6}}, \quad \sin \frac{\rho}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{6}}. \end{aligned}$$

Учитывая введённые в теореме обозначения, приходим к матрице этого поворота

$$\begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ 2b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая её на вычисленные уже координатные тройки вершин тела M_{24a} , построим все его 16 вершин. В частности, умножение на координатные тройки (1) приводит к завершению доказательства теоремы 1.

В рассмотренной выше «живой» SageMath-модели многогранника M_{24a} числами 1, 2, 3, 4 помечены точки из теоремы. Таким образом, фундаментальных вершин 24-гранника M_{24a} стало на одну

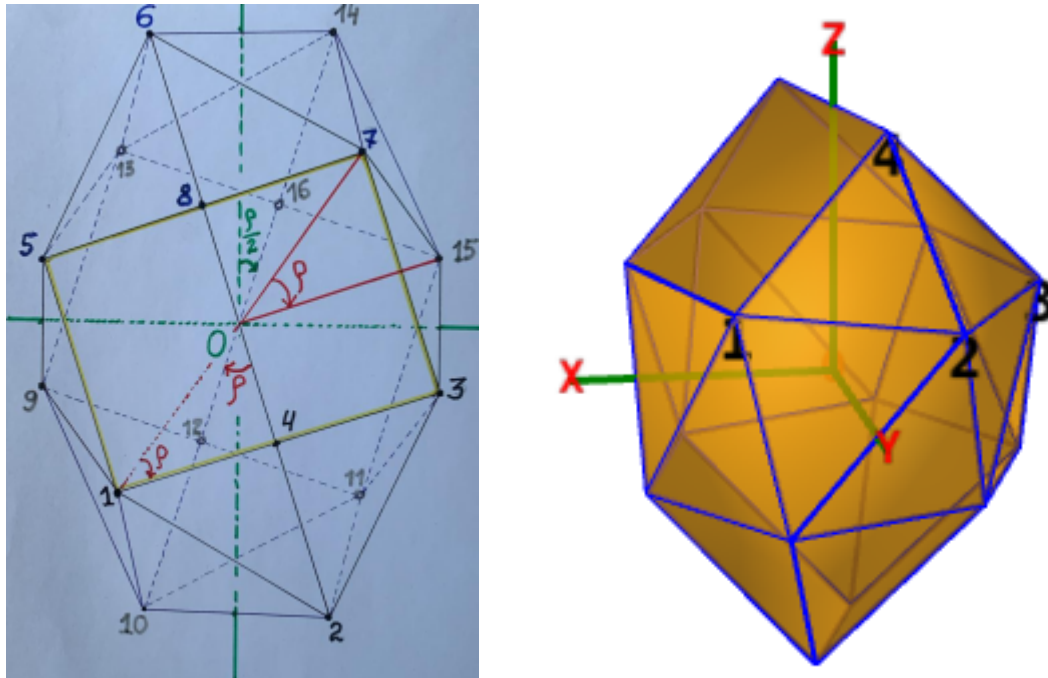


Рис. 3: Проекция рёбер многогранника M_{24a} (<https://u.to/YpviIQ>) и оси его симметрий

больше, чем у «Опоясанного двуклинника» M_{24} . Причина в том, что в отличие от M_{24} тело M_{24a} не обладает несобственными симметриями: $[2, 2]^+ = \text{Aut}M_{24a} = \text{Aut}^+M_{24} < \text{Aut}M_{24} = [2^+, 4]$.

Следствие 1. Четырёхугольные грани модели тела M_{24a} являются квадратами и все рёбра единичные за исключением двух с точностью до симметрии её рёбер длиной

$$\sqrt{1 + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} \approx 1,12228 \text{ и } \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6}} \approx 0,9801.$$

Построенная модель тела M_{24a} интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильных многогранников: рассмотренного J_{15} и четырёхскатного прямого бикупола $P_{2,39} = J_{28}$. Живые модели тел Джонсона хорошо смотрятся в сети по адресу Johnson Solids⁴. Однако, для доказательства несуществования правильного многогранника с комбинаторным строением M_{24a} построенную модель необходимо усложнить. Для этого вводится параметр, равный величине угла, образованного смежными квадратными гранями. Если угол этот отличен от прямого, то соответствующие 6-гранные поверхности можно увидеть на правильных многогранниках $M_{21} = J_{89}$, $M_{22} = J_{86}$, $P_{3,7} = J_{14}$, $P_{3,11} = J_{16}$, $P_{2,35} = J_{27}$ и $P_{2,44} = J_{30}$. Затем координаты вершин записываются как функции косинуса половины этого угла. Требование равнорёберности многогранника приводит к уравнениям, решения которых и позволят сделать необходимый вывод о несуществовании правильного многогранника M_{24a} . Прежде, чем строить усложнённую модель тела M_{24a} , напомним теорему косинусов трёхгранного угла, см., например, [4], стр. 253. Пусть $A(\alpha, \beta, \gamma)$ – двугранный угол напротив плоского угла α в трёхгранном угле с плоскими углами α, β, γ ; $\alpha(A, \beta, \gamma)$ – плоский угол α в трёхгранном угле с известными A, β, γ . Тогда справедливо равенство

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A. \tag{2}$$

Теорема 2. Если $\text{Aut}M_{24a} = [2, 2]^+$, то тело M_{24a} не может быть правильным.

Доказательство. Предположим, что найдётся многогранник M_{24a} с правильными гранями и единичными рёбрами. Начнём его построение с 6-гранной поверхности, содержащей ровно две вершины

⁴<https://www.orchidpalms.com/polyhedra/johnson/johnson.html>

четырёхгранных углов типа $(3, 3, 4, 4)$, то есть инцидентных двум смежным квадратам и двум смежным треугольникам каждая. Величину двугранного угла, образованного смежными квадратными

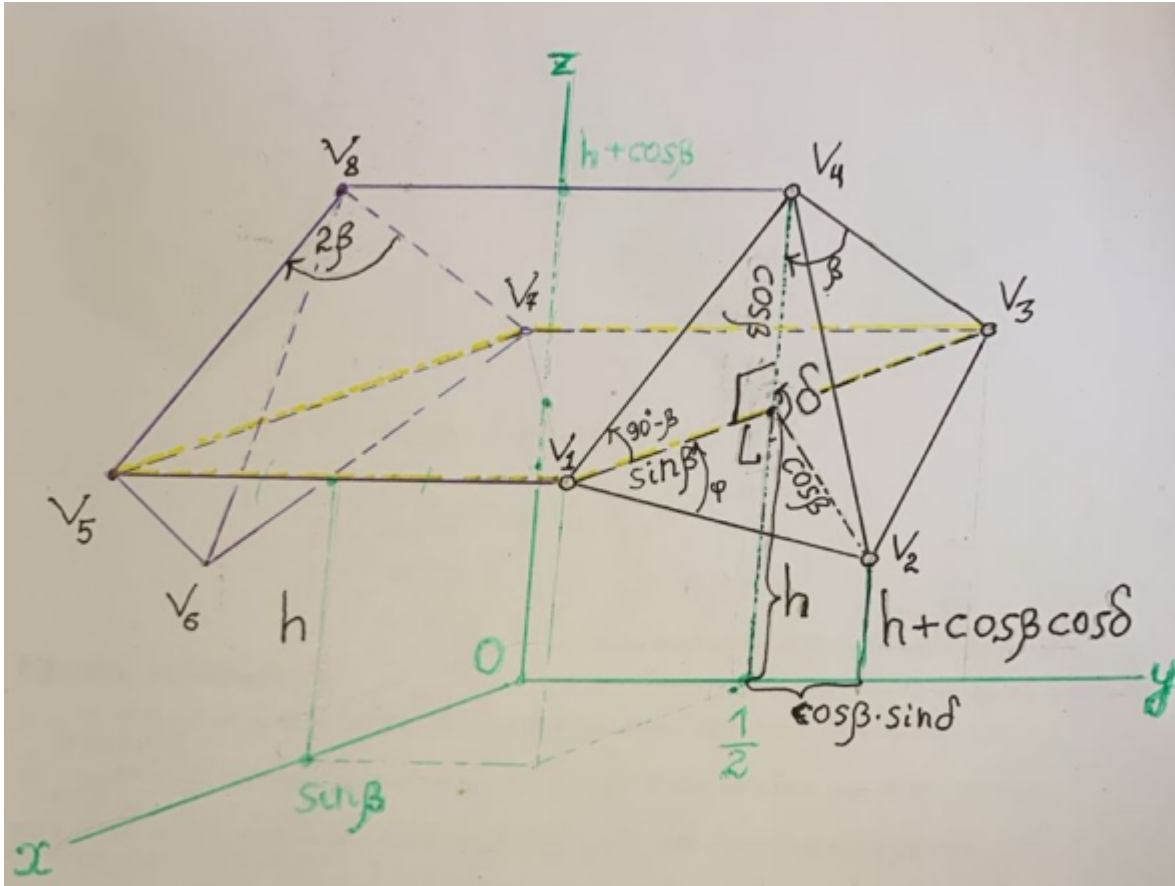


Рис. 4: К нахождению координат фундаментальных вершин V_1, V_2, V_3, V_4

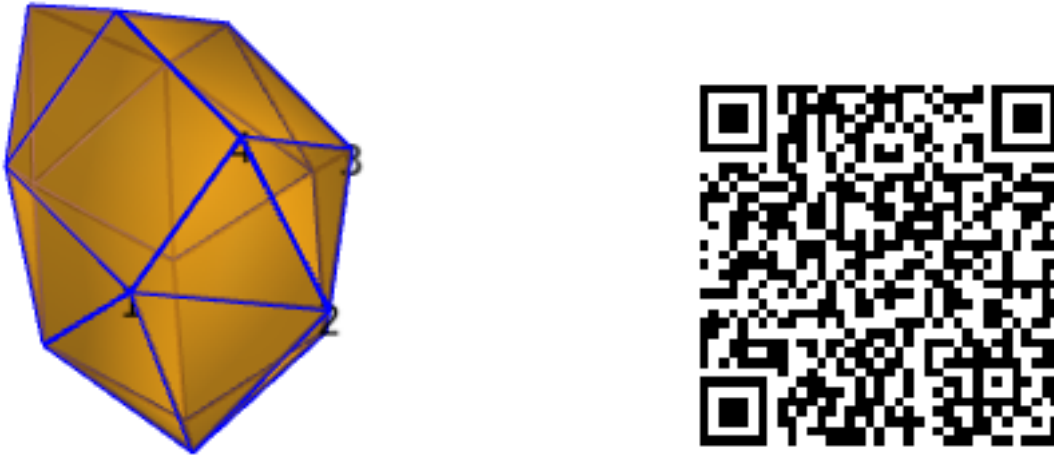
гранями тела M_{24a} , обозначим 2β . Оба таких угла предполагаются одинаковыми потому, что один есть образ другого при повороте группы $[2, 2]^+$, причём ось поворота перпендикулярна прямой, содержащей середины общих рёбер квадратов. Следовательно, справедлива

Лемма. Если грани тела M_{24a} правильные, то его смежные квадратные грани образуют равные двугранные углы.

Для каждого $\beta, 0 < \beta < 60^\circ$ построим алгебраическую модель $M_{24a} = M_{24a}(\beta)$ так, чтобы обе 6-гранные поверхности модели оставались правильногранными, а связывающие их рёбра полосы треугольников минимально отличались от рёбер шестигранных поверхностей. Модель из теоремы 1 согласно введённым обозначениям есть $M_{24a}(45)$. Пусть h – половина расстояния между плоскостями, содержащими параллельные рёбра смежных квадратов. Тогда, сохранив обозначения фундаментальных вершин модели $M_{24a}(45)$, рис. 5, и выбор системы координат, соответствующий рис. 2 и рис. 4, получаем координаты первой из них,

$$V_1 = \left(\sin \beta, \frac{1}{2}, h \right).$$

Рассмотрим тетраэдр $V_1V_2V_3V_4$, см. рис. 4. Пусть δ – двугранный угол, образованный его гранями $V_1V_3V_4$ и $V_1V_2V_3$, $\phi = \widehat{V_3V_1V_2}$. Тогда применяя к трёхгранному углу с вершиной V_1 теорему косинусов

Рис. 5: 24-гранник $M_{24a}(45)$ и его фундаментальные вершины

(2), получаем

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - \beta) \cos \phi + \sin(90^\circ - \beta) \sin \phi \cos \delta. \quad (3)$$

Пусть L — середина ребра V_1V_3 , единственного быть может отличного от единицы ребра рассматриваемого тетраэдра. Тогда $LV_2 = \sin \phi = \cos \beta$ и, следовательно, $\phi = 90^\circ - \beta$. Поэтому равенство (3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sin \beta \cos(90^\circ - \beta) + \cos \beta \sin(90^\circ - \beta) \cos \delta, \\ \frac{1}{2} &= \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos \delta, \\ \cos \delta &= \frac{1 - 2 \sin^2 \beta}{2 \cos^2 \beta}, \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \beta}}{2 \cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим через β, δ и h координаты трёх оставшихся вершин тетраэдра:

$$V_2 = \left(0, \frac{1}{2} + \cos \beta \sin(180^\circ - \delta), h + \cos \beta \cos \delta \right),$$

$$V_2 = \left(0, \frac{1}{2} + \cos \beta \sin \delta, h + \cos \beta \cos \delta \right),$$

$$V_3 = \left(-\sin \beta, \frac{1}{2}, h \right),$$

$$V_4 = \left(0, \frac{1}{2}, h + \cos \beta \right).$$

Как и в построении модели $M_{24a}(45)$, добавим к этим вершинам их образы при отражении от плоскости xOz : $V_i \rightarrow V_{i+4}, i = 1, 2, 3, 4$, рис. 2 и 4. Стороны прямоугольника $V_1V_3V_7V_5$, изображённого жёлтой на рис. 4 проекцией, равны 1 и $2 \sin \beta$ и, следовательно, диагональ его равна $\sqrt{1 + 4 \sin^2 \beta}$. Оставшиеся вершины тела M_{24a} получим композицией отражения от плоскости xOy и поворота с осью Oz на такой угол ρ , что правильными станут смежные квадратным граням $V_3V_7V_8V_4$ и $V_1V_4V_8V_5$ треугольники $V_3V_{15}V_7$ и $V_1V_5V_9$ соответственно: $V_i \rightarrow V_{i+8}, i = 1, 2, \dots, 8$, рис. 2 и 3. Получаем

$$\cos \rho = \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \beta}}, \quad \sin \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \beta}}.$$

Обозначим правые части полученных равенств буквами c и s соответственно и для $i = 9, 10, \dots, 16$ находим

$$V_i = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} V'_{i-8}, \quad (5)$$

где штрих означает транспонирование. В частности, учитывая равенства (4), получаем

$$\begin{aligned} V_2 &= \left(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-4\sin^2\beta}}{2\cos^2\beta} \cos\beta, h + \frac{1-2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta} \cos\beta \right), \\ V_2 &= \left(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-4\sin^2\beta}}{2\cos\beta}, h + \frac{1-2\sin^2\beta}{2\cos\beta} \right), \\ V_{10} &= \left(\frac{s}{2} + \frac{s\sqrt{3-4\sin^2\beta}}{2\cos\beta}, \frac{c}{2} + \frac{c\sqrt{3-4\sin^2\beta}}{2\cos\beta}, \frac{2\sin^2\beta-1}{2\cos\beta} - h \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Найдём такое значение $h = h(\beta)$, что треугольники $V_3V_{15}V_7$ и $V_1V_5V_9$ станут правильными. Как и в построении модели $M_{24a}(45)$ рассмотрим сечение тела $M_{24a}(\beta)$ плоскостью xOz . Теперь эта равнобочная трапеция имеет основания $\sqrt{1+4\sin^2\beta}$ и $2\sin\beta$, а боковые стороны по прежнему равны $\sqrt{3}/2$. Поэтому её высота

$$\begin{aligned} 2h &= \sqrt{\frac{3}{4} - \left(\frac{\sqrt{1+4\sin^2\beta} - 2\sin\beta}{2} \right)^2}, \\ 2h &= \frac{1}{2} \sqrt{3 - \left(1 + 4\sin^2\beta + 4\sin^2\beta - 4\sin\beta\sqrt{1+4\sin^2\beta} \right)}, \\ h &= \frac{1}{4} \sqrt{2 - 8\sin^2\beta + 4\sin\beta\sqrt{1+4\sin^2\beta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, изменение угла β оставит правильными квадратные и смежные с ними треугольные грани.

С точностью до симметрии тела $M_{24a}(\beta)$ остались два его ребра, которые будут единичными лишь для конечного числа значений β : V_2V_{10} и V_1V_{10} . Найдём эти значения, решив относительно β уравнение

$$|V_2V_{10}|^2 = 1. \quad (8)$$

Пользуясь обозначениями (5), координатами (6) вершин V_2 и V_{10} , находим его левую часть

$$s^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4\cos^2\beta-1}}{2\cos\beta} \right)^2 + \left(c \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4\cos^2\beta-1}}{2\cos\beta} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4\cos^2\beta-1}}{2\cos\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\sin^2\beta-1}{\cos\beta} - 2h \right)^2.$$

Пусть $w = \cos^2\beta$. Тогда $\sin\beta = \sqrt{1-w}$, $c = 2\sqrt{1-w}/\sqrt{5-4w}$, $s = 1/\sqrt{5-4w}$ и согласно (7) высота

$$h = \frac{1}{4} \sqrt{8w - 6 + 4\sqrt{1-w}\sqrt{5-4w}}.$$

Следовательно, уравнение (8) принимает вид

$$s^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4w-1}}{2\sqrt{w}} \right)^2 + \left(c \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4w-1}}{2\sqrt{w}} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4w-1}}{2\sqrt{w}} \right)^2 + \left(\frac{1-2w}{\sqrt{w}} - 2h \right)^2 = 1. \quad (9)$$

Тожественные преобразования, а также избавление от радикалов путём возведения в квадрат обеих частей преобразованного уравнения (9), см. выражения (4)–(10) протокола вычислений «M24aTh2.pdf», приводят к многочлену

$$\begin{aligned} &14898167808w^{17} - 184899665920w^{16} + 1034992222208w^{15} - 3463143620608w^{14} + \\ &+ 7739958951936w^{13} - 12228656742400w^{12} + 14097752522752w^{11} - 12065222541312w^{10} + \\ &+ 7720603398144w^9 - 3689275459072w^8 + 1303460431872w^7 - 333586248192w^6 + \\ &+ 59657541376w^5 - 7004246208w^4 + 479407104w^3 - 14235392w^2 - 12976w - 1, \end{aligned} \quad (10)$$

записанному в протоколе под именем q и номером (11). Нас интересуют его действительные корни, соответствующие значениям β от нуля до 60° . Поэтому корни эти должны оказаться в интервале

$$\left(\frac{1}{4}, 1\right),$$

в который из списка (13) протокола попадают лишь следующие приближённые значения корней многочлена (10): 0,4520206845; 0,4569195098; 0,5514605345; 0,9181223815. Соответствующие им неокруглённые значения угла β будем в указанном порядке обозначать β_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Каждую модель $M_{24a}(\beta_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, включая её графическое представление и длины рёбер V_2V_4 , V_2V_{10} , V_1V_{10} , – а значит и длины симметричных им рёбер – можно найти ниже выражения (15) протокола «M24aTh2.pdf». Получили, что единственным с точностью до симметрии неединичным ребром обладает лишь одна из этих моделей. А именно у модели $M_{24a}(\beta_2)$ ребро V_1V_{10} приближённо равно 0,92166. Следовательно, равнобедренные треугольные грани $V_1V_{10}V_2$, $V_1V_9V_{10}$ и их симметричные образы не могут быть правильными. Полученное противоречие с правильностью рассматриваемой модели тела $M_{24a}(\beta_2)$ завершает доказательство теоремы 2.

Выпуклость модели $M_{24a}(\beta_2)$ хорошо видна по её графическому представлению протокола вычислений, см. также живую модель⁵. Угол, лежащий в треугольной грани напротив её стороны V_1V_{10} равен приближённо $54,881510^\circ$. Конечно, выяснить теряет ли многогранник выпуклость не сложно и без обращения к его графической модели. В самом деле, достаточно для каждого ребра найти знак определителя матрицы, составленной из координатных троек векторов, один из которых построен на выбранном ребре, два других выходят из начала построенного вектора, а концы их расположены на смежных по этому ребру гранях. Порядок расположения координатных троек должен соответствовать ориентации используемой системы координат. Если определитель отрицательный, то образованный смежными по этому ребру гранями двугранный угол больше 180° и выпуклость теряется. Если угол развёрнутый, то рассматриваемое ребро станет условным (соединяющим грани одной плоскости). Таким образом, доказана

Теорема 3. *24-гранник M_{24a} с группой симметрий $[2, 2]^+$ обладает квадратной гранью и единичными рёбрами за исключением четырёх симметричных рёбер, соединяющих вершины типов (3^5) и $(3^4, 4)$, тогда и только тогда, когда образованный квадратными гранями угол $2\beta \approx 94,9427891^\circ$ и такой, что $\cos^2 \beta$ есть второй (действительный) корень расположенного выше многочлена (10).*

Следствие 2. *Длина ребра, соединяющего вершины типов (3^5) и $(3^4, 4)$ тела $M_{24a}(\beta)$ с условием, что не симметричные ему рёбра равны, максимальна при $\beta = \beta_2$ и равна приближённо 0,92166 длины каждого из них.*

Следствие 3. *Отличными от правильных граней тела $M_{24a}(\beta_2)$ являются только смежные по ребру с концами в вершинах типов (3^5) и $(3^4, 4)$ равнобедренные треугольники. Углы напротив оснований этих треугольников равны приблизительно $54^\circ 52' 53,437''$.*

Заметим, что многогранник M_{24a} обладает лишь двумя симметричными рёбрами с концами в вершинах типа (3^5) . Согласно введённым выше обозначениям этими рёбрами являются отрезки V_2V_{10} и V_6V_{14} . Если вернуться к доказательству теоремы 3 и вместо уравнения (8) решать уравнение

$$|V_1V_{10}|^2 = 1, \quad (11)$$

⁵<https://u.to/4QPeIQ>

то согласно протоколу «M24aTh4.pdf» вычислениями (1)–(10) сводится к поиску корней многочлена

$$240058368w^{12} - 2189623296w^{11} + 8787763200w^{10} - 20441067520w^9 + \\ + 30545817344w^8 - 30697016320w^7 + 21078311680w^6 - 9816811776w^5 + \\ + 2991393696w^4 - 543094336w^3 + 42900368w^2 + 1776384w - 408321. \quad (12)$$

Третий из них вычислениями (17) протокола показывает, что верна

Теорема 4. 24-гранник M_{24a} с группой симметрий $[2, 2]^+$ обладает квадратной гранью и единичными рёбрами за исключением двух симметричных рёбер, соединяющих вершины типа (3^5) , тогда и только тогда, когда образованный квадратными гранями угол $2\beta \approx 88, 249^\circ$ и такой, что $\cos^2 \beta$ есть третий (действительный) корень многочлена (12).

Следствие 4. Отличными от правильных граней модели тела M_{24a} из теоремы 4 являются только смежные по ребру с концами в вершинах типов (3^5) равнобедренные треугольники. Углы напротив оснований этих треугольников равны приблизительно $71, 18537^\circ$, а основания примерно в 1, 164 раза длинее несимметричных им рёбер.

Упражнение 1. Построить модель тела M_{24a} , в которой равны длины рёбер, соединяющих вершины типа (3^5) и вершины типов (3^5) и $(3^4, 4)$, причём остальные рёбра имеют попарно равные длины. Указание. Вместо уравнений (8) или (11) решать уравнение $|V_2 V_{10}| = |V_1 V_{10}|$.

Упражнение 2. Пусть образованный квадратными гранями тела M_{24a} двугранный угол равен 2β и $\cos^2 \beta$ есть ближайший числу $0, 4569195$ корень многочлена (10). Найти координаты фундаментальных вершин такой модели при условии, что её оси симметрии совпадают с осями координат.

Упражнение 3. Пусть образованный квадратными гранями тела M_{24a} двугранный угол равен 2β и $\cos^2 \beta$ есть ближайший числу $0, 515$ корень многочлена (12). Найти координаты фундаментальных вершин такой модели при условии, что её оси симметрии совпадают с осями координат.

Указание к упражнениям 2 и 3. Построить матрицу поворота на угол $\rho/2$ аналогично построению в доказательстве теоремы 1.

Задача 1. Доказать избыточность условия $\text{Aut}M_{24a} = [2, 2]^+$ в теореме 2. То есть независимо от классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, $[2]$, доказать что правильногранник M_{24a} не существует.

Задача 2. Для каждой из построенных выше моделей тела M_{24a} найти такой многочлен расширения поля рациональных чисел, что все координаты вершин модели лежат в этом расширении. Комментарий. М. Костэрс нашёл такой многочлен для правильногранников $M_8, M_{20}, \dots, M_{25}, M_{28}$ и некоторых других, см. ссылки на видеозаписи его трёх докладов семинару «Группы и паркетогранники»⁶ весной 2021 г., а также⁷.

Другие алгебраические модели тела M_{25a} и другие модели упомянутого в начале работы 19-гранника В. И. Субботина можно найти в коллекции почти джонсовых тел Johnson Solid Near Misses⁸. Там вводится мера их удалённости от правильногранного тела и 31 "живой" многогранник расположен согласно этому упорядочению. Комбинаторно равные названным многогранникам модели расположены под номерами 4 и 25 соответственно. Основой упорядочения служит число \mathbf{A} , равное сумме модулей разности плоского угла грани и ближайшего к нему угла правильного многоугольника для всех плоских углов граней. Ещё две характеристики удалённости от правильногранника получили обозначения \mathbf{E} и \mathbf{P} для суммы искажений всех длин рёбер при условии, что нормальная длина ребра равна 1, и сумма искажений всех диагоналей каждой (нетрехугольной) грани соответственно. Например, для модели В. И. Субботина

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}; \mathbf{P} \approx 3 \cdot (2 \cdot \sin(91, 4397^\circ/2) - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 \cdot \cos(91, 4397^\circ/2)) \approx \mathbf{0, 1066}; \mathbf{A} \approx 3 \cdot 4 \cdot 1, 4397^\circ = \mathbf{17, 2764}^\circ.$$

Упражнение 3. Найти характеристики \mathbf{A} , \mathbf{E} и \mathbf{P} для моделей тела M_{24a} теорем 1, 3 и 4.

Рассмотренные характеристики можно сделать сколь угодно маленькими на основе следующей алгебраической модели r -паркетогранника Q_{6b} ⁹, [5]. Напомним, r -паркетогранником называется

⁶ <https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2021>

⁷ <https://drive.google.com/drive/folders/1zJTN2qZhrxDZ-2SO7PRozgkIwImlsn-?usp=sharing>

⁸ <http://www.orchidpalms.com/polyhedra/acrohedra/nearmiss/jsmn.htm>

⁹ <https://u.to/QJTmIQ>

выпуклый многогранник, обладающих гранями, составленными из конечного числа и более одного правильных многоугольников, и быть может правильными гранями.

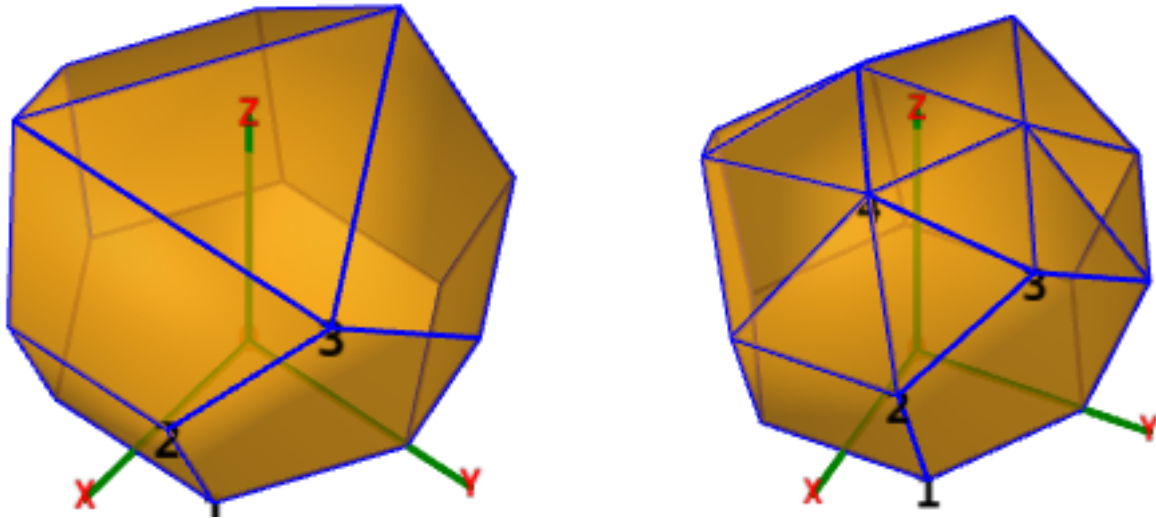


Рис. 6: 11-гранник Q_{6b} и 20-гранник Q_{6be}

Теорема 5. Объединение орбит точек

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} (1 + \sqrt{5})\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$$

при действии группой (диэдра)

$$[3] \cong \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

совпадает с множеством вершин 11-гранника Q_{6b} с правильными одной шестиугольной, тремя пятиугольными, тремя квадратными и треугольной гранями, а также тремя трапециями, каждая из которых составлена из трёх треугольников с единичными рёбрами. Треугольная грань разделена своими средними линиями на четыре таких треугольника.

Доказательство. Построив объединение орбит из формулировки теоремы 5, строим все такие отрезки, соединяющие точки этого объединения, что длины их равны единице и диагоналям нетреугольных граней: $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\sqrt{3}$, 2. Если получим на чертеже вместе с рёбрами все диагонали нетреугольных граней, а также треугольники, из которых составлены трапеции, и треугольники со сторонами длины два, то теорема 5 доказана.

Пусть $\epsilon > 0$. Добавим к трём (фундаментальным) вершинам теоремы 5 четвертую точку, расположенную на высоте ϵ над серединой большего основания трапецевидной грани с ребром V_2V_3 :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \epsilon\right).$$

Действуя группой [3] теперь уже на четыре точки, получим все вершины 20-гранника¹⁰, у которого все нетреугольные и одна треугольная грань правильные, а оставшиеся 12 треугольных граней сколь

¹⁰<https://u.to/Tk7nIQ>

угодно мало – в зависимости от ϵ – отличаются от правильных. Будем этот 20-гранник обозначать $Q_{6b\epsilon}$.

Упражнение 4. Найти зависящие от ϵ характеристики **A**, **E** и **P** тела $Q_{6b\epsilon}$.

Протоколы вычислений, необходимых для доказательства результатов доклада, его презентация и настоящий текст расположены по адресу: <https://drive.google.com/drive/folders/12X5AvnbFbQ-mIQK2epnsn5jv89CFHEE8?usp=sharing>

Список литературы

- [1] В. И. Субботин. О существовании RR -многогранников, связанных с икосаэдром. *Чебышевский сб.* **22**: 4 (2021) 253–264.
- [2] В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями. *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* **2** (1967) 5–221.
- [3] А. В. Тимофеенко. К перечню выпуклых правильных многогранников. *Современные проблемы математики и механики. Том. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.* / Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. М.: издательство Моск. ун-та, 2011, 155–170.
- [4] А. В. Погорелов. Геометрия. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.
- [5] А. В. Тимофеенко. О выпуклых правильных многогранниках, некоторые грани которых лежат в одной плоскости. *Тр. участников междунар. школы-семинара по геом. и анал. пам. Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, база отдыха Рост. Госуниверс. «Лиманчик», 5–11 сент. 2006 г.* – Ростов-на-Дону: Изд. ООО «ЦВВР», 2006. С. 92–93.