Геометрия унимодулярных систем.

И.В.Артамкин

Определение 1. *Матрица A называется* **вполне унимодулярной***, если все ее ненулевые миноры равны* ± 1.

Определение 2. *Пусть U — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim U = n$.* **Унимодулярной системой** *будем называть набор $\Omega = (U, \pm\xi_1, \ldots, \pm\xi_N)$, где $0 \neq \xi_i \in U^*$, если эти линейные формы порождают U^* и любой базис (т.е. линейно независимый набор $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_n}$) порождает над $\mathbb{Z}$ одну и ту же свободную абелеву группу $M \subset U^*$ ранга n.*

Определение 3. *Число базисов унимодулярной системы Ω назовем ее* **сложностью** $c(\Omega)$.

Предложение 1. *a) Пусть* $A = (a_{p,q})$ *— вполне унимодулярная матрица* $N \times n$ *максимального ранга и* $N \geqslant n$. *Рассмотрим линейные функции, задаваемые строками матрицы* A*:* $\alpha_k(x) = \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i$ $(x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$*,* $1 \leqslant k \leqslant N$*. тогда* $(\mathbb{R}^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ *— унимодулярная система.*
b) Пусть $\Omega = (U, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ *— унимодулярная система,* $\dim U = n$*, и* $M \subset U^*$ *— свободная абелева подгруппа, порожденная над* $\mathbb{Z}$ *всеми* ξ_i*, и* $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$ *— базис* M*. Разложим по нему* $\xi_k = \sum_{s=1}^n a_{k,s} \xi_{i_s}$ $(1 \leq k \leq N)$*, тогда матрица*

$$A_\Omega = (a_{p,q}) \tag{1}$$

вполне унимодулярна.

Если перенумеровать формы в X так, чтобы $i_k = k$, получится

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} \tag{2}$$

Пример 1. $\dim U = 1$, $\xi \neq 0$, $I = (U, \xi)$, $A_I = (1)$, $c(I) = 1$.

Пример 2. $\dim U = 1$, $\xi \neq 0$, $\Omega = (U, \xi, \xi \ldots, \xi)$ *(N раз),*

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega) = N. \tag{3}$$

Пример 3. $\dim U = 2$, $N = 3$,

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega) = 3. \tag{4}$$

Определение 4. *Пусть* $\Omega = (U, \xi_1, \dots, \xi_N)$ *и* $\Omega' = (U', \xi'_1, \dots, \xi'_{N'})$ — *две унимодулярные системы, их* **прямая сумма** *это* $\Omega \oplus \Omega' = (U \oplus U', \xi_1, \dots, \xi_N, \xi'_1, \dots, \xi'_{N'})$.

$$A_{\Omega\oplus\Omega'} = \begin{pmatrix} A_\Omega & 0 \\ 0 & A_\Omega \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega \oplus \Omega') = c(\Omega)c(\Omega'). \quad (5)$$

Основная конструкция

По унимодулярной системе $\Omega = (U, \xi_1, \dots, \xi_N)$ ($\dim U = n$) строим:

- евклидово пространство W_Ω, $\dim W_\Omega = n$;
- целочисленную решетку $L_\Omega \subset W_\Omega$, $\operatorname{rank} L_\Omega = n$;
- многогранник $\Delta_\Omega \subset W_\Omega$.

Рассмотрим $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$, со стандартным базисом

$$\begin{gathered} h_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ h_N = (0, 0, \dots, 1) \end{gathered}$$

и стандартным скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ (где $x = \sum x_i h_i$, $y = \sum y_i h_i$).

Определим отображение $\Phi_\Omega : U \to \mathbb{R}^N$,
$\Phi_\Omega(u) = (\xi_1(u), \dots, \xi_N(u))$.

Положим $W_\Omega = \Phi_\Omega(U) \subset \mathbb{R}^N$, $L_\Omega = W_\Omega \cap \mathbb{Z}^N$ — целочисленная решетка.

Предложение 2. *Отображение Φ_Ω инъективно, решетка L_Ω имеет ранг n и дискриминант $d(L_\Omega) = c(\Omega)$.*

По сути мы построили изоморфную копию унимодулярной системы внутри стандартного $\mathbb{R}^N$, линейными формами в которой являются ограничения координатных функций $x_i|_{W_\Omega}$:

$(W_\Omega, x_1|_{W_\Omega}, \dots, x_N|_{W_\Omega})$ является унимодулярной системой, изоморфной Ω.

Для простоты сохраним прежние обозначения для линейных форм в нашей унимодулярной системе, т.е. для $w \in W_\Omega$ будем обозначать

$$\xi_i(w) := x_i|_{W_\Omega}(w)$$

Замечание. Все это можно было сделать без отображения Φ_Ω, не выходя за пределы U — достаточно было ввести на U скалярное произведение $\langle u, u' \rangle_U = \sum_{i=1}^N \xi_i(u)\xi_i(u')$ и рассмотреть в U решетку $M^* \subset U$, двойственную к решетке в $M \subset U^*$, порожденной линейными функциями $\xi_1, \ldots, \xi_N \in U^*$. Отображение Φ_Ω является изометрией евклидовых пространств $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ и $(W_\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, причем решетка $L_\Omega = \Phi_\Omega(M^*)$.

Многогранник $\Delta_\Omega \subset W_\Omega$ задается неравенствами $|\xi_i(w)| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, N$. Т.е. Δ_Ω это пересечение W_Ω со стандартным кубом $[-1;1]^N \subset \mathbb{R}^N$.

Предложение 3. *Свойства многогранника* Δ_Ω*:*

- *вершины* Δ_Ω *— точки решетки* L_Ω *с координатами* 0 *или* ± 1*;*
- Δ_Ω *центрально симметричен относительно 0.*
- *гиперграни максимальной размерности многогранника* Δ_Ω *задаются уравнениями* $\xi_i(w) = \pm 1$*, т.е. многогранник* Δ_Ω *рефлексивен;*
- *множество пар параллельных гипергарней максимальной размерности находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством* $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$*;*
- *если все* $\xi_1, \ldots, \xi_N$ *разные, и* w *— вершина* Δ_Ω*, то* $w^2 = k \Leftrightarrow$ *вершина* w *лежит на ровно* k *гипергранях максимальной размерности;*
- *если* $\Omega = \Omega' \oplus \Omega''$*,* $\Delta_\Omega = \Delta_{\Omega'} \times \Delta_{\Omega''}$*. В частности,* $\Delta_{\Omega \oplus I} = \Delta_\Omega \times [-1;1]$*.*

Пример 3, продолжение. $\dim U = 2$, $N = 3$,

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega) = 3. \tag{6}$$

Т.е. $\xi_1(u_1, u_2) = u_1, \xi_2(u_1, u_2) = u_2, \xi_3(u_1, u_2) = -u_1 - u_2$, откуда $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.

$\Phi_\Omega : U \to \mathbb{R}^3$, поэтому
$W_\Omega = \Phi_\Omega(U) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,
L_Ω — гексагональная решетка A_2.

Δ_Ω — правильный шестиугольник, выпуклая оболочка шести корневых векторов.

Пример 2, продолжение. $\dim U = 1$, $\xi \neq 0$, $\Omega = (U, \xi, \xi \ldots, \xi)$ (N раз),

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega) = N.$$

$W_\Omega = \Phi_\Omega(U) = \{(x, x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^N \mid x \in \mathbb{R}\}$ — прямая в $\mathbb{R}^N$, $L_\Omega = \{(x, x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^N \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\Delta_\Omega = [(-1, -1, \ldots, -1); (1, 1, \ldots, 1)]$.

$c(\Omega) = N = |(1, 1, \ldots, 1)|^2$, вершина $(1, 1, \ldots, 1)$ лежит на N (совпавших) гранях с уравнением $\xi = 1$.

Двойственность. Мы рассматриваем Ω как унимодулярную систему координатных функций $\xi_1, \ldots, \xi_N$ на $\mathbb{R}^N$, ограниченных на W_Ω, т.е. $\Omega = (W_\Omega, \xi_1, \ldots, \xi_N)$, где мы используем обозначение $\xi_i = x_i|_{W_\Omega}$.

Рассмотрим ортогональное дополнение

$$W_\Omega^\perp = \{z \in \mathbb{R}^N,\ \langle w, z\rangle = 0\ \forall w \in W_\Omega\} \tag{7}$$

и ограничения координатных функций $x_1, \ldots, x_N$ на него, положим $\eta_i = x_i|_{W_\Omega^\perp}$.

Предложение 4. *1) η_i является нулевой функцией на $W_\Omega^\perp$ тогда и только тогда, когда ξ_i порождает прямое слагаемое в Ω изоморфное I.*
2) Если $\Omega = \Omega' \oplus I^s$, где Ω' не содержит прямых слагаемых I, то $W_\Omega^\perp = W_{\Omega'}^\perp$.

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_{N'}$ — все ненулевые функции η_i $(N' \leqslant N)$.

Предложение 5. *1) $\Omega^\perp = (W_\Omega^\perp, \eta_1, \ldots, \eta_{N'})$ является унимодулярной системой, причем*
$L_{\Omega^\perp} = W_\Omega^\perp \cap \mathbb{Z}^N, \quad \Delta_{\Omega^\perp} = W_\Omega^\perp \cap [-1;1]^N.$
2) $(\Omega^\perp)^\perp = \Omega'$ (см п.2 предложения 4).
3) $c(\Omega) = c(\Omega^\perp)$.

Двойственность на языке матриц. Если в качестве базиса выбрать $\xi_1, \ldots, \xi_1$, то разложение по нему всех $\xi_k = \sum_{s=1}^n a_{k,s}\xi_{i_s}$ $(1 \le k \le N)$ даст вполне унимодулярную матрицу

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} \tag{8}$$

Тогда

$$A_{\Omega^\perp}^T = \begin{pmatrix} E & A \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пример 2, продолжение. $\dim U = 1$, $\xi \neq 0$, $\Omega = (U, \xi, \xi, \ldots, \xi)$ (N раз),

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c(\Omega) = N.$$

$W_\Omega = \Phi_\Omega(U) = \{(x, x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^N \mid x \in \mathbb{R}\}$ — прямая в $\mathbb{R}^N$, $L_\Omega = \{(x, x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^N \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\Delta_\Omega = [(-1, -1, \ldots, -1); (1, 1, \ldots, 1)]$.

$W_\Omega^\perp = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \sum x_N = 0\}$

$L_{\Omega^\perp} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{Z}^N \mid \sum x_N = 0\}$

— решетка корней A_{N-1}.

Многогранник $\Delta_{\Omega^\perp}$ имеет $2N$ гиперграней, задаваемых уравнениями $x_i = \pm 1$ — это пересечение двух центально симметричных симплексов $P_1 \ldots P_N$ и $-P_1 \ldots P_N$, где $P_k = (-1, -1, \ldots, -1, N-1, -1, \ldots, -1)$.

При $N = 4$ $\Delta_{\Omega^\perp}$ это октаэдр, его вершины имеют квадрат 4, а корни (с квадратом 2) — это середины ребер.

Короткие векторы в решетках L_Ω.

- В решетке L_Ω имеется вектор с квадратом 1 $\Leftrightarrow$ $\Omega = \Omega' \oplus I$.
- Если Ω содержит кратные элементы (т.е. $\xi_{k_1} = \xi_{k_2} = \ldots = \xi_{k_{m+1}}$), то в решетке двойственной системы $L_{\Omega^\perp}$ содержится корневая подрешетка типа A_m.
- Пусть в L_Ω нет векторов с квадратом 1. Подрешетка в L_Ω, порожденная векторами с квадратом 2 (корнями), изоморфна прямой сумме решеток типа A_{m_i}, причем каждому слагаемому A_{m_i} сответствуют $m_i + 1$ кратный элемент в двойственной унимодулярной системе $\Omega^\perp$ (т.е. $\eta_{k_1} = \eta_{k_2} = \ldots = \eta_{k_{m_i+1}}$).
- "Общий случай": Ω не содержит кратных элементов $\Rightarrow \forall z \in L_{\Omega^\perp}$, $z \neq 0$, $z^2 \geqslant 3$.

Графы.

Пусть Γ связный граф, $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество ребер, $|E(\Gamma)| = N$, $|V(\Gamma)| = m$. Зафиксируем произвольную ориентацию на ребрах Γ.

Тогда матрица инциденции I_Γ является вполне унимодулярной матрицей ранга $n-1$:

$$(I_\Gamma)_{p,q} = i(e_p, v_q), \quad \text{где .} \tag{10}$$

$$i(e,v) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad \circ \xrightarrow{\;\;e\;\;} \overset{v}{\bullet} \\ -1 & \text{если} \quad \overset{v}{\bullet} \xrightarrow{\;\;e\;\;} \circ \\ 0 & \text{если} \quad e \text{ и } v \text{ не инцидентны} \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим пространства 0-цепей

$$C_0(\Gamma, \mathbb{R}) = \{ \sum_{v \in V(\Gamma)} a_v \cdot v, \quad a_v \in \mathbb{R} \}, \quad \dim C_0(\Gamma, \mathbb{R}) = m \tag{12}$$

и 1-цепей

$$C_1(\Gamma, \mathbb{R}) = \{ \sum_{e \in E(\Gamma)} b_e \cdot e, \quad b_e \in \mathbb{R} \}, \quad \dim C_1(\Gamma, \mathbb{R}) = N. \tag{13}$$

Граничный гомоморфизм

$$\partial : C_1(\Gamma, \mathbb{R}) \to C_0(\Gamma, \mathbb{R}) \tag{14}$$

задается своим действием на базисе: для $e \in E(\Gamma)$

$$\partial(e) = t(e) - s(e).$$

$$s(e) \xrightarrow{e} t(e)$$

$\operatorname{Ker} \partial = H_1(\Gamma, \mathbb{R}) = F_\Gamma$ — пространство потоков: если интерпретировать числа b_e как значения потока на графе Γ, то $\sum_{e \in E(\Gamma)} b_e \cdot e \in \operatorname{Ker} \partial_1$ означает, что $\forall\ v \in V(\Gamma)$

$$\sum_{e \in E(\Gamma)} i(e, v) b_e = 0. \tag{15}$$

— условие Кирхгоффа в вершине v; F_Γ задается в $C_1(\Gamma, \mathbb{R})$ $m - 1$ условием Кирхгоффа.

$$\dim F_\Gamma = N - m + 1.$$

В пространствах $C_0(\Gamma, \mathbb{R})$ и $C_1(\Gamma, \mathbb{R})$ зафиксированы базисы, следовательно, можно зафиксировать и соответствующие скалярные произведения, относительно которых эти базисы становятся ортонормированными, что позволяет отождествить их с двойственными к ним пространствами 0-коцепей $C^0(\Gamma, \mathbb{R}) = \{\varphi : V(\Gamma) \to \mathbb{R}\}$ и 1-коцепей $C^1(\Gamma, \mathbb{R}) = \{\psi : E(\Gamma) \to \mathbb{R}\}$, тогда сопряженный оператор

$$\partial^* : C_0(\Gamma, \mathbb{R}) \to C_1(\Gamma, \mathbb{R}), \quad \partial^*(v) = \sum_{e \in E(\Gamma)} i(e, v) \cdot e$$

можно интерпретировать как кограничный, т.е.

$$\delta : C^0(\Gamma, \mathbb{R}) \to C^1(\Gamma, \mathbb{R}), \quad \delta(\varphi)(e) = \varphi(t(e)) - \varphi(s(e)).$$

$$\overset{s(e)}{\bullet} \xrightarrow{\ e\ } \overset{t(e)}{\bullet}$$

Матрица оператора $\partial^* = \delta$ это в точности матрица инциденции ориентированного графа I_Γ

Пространство $C_1(\Gamma, \mathbb{R})$ является ортогональной прямой суммой

$$C_1(\Gamma, \mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \partial \oplus \operatorname{Im} \partial^*. \qquad (16)$$

Элементы пространства $G(\Gamma) = \operatorname{Im} \partial^* = \operatorname{Im} \delta$ можно интерпретировать как градиенты (конечно-разностные) функций на вершинах графа (т.е. $C^0(\Gamma, \mathbb{R})$), а градиенты, принимающие значения 0, ± 1 — как (ориентированные) разрезы.

$$\dim G(\Gamma) = m - 1.$$

В итоге имеем разложение в ортогональную прямую сумму

$$C_1(\Gamma,\mathbb{R}) = F_\Gamma \oplus G_\Gamma. \tag{17}$$

Каждое ребро $e \in E(\Gamma)$ задает координатную функцию на $C_1(\Gamma,\mathbb{R})$, будем ее обозначать тем же знаком e.

Предложение 6. *1) $\mathcal{F}_\Gamma = (F_\Gamma, E(\Gamma) \setminus \{мосты\})$ и $\mathcal{G}_\Gamma = (G_\Gamma, E(\Gamma) \setminus \{петли\})$ являются унимодулярными системами (называемыми, соответственно, графической и кографической).*

2) $L_{\mathcal{F}_\Gamma} = F_\Gamma \cap C_1(\Gamma,\mathbb{Z})$, $L_{\mathcal{G}_\Gamma} = G_\Gamma \cap C_1(\Gamma,\mathbb{Z})$.

3) $c(\mathcal{F}_\Gamma) = c(\mathcal{G}_\Gamma) = c(\Gamma)$ — сложность графа Γ (число остовных деревьев).

4) $\Delta_{\mathcal{F}_\Gamma}$ — выпуклая оболочка реберно-простых циклов. $\Delta_{\mathcal{G}_\Gamma}$ — выпуклая оболочка разрезов (ориентированных).

5) $\mathcal{F}_\Gamma^\perp = \mathcal{G}_{\Gamma'}$, где граф Γ' получен из Γ' стягиванием всех мостов.

$\mathcal{G}_\Gamma^\perp = \mathcal{F}_{\Gamma''}$, где граф Γ'' получен из Γ' удалением всех петель.

6) В частности, для графа без петель и мостов унимодулярные системы $\mathcal{F}_\Gamma$ и $\mathcal{G}_\Gamma$ двойственны друг другу.

7) Если Γ планарный граф, правильно вложенный в сферу, а $\widehat{\Gamma}$ — двойственный граф, то $\mathcal{F}_\Gamma = \mathcal{G}_{\widehat{\Gamma}}$ и $\mathcal{G}_\Gamma = \mathcal{F}_{\widehat{\Gamma}}$.

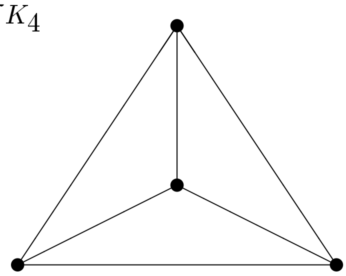
8) Кратные элементы $\mathcal{G}_\Gamma$ это кратные ребра, им соответствуют циклы длины 2 — корни решетки $L_{\mathcal{F}_\Gamma}$, а кратные элементы $\mathcal{F}_\Gamma$ это наборы ребер, каждая пара которых образует 2-разрез, эти 2-разрезы и являются корнями в решетке $L_{\mathcal{G}_\Gamma}$.

Пример, который уже был — обобщенный тэта-граф.

Пример 4. K_4 — полный граф на 4 вершинах — планарный самодвойственный, поэтому $\mathcal{F}_{K_4} = \mathcal{G}_{K_4}$, $\dim F_{K_4} = 3$, многогранник $\Delta_{\mathcal{F}_{K_4}}$ имеет 12 граней (т.к. в K_4 6 ребер), 6 вершин с квадратом 4 (3 цикла длиной 4, в двух направлениях каждый) и 8 вершин с квадратом 3 (4 треугольных цикла, в двух направлениях каждый).

Матрица Грама решетки $L_{\mathcal{F}_{K_4}}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$



дискриминант, т.е. $c(K_4) = 16$.

$L_{\mathcal{F}_{K_4}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \equiv y \equiv z \pmod 2\}$ — объемноцентрированная кубическая решетка A_3^*.

$\Delta_{\mathcal{F}_{K_4}}$ — ромбододекаэдр.

Пример 5. K_m — полный граф на m вершинах, $N = \frac{m(m-1)}{2}$.

$\dim G_{K_m} = m-1$, $L_{\mathcal{G}_{K_m}}$ — решетка A^*_{m-1} с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} m-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & m-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & m-1 \end{pmatrix},$$

дискриминант, т.е. $c(K_m) = m^{m-2}$ (теорема Кэли о помеченных деревьях).
$\Delta_{\mathcal{G}_{K_m}}$ — проекция стандартного куба $[0;1]^m$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ параллельно главной диагонали (с точностью до гомотетии).

$\dim F_{K_m} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Многогранник дважды стохастических матриц (многогранник Биркгофа):

$$B_m = \{(z_{i,j}) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid z_{i,j} \geqslant 0 \text{ и } \forall\, k \sum_i z_{i,k} = 1 \text{ и } \sum_j z_{k,j} = 1\}$$

$\pi : \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \to \wedge^2(\mathbb{R}^m)$ — проектирование параллельно $S^2(\mathbb{R}^m)$ (имеется ортогональное разложение $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m) = \wedge^2(\mathbb{R}^m) \oplus S^2(\mathbb{R}^m)$)

Предложение 7. *Пространство потоков F_{K_m} выделяется в $\wedge^2(\mathbb{R}^m)$ уравнениями $\sum_i z_{i,k} = 0$ при $k = 1, \ldots, m$, решетка $L_{\mathcal{F}_{K_m}}$ — это целочисленные матрицы в F_{K_m}, а $\Delta_{\mathcal{F}_{K_m}}$ — это (с точностью до гомотетии) $\pi(B_m)$.*

Пример 7. Первый пример унимодулярной системы, не являющейся ни графической, ни кографической (Bixby 1977, Seymour 1980). $N = 10$, $n = 5$. Имеется ровно $\binom{5}{2} = 10$ способов расставить в ряд две единицы и три нуля.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вполне унимодулярная матрица

$$R = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ψ — унимодулярная система Биксби-Сеймура.

Предложение 8. *1) Ψ самодвойственна и не является ни графической ни кографической.*

2) $c(\Psi) = 162$.

3) Многогранник Δ_Ψ является выпуклой оболочкой двух центрально-симметричных друг другу правильных симплексов, вершины которых имеют квадрат 10.

4) Решетка L_Ψ порождена серединами ребер этих симплексов с квадратом 4.

Целые точки многогранника: $\Delta_\Psi \cap L_\Psi$ состоит из

- 12 вершин симплексов с квадратами 10;
- 30 середин ребер с квадратами 4;
- 30 середин отрезков, соединяющих пары вершин разных симплексов с квадратами 6.

Определяется ли граф Γ унимодулярными системами $\mathcal{F}_\Gamma$ и $\mathcal{G}_\Gamma$?

- Если Γ — дерево, то $\mathcal{F}_\Gamma = \varnothing$ и $\mathcal{G}_\Gamma = I^n$.
- Если число вершинной связности графа Γ не менее 3, то **да.** ("Дискретная теорема Торелли" 2006)
- Если число вершинной связности графа Γ не менее 3, то $\mathrm{Aut}(L_{\mathcal{F}_\Gamma}) = \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Спиридонов 2019) и $\mathrm{Aut}(L_{\mathcal{G}_\Gamma}) = \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

БЛАГОДАРЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ!