О доказательствах существования некоторых многогранников с ромбическими вершинами и правильными гранями

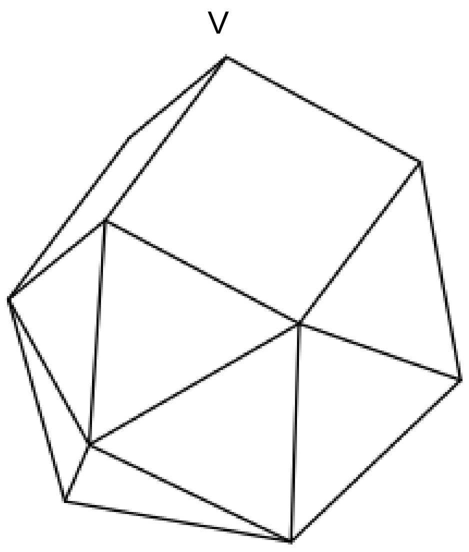
4.12.2024

Рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники в $\mathbf{E}^3$, множество граней каждого из которых можно разбить на два непустых непересекающихся множества --- множество граней, образующих гранные звёзды симметричных ромбических вершин, и множество правильных граней одного вида.

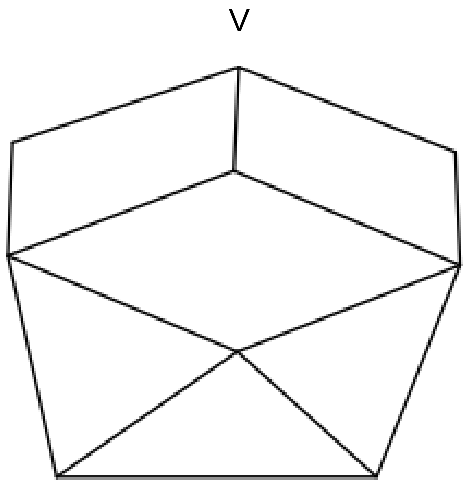
При этом вершина V многогранника называется ромбической, если гранная звезда Star(V) вершины V состоит из равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов).

Если вершина V расположена на такой оси L вращения звезды Star(V), что порядок оси L равен числу ромбов звезды Star(V), то вершина V называется симметричной. Для краткости такие многогранники называются RR-многогранниками.

В ходе доказательства основной теоремы о перечислении всех многогранников с ромбическими вершинами и правильными гранями, возникла необходимость доказывать существование двух многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной V.



a)



b)

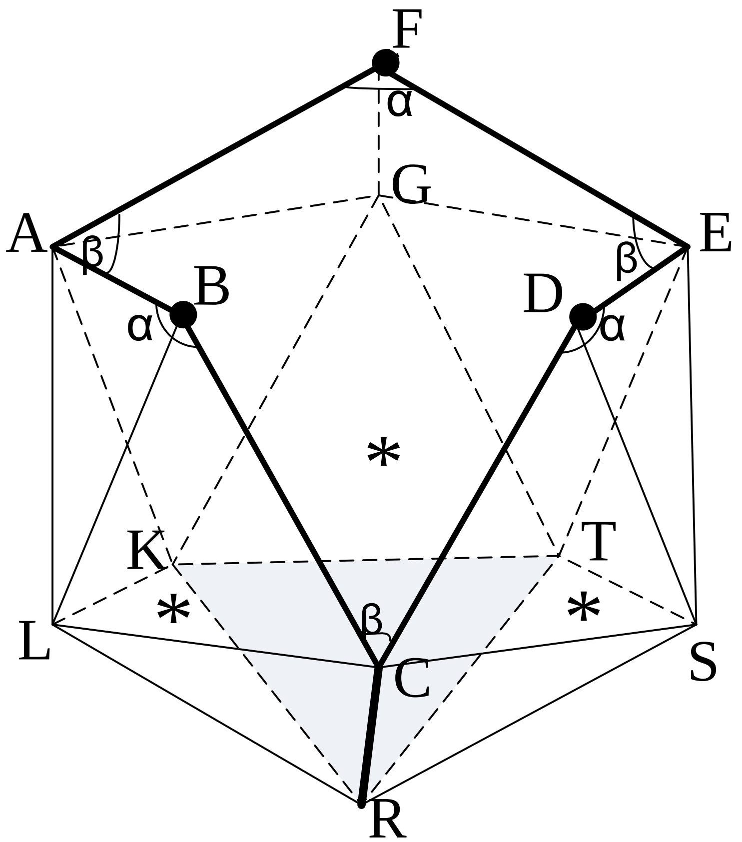
Теорема 1.

Существует RR-многогранник с девятнадцатью гранями, имеющий одну тупоугольную вершину.

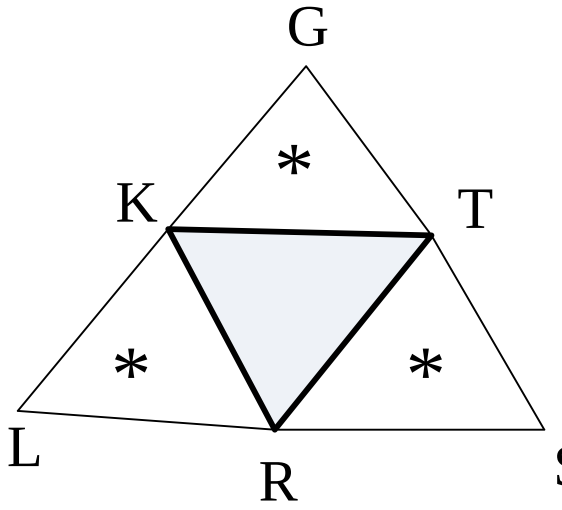
Доказательство Заметим, что для того, чтобы путём присоединения ромбов к граничной ломаной Γ достроить многогранник M до RR-многогранника с трёхгранной ромбической вершиной, должно выполняться условие: $\alpha = \beta$.

Таким образом, для существования требуемого RR-многогранника, необходимо доказать существование такого S-изгибания поверхности M, при котором будет обеспечено равенство $\alpha = \beta$.

Рассмотрим фигуру $KGTSCLR$, составленную из треугольника KTR и трёх треугольников, соседних с ним по сторонам, отдельно от поверхности M. При увеличении двугранных углов при рёбрах RT, TK, KR плоские углы LKG, GTS, SRL будут увеличиваться. Двугранные углы при рёбрах RC, TE, KA будут также увеличиваться. Если последние двугранные углы будут оставаться при этом увеличении не больше π, то возможно подклеивание в плоские углы LKG, GTS, SRL по паре треугольников. В силу леммы Коши, применённой к 5-гранным углам с вершинами K, T, R, двугранные углы при рёбрах TS, TG и им эквивалентных будут уменьшаться.



a)



b)

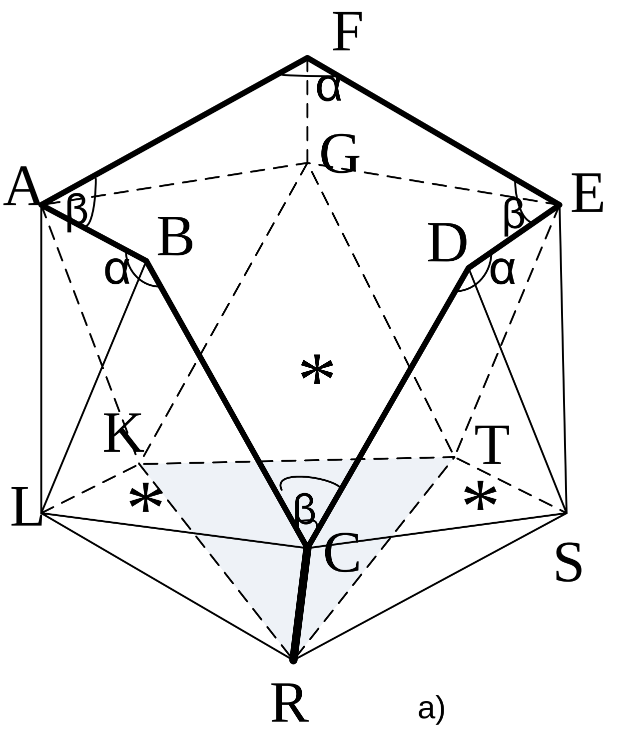
Рассмотрим вершину S. Так как по доказанному двугранные углы при рёбрах SR, ST должны уменьшаться, то плоский угол CSE будет уменьшаться и в него возможно подклеивание пары треугольников CDS и DSE.

Уменьшение плоского угла CSE имеет смысл рассматривать до значения $\frac{\pi}{3}$, так как при этом значении двугранные углы при рёбрах SC и ST будут равны π, то есть эти рёбра будут условными. Действительно, подклеивая треугольники CDS и DSE в этом случае, видим, что к четырёхугольной пирамиде

Аналогичное справедливо и для вершин G и L, эквивалентных S.

Итак, при указанном S-изгибании углы α уменьшаются. Покажем, что при этом углы β увеличиваются.

Как известно, если при деформации выпуклого многогранного угла, сохраняющей его выпуклость и неизменность его граней кроме одной грани, (обозначим её f), двугранные углы между неизменными гранями не убывают и хотя бы один из них возрастает, то плоский угол грани f возрастает.



а)

По доказанному в граничных вершинах C, E, A поверхности M все двугранные углы возрастают. Поэтому плоский угол между граничными рёбрами CB и CD возрастает; то же верно и для двух пар рёбер, эквивалентных этой паре. При сохранении выпуклости $\min\alpha = 60^\circ$ достигается при распрямлении двугранных углов при рёбрах CL, CS, CR. При этом распрямлении $\max\beta \approx 119,17^\circ\ldots$, а $\max\widehat{CR} \approx 169,47^\circ\ldots$.

Таким образом, указанное выше изгибание следует проводить при условиях: $60^\circ < \alpha < 108^\circ$, $60^\circ < \beta < 119,17^\circ$.

Используя уравнение, связывающее между собой углы α и β, получим приближённое значение острого угла ромба: $\alpha \approx 91,4397^\circ$.

$$\cos\beta = \cos^2\theta +$$

$$+\sin^2\theta\; cos\left(2\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\,\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

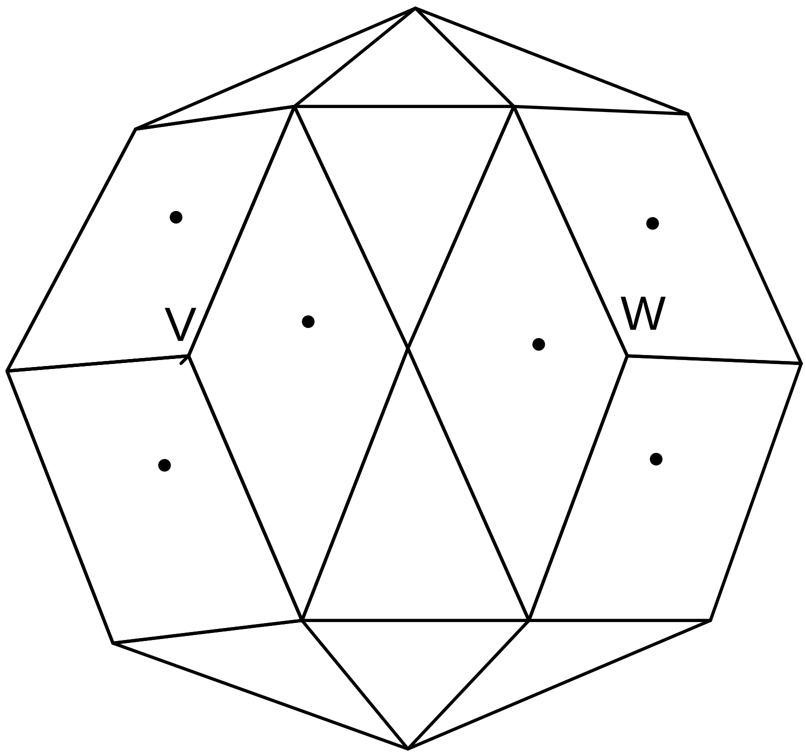
где:

$$\cos\theta = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

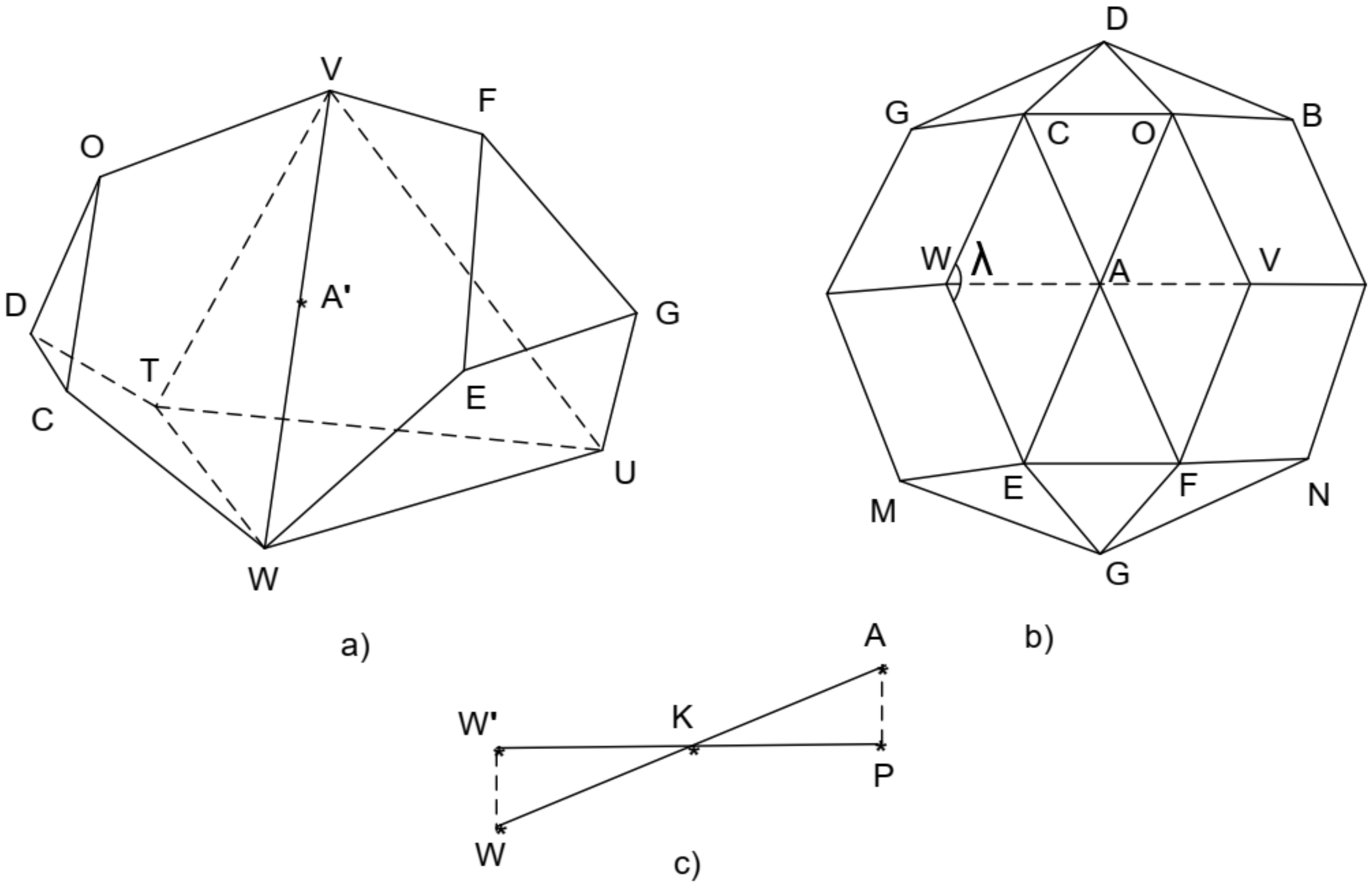
Эта формула даёт необходимую связь величин углов α и β.

Теорема 2.

Существует RR-многогранник первого типа с четырьмя тупоугольными ромбическими вершинами, имеющий тетраэдральную симметрию.



Рассмотрим правильный тетраэдр $VTWU$ с ребром длины 2, рисунок 4.4, а). На каждой грани этого тетраэдра надстроим четыре тетраэдра, равные $VTWU$. От каждого из надстроенных тетраэдров отсечём тетраэдры с единичными рёбрами так, что на гранях тетраэдра $VTWU$ окажутся построенными усечённые тетраэдры, два из которых, $TVWCDO$ и $UVWFEG$, изображены на рисунке 4.4, а).

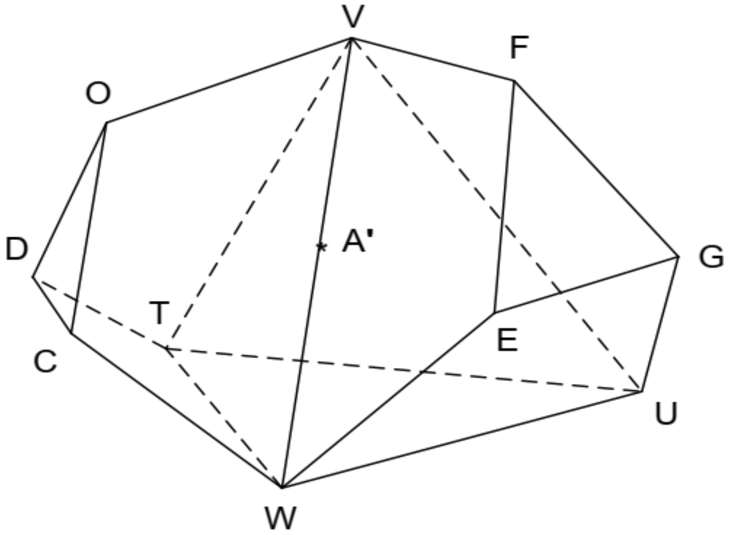


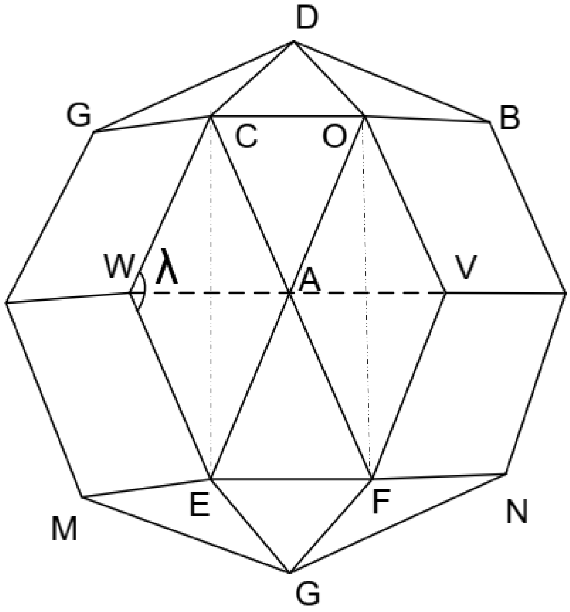
Пусть WV одно из рёбер полученного невыпуклого многогранника M, общее для двух усечённых тетраэдров. Найдём величину плоского угла $\widehat{CWE}$ и равного ему угла $\widehat{OVF}$, которые обозначим λ. Рассмотрим трёхгранный угол $\widehat{WCVU}$, для которого имеем: $\cos\lambda = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{3} cos\,\widehat{\phi}$,

где $\widehat{\phi}$ — тупой двугранный угол с ребром WV. Так как двугранный угол тетраэдра равен $\arccos\dfrac{1}{3}$, то из рисунка 4.4, а) видим: $\widehat{\phi} = 2\pi - 3\arccos\dfrac{1}{3}$. Поэтому из (2) находим: $\cos\lambda = 0,25 + 0,75\cos\widehat{\phi} \approx 0,5 + 0,75\cos 148,4136619^\circ \approx -0,388888$, $\lambda \approx 112,88538^\circ$.

Из построения следует, что каждая из граней — равнобедренных трапеций — $COVW$ и $FEWV$ составлена из трёх правильных треугольников, два из которых имеют общую вершину A' в середине ребра WV.

Рассмотрим прямоугольник $COFE$. Обозначим α равные углы, которые треугольники COA' и FEA' составляют с плоскостью прямоугольника $COFE$.





Повернём треугольники COA' и FEA' около рёбер CO и FE на угол 2α. результате поворота получим два правильных треугольника COA и FEA с общей вершиной, которую обозначим A. Очевидно, A' является проекцией точки A на ребро WV.

Покажем, что 4-угольник $WCAE$ является ромбом, рисунок 4.4, b).

Проведём плоскость (π), содержащую прямоугольник $COFE$. Обозначим W' и P проекции точек соответственно W и A на плоскость (π). Пусть K — середина отрезка CE. Имеем: $|W'K| = |KP|$, $|WW'| = |AP|$. Следовательно, отрезок AW пересекает отрезок $W'P$ в точке K, рисунок 4.4, c); значит, отрезки CE и WA пересекаются в точке K Поэтому четыре точки C, E, W, A принадлежат одной плоскости. Так как 4-угольник $WCAE$ равносторонний, то он является ромбом.

Точно так же, 4-угольник $AOVF$ является ромбом.

Проводя такие же рассуждения для остальных пяти рёбер многогранника M, являющихся общим ребром пар трапециевидных граней, получаем RR-многогранник первого типа с правильными треугольными гранями и с четырьмя ромбическими вершинами V, T, W, U. В каждой из этих вершин ромбы сходятся своими тупыми углами $\lambda \approx 112,88538°$.