О существовании и полноте списков двух классов многогранников с «ромбическими вершинами»

Субботин В.И.

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И.Платова

Ромбическая вершина — это такая вершина V, звезда $Star(V)$ ("ромбическая звезда") граней которой состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V.

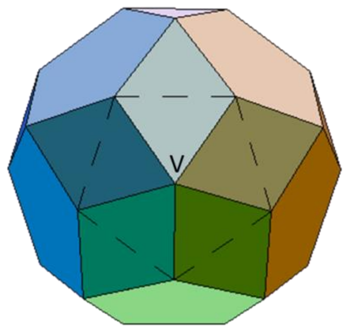
Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V (а также и $Star(V)$) называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами. Предполагается, что ромбы различных ромбических звёзд не имеют общих сторон, но могут иметь общие вершины. В последнем случае ромбические вершины (или звёзды вершин) называются *неизолированными.*

Определение 1. Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником (от слов rhombic и regular), если множество его граней состоит из двух непустых непересекающихся множеств — множества равных симметричных ромбических звёзд без общих рёбер и множества правильных граней.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\pi(n-2)}{2n}}.$$

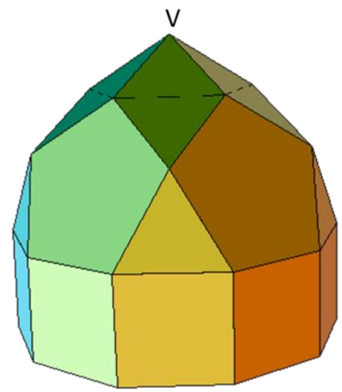
P-2,31 (S-24)

para-augmented pentagonal rotunda



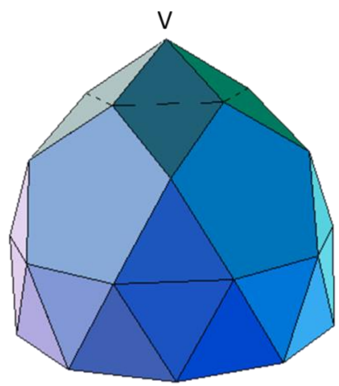
P3,22 S40

elongated para-augmented pentagonal rotunda



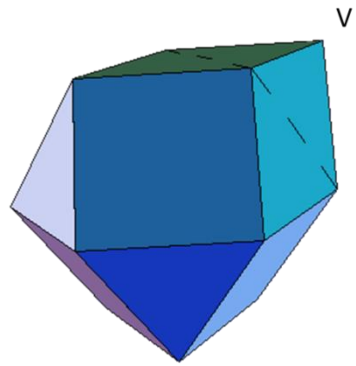
P3,31 S41

gyroelongated para-augmented pentagonal rotunda



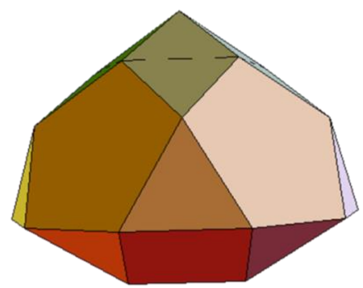
P3,34 (S18)

augmented cuboctahedron



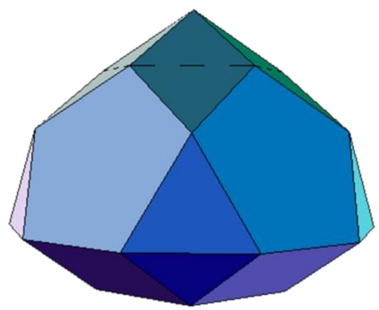
P3,42 S25

para-augmented pentagonal gyrocupolarotunda



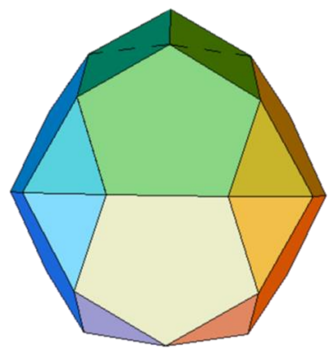
P3,43 S26

para-augmented pentagonal orthocupolarotunda



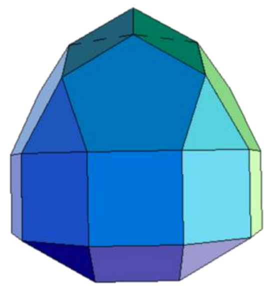
P3,44 S28

para-augmented pentagonal orthobirotunda



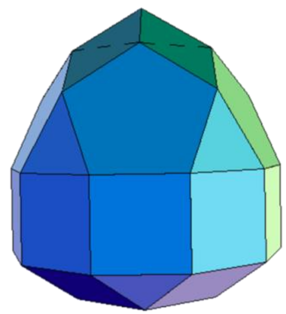
P4,5 S31

elongated para-augmented pentagonal orthocupolarotunda



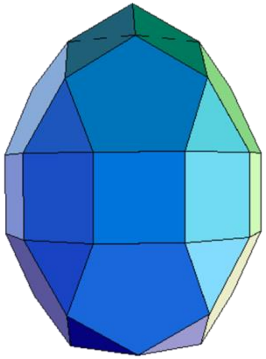
P4,6 S32

elongated para-augmented pentagonal gyrocupolarotunda



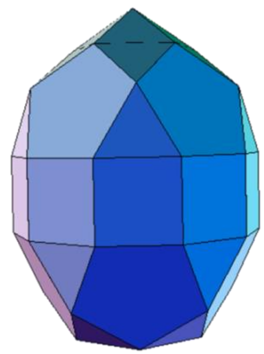
P4,7 S33

elongated para-augmented pentagonal orthobirotunda



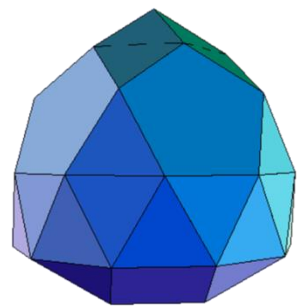
P4,8 S34

elongated para-augmented pentagonal gyrobirotunda



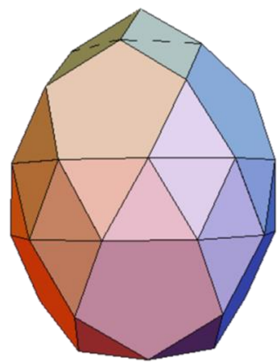
P4,9 S37

gyroelongated para-augmented pentagonal cupolarotunda



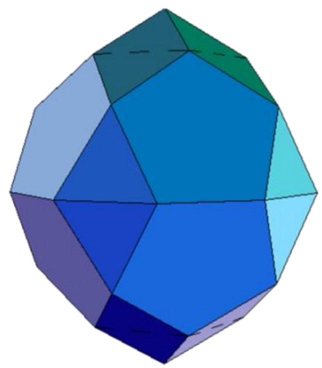
P4,10 S38

gyroelongated para-augmented pentagonal birotunda



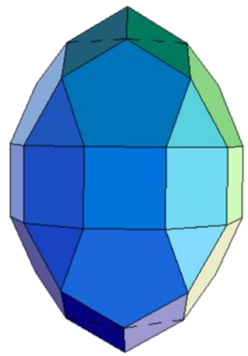
P4,22 S30

parabiaugmented pentagonal orthobirotunda



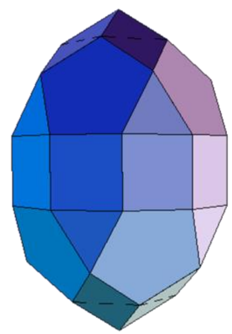
P5,1 S35

elongated parabiaugmented pentagonal orthobirotunda



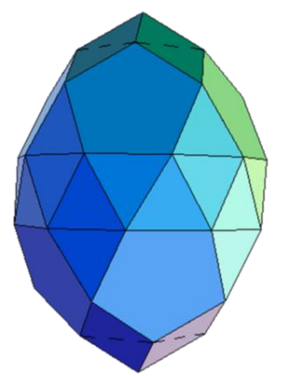
P5,2 S36

elongated parabiaugmented pentagonal gyrobirotunda



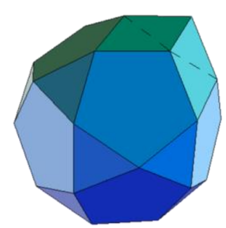
P5,3 S39

gyroelongated parabiaugmented pentagonal birotunda



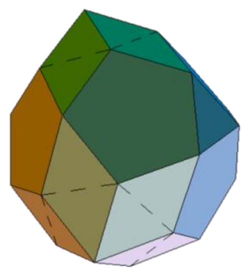
P3,40 S27

augmented icosidodecahedron



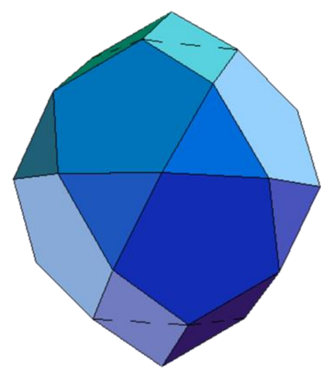
P4,16 S44

metabiaugmented icosidodecahedron



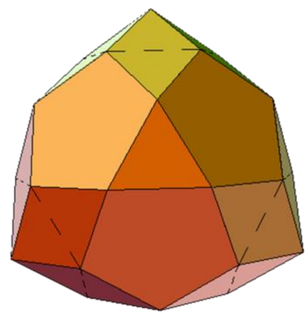
P4,18 S29

parabiaugmented icosidodecahedron



P5,4 S45

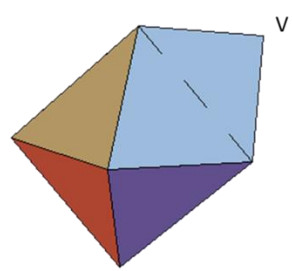
triaugmented icosidodecahedron



Дополнительные (ромб с углом 60 градусов)

P3,33 (S15)

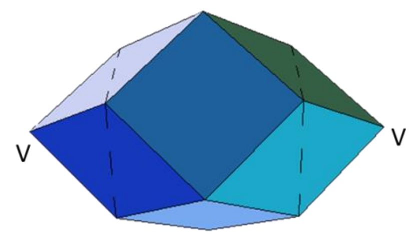
augmented octahedron,
trirhomb



наращённый октаэдр

P4,13 S21

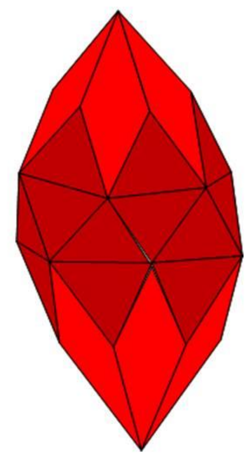
biaugmented cuboctahedron,
octarhombi expanded cuboctahedron (GZ)



Дважды наращённый кубооктаэдр

•

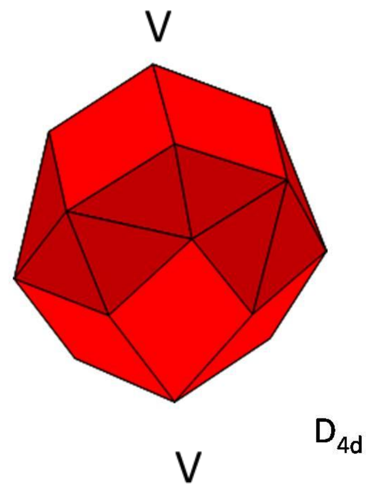
RR - многогранники



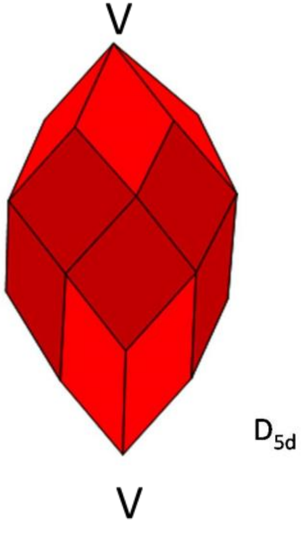
D_{nd}

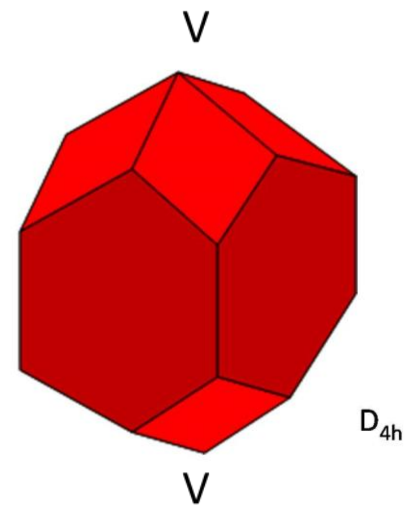
$5 < n < 12$

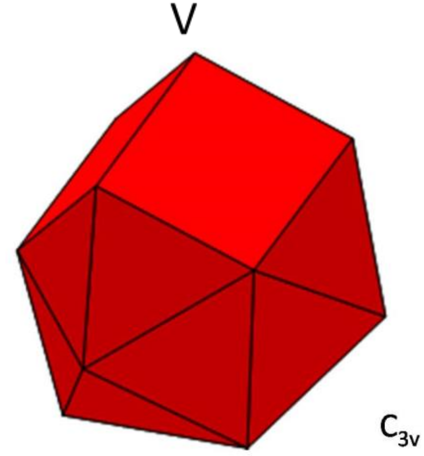
$n \neq 5!$


V
V
D_{4d}

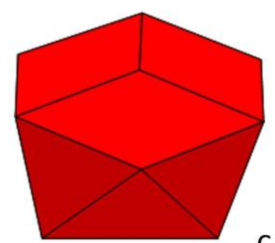
•


V
V
D_{5d}


V
V
D_{4h}


V
C_{3v}

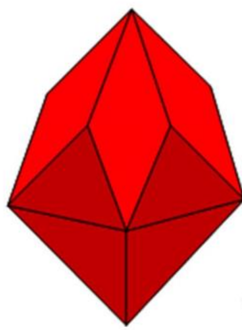
V



C_{3v}

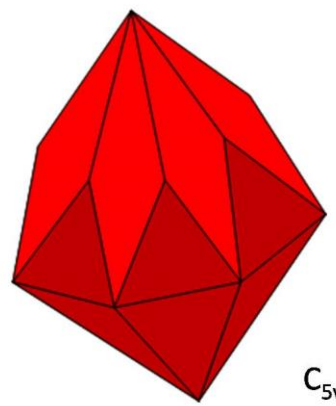
.

V

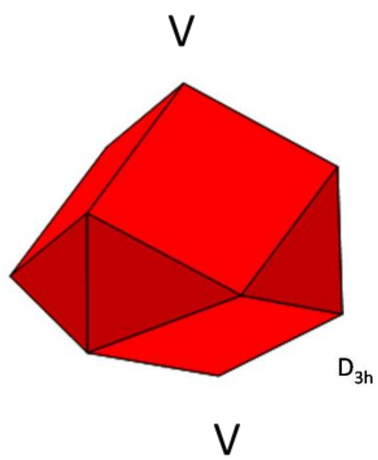


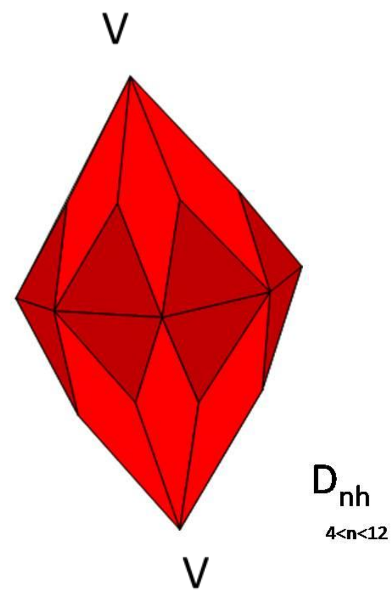
C_{4v}

V



C_{5v}

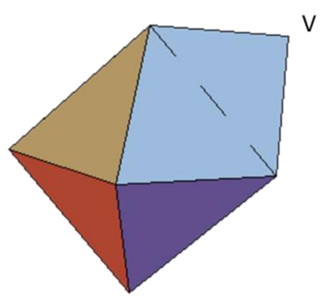

V
V
D_{3h}


V
V
D_{nh}
4<n<12

Дополнительные (ромб с углом 60 градусов)

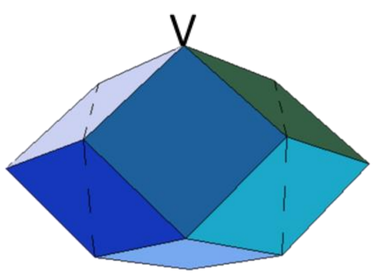
P3,33 (S15)

augmented octahedron,
trirhomb



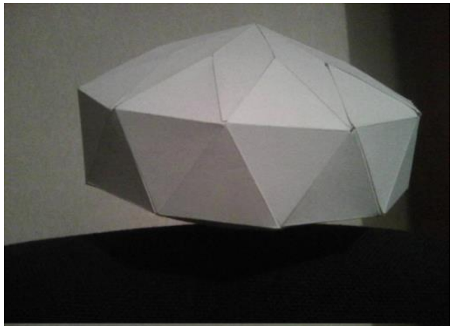
P4,13 S21

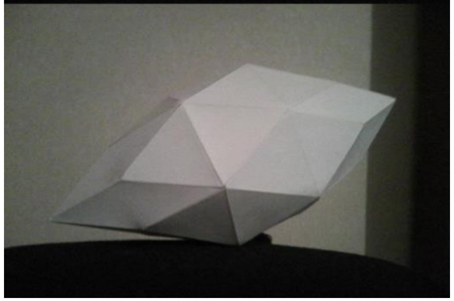
biaugmented cuboctahedron,
octarhombi expanded cuboctahedron (GZ)



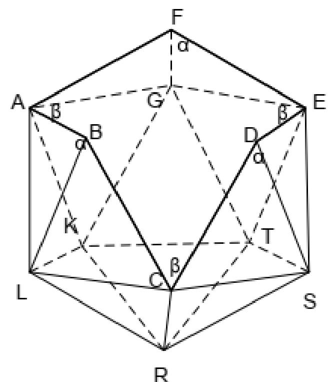
наращённый октаэдр

Дважды наращённый кубооктаэдр

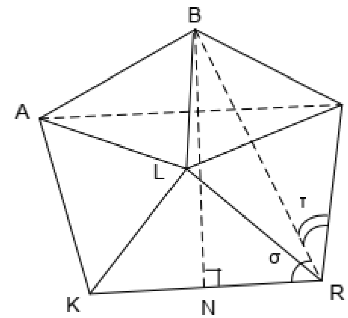




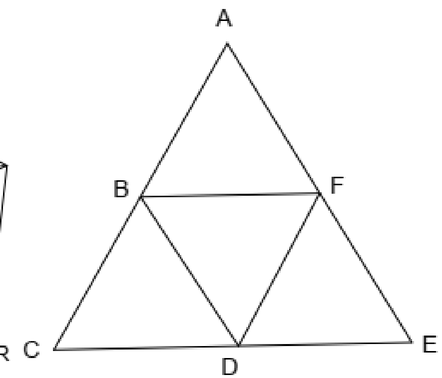
Пример доказательства существования и единственности RR-многогранника первого типа



a)



b)



c)

$$\cos\beta = \cos^2\theta +$$

$$+\sin^2\theta\, cos\left(2\mathrm{sign}\,\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\,\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

где:

$$\cos\theta = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

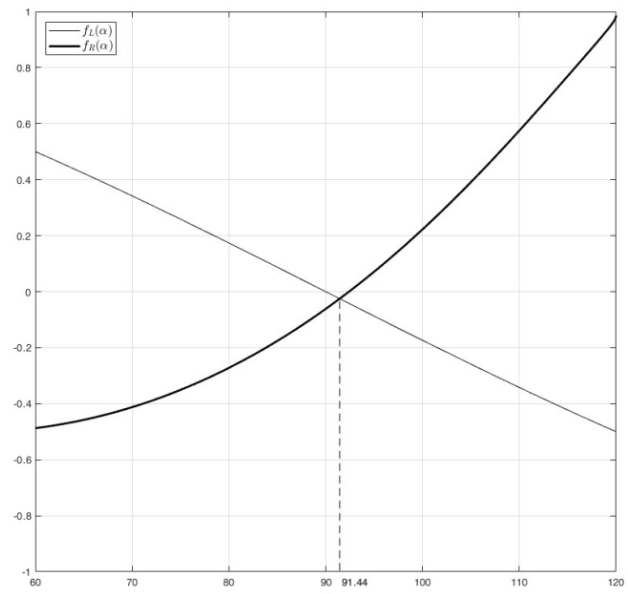


Рис. 2: Графическое решение уравнения

Положив в формуле (10) $\beta = \alpha$ и решая полученное уравнение относительно α, получим приближённое значение тупого угла ромба в градусах: $\alpha \approx 91,4397°$.

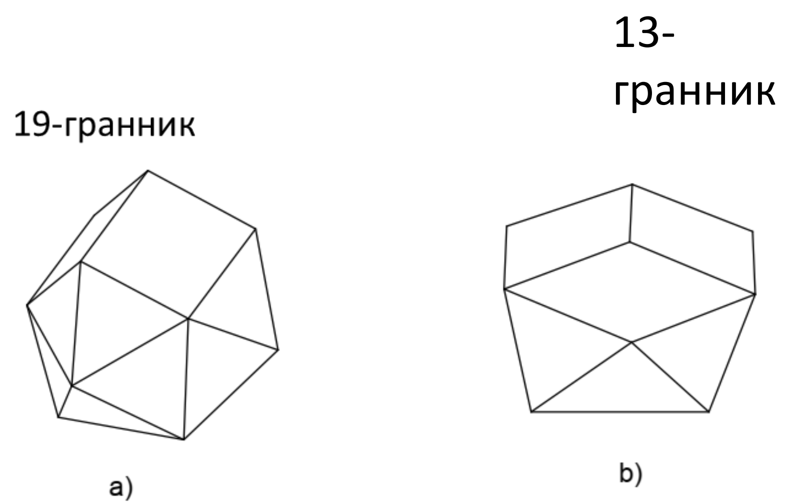


Рис. 3: RR-многогранники с тупоугольной ромбической вершиной

Теорема.

Существуют только двадцать три RR-многогранника первого типа

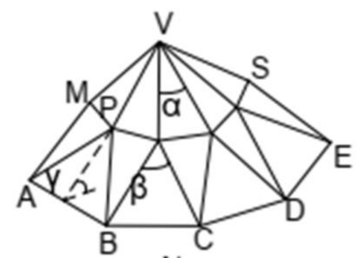
RR-МНОГОГРАННИКИ ВТОРОГО ТИПА

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов.

Если поместить в свободные углы n-ромбической звезды правильные треугольные грани, то получим многогранную поверхность — *ромбическую шапочку*. Приклеивая к границе шапочки правильный n-угольник, получим выпуклый многогранник, который удобно назвать *n-ромбической пирамидой.*

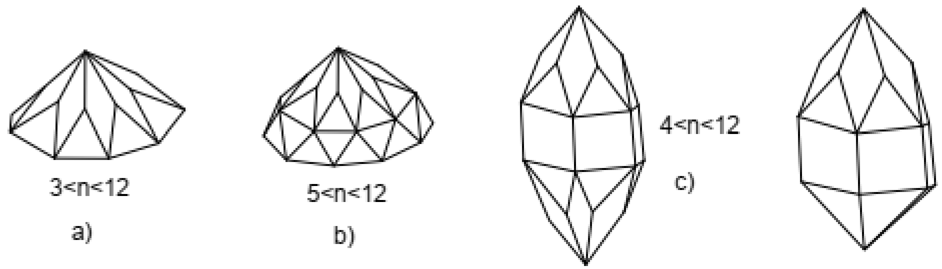
Составным будем называть такой RR-многогранник второго типа, который можно разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

«Ромбическая пирамида»



Теорема 1. *Существуют только пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа.*

Составные RR-многогранники второго типа



$3<n<12$

a)

$5<n<12$

b)

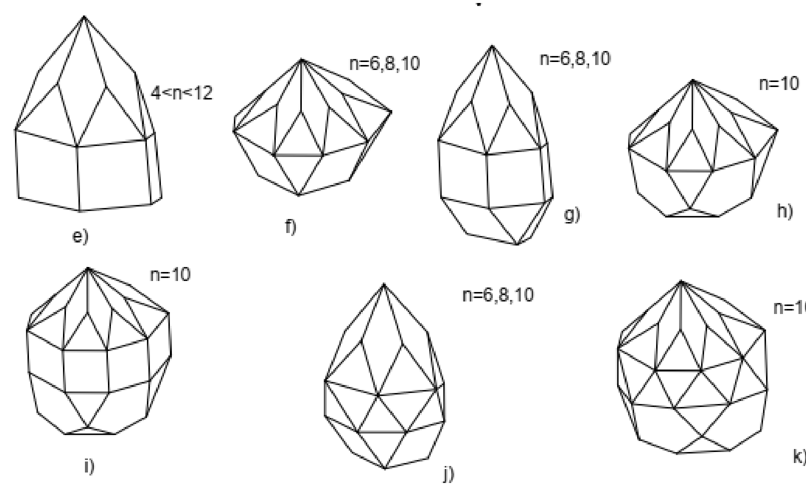
$4<n<12$

c)

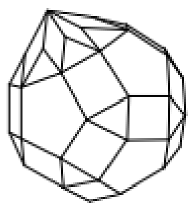
$n=5$

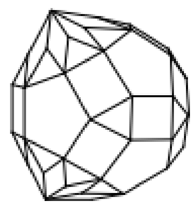
d)

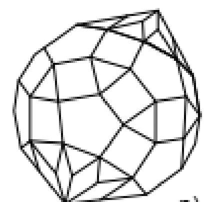
Составные RR-многогранники второго типа

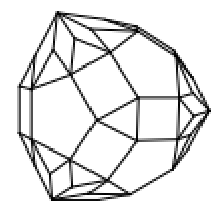


Составные RR-многогранники второго типа


l)


m)


n)


o)

Ромбические ромбоикосододекаэдры: 1)–13)

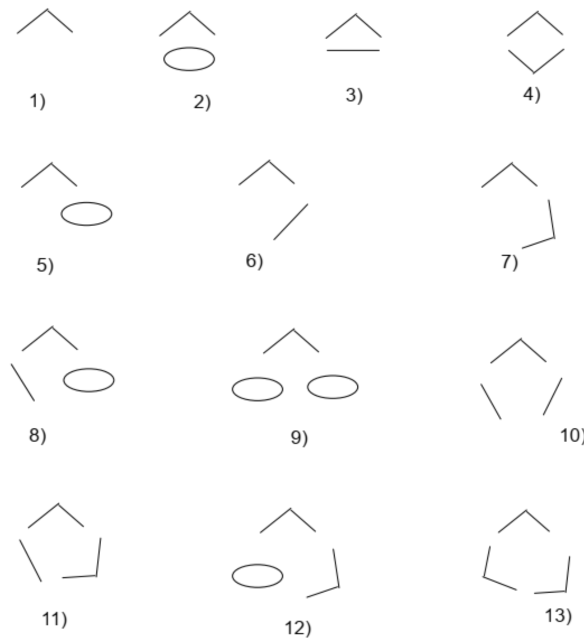


Рис. 2: Ромбические ромбоикосододекаэдры: 1)–13).

На Рис.2 условно изображены схемы присоединения ромбических пирамид (в форме угла), скручиваний куполов (в виде овала) и отсечений куполов (в виде отрезка прямой).

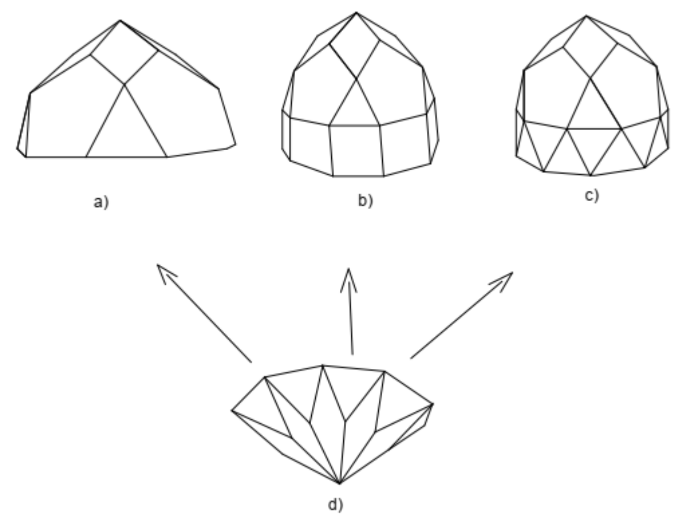
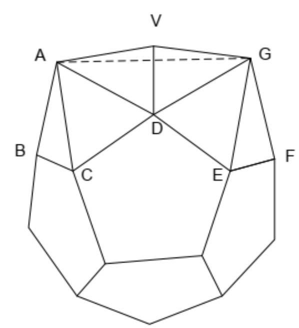


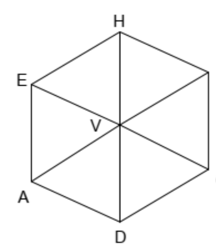
Рис. 4. К Замечанию 1: a) – удлинённая 5-угольная ротонда; b), c) – многогранники на основе удлинённой 5-угольной ротонды; d) – 10-ромбическая пирамида

Таким образом, в отличие от RR-многогранников первого типа многогранники второго типа могут содержать такие симметричные ромбические вершины, что ромбы одной из них не равны ромбам другой вершины.

Многогранник, связанный с додекаэдром.

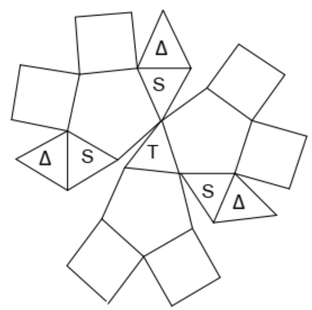


а)

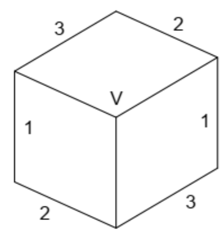


б)

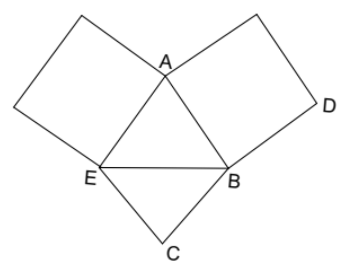
Многогранник, связанный с икосододекаэдром.



а)



б)



в)

1)Subbotin V.I. «On the composite RR-polyhedra of the second type.»
\\ Siberian Mathematical Journal, 2023, Vol.64, No.2, pp.500–506.

2)Субботин В.И. «О существовании и полноте перечисления трёхмерных RR-многогранников», \\ Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.--2022.--Т.216.--С.~106--115