СЕМИНАР ПО ДИСКРЕТНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

Россия, Москва, 23 апреля, 2025

Соколова Галина Константиновна
аспирант, g.sokolova@g.nsu.ru
Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОЛИНОМОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ УЗЛОВ

Положим, что $\mathscr{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Определение 1

Сопровождающая матрица C_g *унитарного полинома*

$$g(t) = t^n + g_{n-1}t^{n-1} + \ldots + g_1 t + g_0 \in \mathscr{R}[t],$$

определяется как матрица порядка n вида

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \ldots & -g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Полином $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ является как *характеристическим полиномом* так и *минимальным полиномом* для сопровождающей матрицы C_g.

Сопровождающая матрица

Положим, что $\mathscr{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Определение 1

Сопровождающая матрица C_g *унитарного полинома*

$$g(t) = t^n + g_{n-1}t^{n-1} + \ldots + g_1 t + g_0 \in \mathscr{R}[t],$$

определяется как матрица порядка n вида

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \ldots & -g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.

1. Не каждая квадратная матрица подобна сопровождающей матрице.

2. Любая квадратная матрица подобна блочно-диагональной матрице, диагональными блоками которой являются некоторые сопровождающие матрицы (*фробениусова форма*).

Положим, что $\mathscr{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Определение 1

Сопровождающая матрица C_g унитарного полинома

$$g(t) = t^n + g_{n-1}t^{n-1} + \ldots + g_1 t + g_0 \in \mathscr{R}[t],$$

определяется как матрица порядка n вида

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \ldots & -g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.

3. Л.Н. Васерштейн и Э. Уиланд [1] показали, что произвольная матрица подобна произведению двух матриц, каждая из которых подобна сопровождающей матрице.

[1] Vaserstein L.N., Wheland E. Commutators and Companion Matrices over Rings of Stable Rank 1 // Linear Algebra and its Applications. 1990. V. 142. P. 263–277.

Положим,

- $\mathscr{R}$ — коммутативное кольцо с единицей;
- $f(t) \in \mathscr{R}[t]$ — произвольный полином;
- $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ — унитарный полином степени $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$;
- $C_g \in \mathscr{R}^{n\times n}$ — сопровождающая матрица полинома $g(t)$.

Замечание 2.

Матричные полиномы $f(C_g)$ над кольцом $\mathscr{R}$ образуют коммутативное кольцо, которое называется *сопровождающим кольцом* полинома $g(t)$ и обозначается как $\mathscr{R}_g$.

1. [a]Если $g(t) = t^n$, тогда $\mathscr{R}_g$ коммутативное кольцо верхнетреугольных Тёплицевых матриц порядка n с элементами в $\mathscr{R}$;
2. [b]Если $g(t) = t^n - 1$, тогда $\mathscr{R}_g$ коммутативное кольцо циркулянтных матриц порядка n с элементами в $\mathscr{R}$;
3. [b]Если $g(t) = t^n + 1$, то $\mathscr{R}_g$ коммутативное кольцо косоциркулянтных матриц порядка n с элементами в $\mathscr{R}$.

[a]Bini D.A., Pan V.Y., Polynomial and Matrix Computations. Fund. Algorithms. V. 1, Birkhauser. Boston. MA. 1994.

[b]Davis P.J. Circulant Matrices. New York: AMS Chelsea Publishing. 1994.

Положим,

- $\mathscr{R}$ — коммутативное кольцо с единицей;
- $f(t) \in \mathscr{R}[t]$ — произвольный полином;
- $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ — унитарный полином степени $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$;
- $C_g \in \mathscr{R}^{n \times n}$ — сопровождающая матрица полинома $g(t)$.

Когда $\mathscr{R}$ является областью целостности, полином $g(t)$ имеет n корней в некотором подходящем расширении $\mathscr{R}$ и, для $f(t) \in \mathscr{R}[t]$, определитель матрицы $f(C_g)$ может быть выражен как результант

$$\det f(C_g) = \prod_{\lambda\colon g(\lambda)=0} f(\lambda) = \operatorname{Res}(f(t), g(t)).$$

Определение 2

Матрицы A и B являются *элементарно эквивалентными* над $\mathscr{R}$, если

$$\exists N, M \; : \; A = NBM, \quad \text{причём} \quad \det N = 1, \det M = 1.$$

Будет обозначать $A \sim B$.

Теорема

[a] Пусть $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ есть унитарный полином, и $f(t) \in \mathscr{R}[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t)$, $G(t) \in \mathscr{R}[t]$ такие, что $f(t) = F(t)h(t)$ и $g(t) = G(t)h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Тогда

$$f(C_g) \sim F(C_G) \oplus \mathbb{O}_{m\times m},$$

где $\mathbb{O}_{m\times m}$ — нулевая матрица порядка m.

[a] Noferini V., Williams G. Matrices in companion rings, Smith forms, and the homology of 3-dimensional Brieskorn manifolds // Journal of Algebra. 2021. V. 587, P. 1–19.

Матрица $F(C_G)$ имеет инвариантные факторы $s_1, s_2, \ldots, s_r$ если и только если $f(C_g)$ имеет инварианты $s_1, s_2, \ldots, s_r$ и 0 (повторяющийся m раз).

Следствие

Пусть $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ является унитарным полиномом, и $f(t) \in \mathscr{R}[t]$, при этом $f(t) = F(t)h(t)$ и $g(t) = G(t)h(t)$, где $h(t)$ унитарный полином степени m. Тогда

$$\mathrm{Det} f(C_g) = \mathrm{Res}(F(t), G(t)).$$

Здесь Det — *существенный детерминантный делитель.*

Теорема А

Пусть $g(t) \in \mathscr{R}[t]$ есть унитарный полином, и $f(t) \in \mathscr{R}[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t), G(t) \in \mathscr{R}[t]$ такие, что $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Тогда существует унимодулярная матрица $\Lambda \in \mathscr{R}^{mn \times mn}$ такая, что выполнено соотношение

$$\Lambda f(C_g)\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\underbrace{F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G)}_{m}).$$

В качестве Λ можно взять матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = [\mathbb{O}_{n\times(k-1)} \,|\, \widetilde{\Lambda} \,|\, \mathbb{O}_{n\times(m-k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

При этом,

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_h(0) & c_h(1) & \ldots & c_h(m-1) & 1 & \ldots & 0 \\ c_{h^2}(0) & c_{h^2}(1) & \ldots & c_{h^2}(m-1) & c_{h^2}(m) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h^{n-1}}(0) & c_{h^{n-1}}(1) & \ldots & c_{h^{n-1}}(m-1) & c_{h^{n-1}}(m) & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{h^j}(k)$ обозначает k-й коэффициент полинома $h^j = (h(t))^j$.

Лемма 1

Положим $h(t) \in \mathscr{R}[t]$ и $G(t) \in \mathscr{R}[t]$ — унитарные полиномы степеней m и n соответственно. Пусть $g(t) = G \circ h(t)$ и $\Lambda \in \mathscr{R}^{mn \times mn}$ — матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = [\mathbb{O}_{n\times(k-1)} \,|\, \widetilde{\Lambda} \,|\, \mathbb{O}_{n\times(m-k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_h(0) & c_h(1) & \ldots & c_h(m-1) & 1 & \ldots & 0 \\ c_{h^2}(0) & c_{h^2}(1) & \ldots & c_{h^2}(m-1) & c_{h^2}(m) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h^{n-1}}(0) & c_{h^{n-1}}(1) & \ldots & c_{h^{n-1}}(m-1) & c_{h^{n-1}}(m) & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{h^j}(k)$ обозначает k-й коэффициент полинома $h^j = (h(t))^j$.

Тогда Λ унимодулярная, и

$$\Lambda h(C_{G\circ h}) = \mathrm{diag}(\underbrace{C_G, C_G, \ldots, C_G}_{m})\Lambda.$$

Рассмотрим кольцо полиномов $\mathscr{R}[z]$.

1. Введём следующую систему равенств в кольце $\mathscr{R}[z]$.

$$\Lambda h(C_{G\circ h})\begin{pmatrix}1\\ z\\ z^2\\ \vdots\\ z^{mn-1}\end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{C_G, C_G, \ldots, C_G}_{m})\Lambda\begin{pmatrix}1\\ z\\ z^2\\ \vdots\\ z^{mn-1}\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

2. Рассмотрим правую часть равенства (1)**.**
Для каждого k-го блока матрицы Λ имеем соотношение

$$C_G\Lambda_k\begin{pmatrix}1\\ z\\ z^2\\ \vdots\\ z^{mn-1}\end{pmatrix} = C_G\begin{pmatrix}z^{k-1}\\ z^{k-1}h\\ z^{k-1}h^2\\ \vdots\\ z^{k-1}h^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z^{k-1}h\\ z^{k-1}h^2\\ \vdots\\ z^{k-1}h^{n-1}\\ z^{k-1}(h^n - G\circ h)\end{pmatrix} = \ell_k.$$

2. Таким образом, правая часть доказываемого равенства имеет вид

$$\mathrm{diag}(\underbrace{C_G, C_G, \dots, C_G}_{m})\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix},$$

где

$$\ell_k = \begin{pmatrix} z^{k-1}h \\ z^{k-1}h^2 \\ \vdots \\ z^{k-1}h^{n-1} \\ z^{k-1}(h^n - G \circ h) \end{pmatrix}.$$

Напомним, доказываемое соотношение

$$\Lambda h(C_{G\circ h}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn-1} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{C_G, C_G, \ldots, C_G}_{m})\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn-1} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

3. Рассмотрим левую часть равенства (1). Заметим, что

$$h(C_{G\circ h}) = M + \sum_{k=0}^{m} c_h^k \widetilde{C}_{G\circ h}^k, \qquad (2)$$

где M является верхнетреугольной матрицей Теплица

$$M = \begin{pmatrix} c_h(0) & c_h(1) & c_h(2) & \ldots & c_h(m-1) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_h(0) & c_h(1) & \ldots & \ldots & c_h(m-1) & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_h(0) & \ldots & \ldots & \ldots & c_h(m-1) & \ldots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & c_h(m-1) \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_h(0) \end{pmatrix}.$$

Напомним, доказываемое соотношение

$$\Lambda h(C_{G\circ h})\begin{pmatrix}1\\ z\\ z^2\\ \vdots\\ z^{mn-1}\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\underbrace{C_G,C_G,\dots,C_G}_{m})\Lambda\begin{pmatrix}1\\ z\\ z^2\\ \vdots\\ z^{mn-1}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

3. Рассмотрим левую часть равенства (1). Заметим, что

$$h(C_{G\circ h})=M+\sum_{k=0}^{m}c_h^k\widetilde{C}^k_{G\circ h}, \tag{2}$$

где символ $\widetilde{C}^k_g$ означает матрицу, такую что

$$\widetilde{C}^k_{G\circ h}=C^k_{G\circ h}-\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{mn-k\times k} & \mathbb{E}_{mn-k\times mn-k}\\ \mathbb{O}_{k\times k} & \mathbb{O}_{k\times mn-k}\end{pmatrix},$$

$$h(C_{G\circ h}) = M + \sum_{k=0}^{m} c_h^k \widetilde{C}_{G\circ h}^k, \qquad (2)$$

Произведение k-го блока матрицы Λ и матрицы M является матрицей

$$\Lambda_k M \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{k-1}h \\ z^{k-1}h^2 \\ \vdots \\ z^{k-1}h^{n-1} \\ z^{k-1}(h^n - z^{mn} - \sum_{j=1}^{k} c_{h^n}^{mn-j} z^{mn-j}) \end{pmatrix}.$$

Для второй матрицы равенства (2) выполняется соотношение

$$\Lambda_k \sum_{k=0}^{m} c_f^k \widetilde{C}_{G\circ h}^k \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(mn-1)\times 1} \\ z^{k-1}(z^{mn} + \sum_{j=1}^{k} c_{h^n}^{mn-j} z^{mn-j} - G\circ h) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для k-го блока матрицы преобразования Λ имеет место равенство

$$\Lambda_k(M + \sum_{k=0}^{m} c_h^k \widetilde{C}_{G\circ h}^k) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{k-1}h \\ z^{k-1}h^2 \\ \vdots \\ z^{k-1}h^{n-1} \\ z^{k-1}(h^n - G\circ h) \end{pmatrix} = \ell_k.$$

В результате получим вектор

$$\Lambda(M + \sum_{k=0}^{m} c_h^k \widetilde{C}_{G\circ h}^k) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix},$$

равный вектору, полученный на шаге 2.

Лемма 1

Положим $h(t) \in R[t]$ и $G(t) \in R[t]$ — унитарные полиномы степеней m и n соответственно. Пусть $g(t) = G \circ h(t)$ и $\Lambda \in \mathscr{R}^{mn\times mn}$ — матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = [\mathbb{O}_{n\times(k-1)} \,|\, \widetilde{\Lambda} \,|\, \mathbb{O}_{n\times(m-k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_h(0) & c_h(1) & \ldots & c_h(m-1) & 1 & \ldots & 0 \\ c_{h^2}(0) & c_{h^2}(1) & \ldots & c_{h^2}(m-1) & c_{h^2}(m) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h^{n-1}}(0) & c_{h^{n-1}}(1) & \ldots & c_{h^{n-1}}(m-1) & c_{h^{n-1}}(m) & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{h^j}(k)$ обозначает k-й коэффициент полинома $h^j = (h(t))^j$.

Тогда Λ унимодулярная, и

$$\Lambda h(C_{G\circ h}) = \mathrm{diag}(\underbrace{C_G, C_G, \ldots, C_G}_{m})\Lambda.$$

Теорема А

Пусть $g(t) \in R[t]$ есть унитарный полином, и $f(t) \in R[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t)$, $G(t) \in R[t]$ такие, что $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Существует унимодулярная матрица Λ такая, что выполнено соотношение

$$\Lambda f(C_g)\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\underbrace{F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G)}_{m}).$$

Доказательство. По лемме 1, для полинома $F(t) = \sum\limits_k F_k t^k$ имеет место цепочка равенств

$$\Lambda(F \circ h(C_g))\Lambda^{-1} = \sum_k F_k \Lambda h^k(C_g)\Lambda^{-1} = \sum_k F_k \cdot \mathrm{diag}(\underbrace{(C_G)^k, (C_G)^k, \ldots, (C_G)^k}_{m}) =$$

$$= \sum_k \mathrm{diag}(\underbrace{F_k(C_G)^k, F_k(C_G)^k, \ldots, F_k(C_G)^k}_{m}) = \mathrm{diag}(\underbrace{F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G)}_{m}).$$

Откуда следует требуемый результат.

Теорема А

Пусть $g(t) \in R[t]$ есть унитарный полином, и $f(t) \in R[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t), G(t) \in R[t]$ такие, что $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Существует унимодулярная матрица Λ такая, что выполнено соотношение

$$\Lambda f(C_g)\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}\underbrace{(F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G))}_{m}.$$

Матрица $F(C_G)$ имеет инвариантные факторы $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ тогда и только тогда, когда $f(C_g)$ имеет инвариантные факторы $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$, каждый из которых повторяется m раз.

Следствие

Пусть $g(t) \in R[t]$ — унитарный полином и $f(t) \in R[t]$. Пусть, при этом, выполнены равенства $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Тогда

$$\mathrm{Res}(f, g) = (\mathrm{Res}(F, G))^m \quad \text{и} \quad \mathrm{Det}(f(C_g)) = (\mathrm{Det}(F(C_G)))^m.$$

.

Теорема А

Пусть $g(t) \in R[t]$ есть унитарный полином, и $f(t) \in R[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t), G(t) \in R[t]$ такие, что $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ — унитарный полином степени m. Существует унимодулярная матрица Λ такая, что выполнено соотношение

$$\Lambda f(C_g)\Lambda^{-1} = \operatorname{diag}(\underbrace{F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G)}_{m}).$$

З а м е ч а н и е 3. Теорема А всё ещё остаётся верной, если в качестве $h(t)$ рассмотреть полином Лорана $h(t) \in R[t, t^{-1}]$.

Сопровождающая матрица полинома Лорана

$$g(t) = t^m(t^n + g_{n-1}t^{n-1} + \ldots + g_1 t + g_0), \quad g_0 \neq 0, \quad m \leq 0,$$

задаётся матрицей

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \ldots & -g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема Планса

[a] Пусть M_n — n-листное циклическим накрытие сферы $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над узлом K. Тогда

1°. Если $n = 2m+1$, $n \in \mathbb{Z}$, то первая группа гомологий $H_1(M_{2m+1}, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы.

2°. Если $n = 2m$, $n \in \mathbb{Z}$, то накрывающее отображение $\varphi : M_{2m} \to M_2$ индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\varphi_* : H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z}),$$

ядро которого раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы.

[a] Plans A. Aportacion al estudio de los grupos de homologia de los recubrimientos ciclicos ramificados correspondiente a un nudo, Rev. Real. Acad. Cienc. Exact., Fisica y Nat. Madrid, 47 (1953), 161–193.

Определение 3. *Двухмостовый узел* или *рациональный узел* $K(p, q)$, где p и q взаимно простые числа такие, что $p \geq 2$ и $|q| < p$, задаётся диаграммой (Рис. 1).

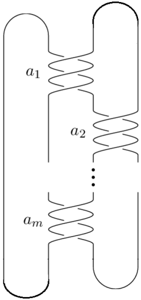

Рис. 1 :
Двухмостовый узел

Любой двухмостовый узел может быть определён своим наклоном, т.е. рациональным числом

$$p/q = a_1 + \cfrac{1}{-a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{-a_4 + \dots}}}.$$

Два узла с наклонами $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $p = p'$ и $qq' \equiv 1$ по $\mathrm{mod}\, p$.

Определение 4

Полиномами Чебышёва первого рода $\mathcal{T}_n(t)$ и *второго рода* $\mathcal{U}_n(t)$ называют полиномы степени n переменной t, определяемые по формулам

$$\mathcal{T}_n(t) = \cos n\theta, \quad \mathcal{U}_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

где $\theta = \arccos t$ и $n \in \mathbb{N}$.

[2] Из тригонометрической формулы

$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\sin\theta\cos n\theta,$$

следует что полиномы первого и второго рода связаны соотношением

$$\mathcal{U}_{n+1}(t) - \mathcal{U}_{n-1}(t) = 2\mathcal{T}_n(t).$$

[2] Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials. CRC Press. Boca Raton. 2003.

Определение 5

Полиномом Чебышёва четвёртого рода $\mathcal{W}_n(t)$ называется полином степени n переменной t, определяемый по формуле

$$\mathcal{W}_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin\theta/2},$$

где $\theta = \arccos t$ и $n \in \mathbb{N}$.

[2] Из тригонометрической формулы

$$\sin(n+1)\theta - \sin n\theta = 2\cos(\theta/2)\sin(n\theta + \theta/2),$$

следует что полиномы второго и четвёртого рода связаны соотношением

$$\mathcal{U}_n(t) + \mathcal{U}_{n-1}(t) = \mathcal{W}_n(t).$$

[2] Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials. CRC Press. Boca Raton. 2003.

Лемма 2

Полиномы Чебышёва $\mathcal{T}_n(t)$, $\mathcal{U}_n(z)$ и $\mathcal{W}_n(z)$ удовлетворяют следующим соотношениям

1. $2\mathcal{T}_n\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = t^{-n} + t^n;$
2. $\mathcal{U}_n\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = t^{-n} + t^{-n+2} + \ldots + t^{n-2} + t^n;$
3. $\mathcal{W}_n\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = t^{-n} + t^{-n+1} + \ldots + 1 + \ldots + t^{n-1} + t^n.$

Доказательство Леммы 2 проводится по индукции.

Пусть

- K — двухмостовый узел в сфере $\mathbb{S}^3$;
- M_n — n-листное циклическое накрытие $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над K;
- Полином Александера узла K имеет вид

$$A(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{s} a_k (t^k + t^{-k}), \quad a_k \in \mathbb{Z},$$

при этом $A(1) = 1$ и $A(t^{-1}) = A(t)$.

Поскольку $2\mathcal{T}_n(\frac{t+t^{-1}}{2}) = t^n + t^{-n}$, полином $A(t)$ может быть переписан в виде суперпозиции

$$A(t) = G \circ h(t), \text{ где } G(t) = a_0 + 2\sum_{k=0}^{s} a_k \mathcal{T}_k \left(\frac{t}{2}\right) \text{ и } h(t) = t + t^{-1}.$$

Пусть

- K — двухмостовый узел в сфере $\mathbb{S}^3$;
- M_n — n-листное циклическое накрытие $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над K;
- Полином Александера узла K имеет вид

$$A(t) = G \circ h(t), \quad \text{где} \quad G(t) = a_0 + 2\sum_{k=0}^{s} a_k \mathcal{T}_k\left(\frac{t}{2}\right), \quad h(t) = t + t^{-1}.$$

В общем случае $a_s \neq 1$, поэтому пронормируем полином Александера и введём обозначения

$$\widetilde{A}(t) = \frac{1}{a_s} A(t) \quad \text{и} \quad \widetilde{G}(t) = \frac{1}{a_s} G(t).$$

Поскольку $\widetilde{G}(t)$ — характеристический полином для матрицы $C_{\widetilde{G}}$, то

$$\det(C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E}) = \widetilde{G}(2) = \frac{a_0 + 2\sum\limits_{k=0}^{s} a_k \mathcal{T}_k(1)}{a_s} = \frac{1}{a_s} \neq 0.$$

Тогда $\det(C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-1} = a_s$, и матрица $(C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-1}$ целочисленная.

Введём следующие обозначения

$$\mathscr{L} = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-m}\mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2) \ \text{ и } \ \mathscr{L}' = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{1-m}\mathcal{U}_{m-1}(C_{\widetilde{G}}/2).$$

Данные матрицы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ являются целочисленными.

Теорема B

[a] Пусть M_n — n-листное циклическим накрытие сферы $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над двухмостовым узлом K. Тогда

1°. Если $n = 2m+1$, $n \in \mathbb{Z}$, то первая группа гомологий $H_1(M_{2m+1}, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, что представима матрицей $\mathscr{L}$.

2°. Если $n = 2m$, $n \in \mathbb{Z}$, то накрывающее отображение $\varphi : M_{2m} \to M_2$ индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\varphi_* : H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z}),$$

ядро которого раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей $\mathscr{L}'$.

[a] Plans A. Aportacion al estudio de los grupos de homologia de los recubrimientos ciclicos ramificados correspondiente a un nudo, Rev. Real. Acad. Cienc. Exact., Fisica y Nat. Madrid, 47 (1953), 161–193.

Как известно, существует изоморфизм групп[3]

$$H_1(M_n, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{coker}(\Gamma^n - (\Gamma - \mathbb{E})^n),$$

где Γ является матрицей Зейферта.

Заметим, что $\Gamma = (U+V)^{-1}U$, где U и V есть *комбинаторные аналоги матриц Зейферта*[4]

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_s & a_{s-1} & a_{s-2} & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_{s-1} \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_s \end{pmatrix}.$$

[3] Seifert H. Uber das Geschlecht von Knoten // Math. Ann. 1934. V. 110. P. 571–592.

[4] Mednykh I.A. Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two. Preprint. 2021. arXiv:2111.04292 [math.CO].

Поскольку матрица $V^{-1}U = -C_{\widetilde{A}}$ является сопровождающей матрицей полинома $\widetilde{A}$, справедливо следующее равенство

$$(\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^{-1} = C_{\widetilde{A}} + C_{\widetilde{A}}^{-1} - 2\mathbb{E},$$

иными словами,

$$(\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^{-1} = F \circ h, \quad F = t - 2, \quad h = t + t^{-1}.$$

Применим результат Теоремы А к суперпозициям $F \circ h$ и $\widetilde{A} = \widetilde{G} \circ h$. Тогда

$$\Lambda \left(F \circ h(C_{\widetilde{G} \circ h})\right) \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} F(C_{\widetilde{G}}) & 0 \\ 0 & F(C_{\widetilde{G}}) \end{pmatrix}.$$

т.е.

$$\Lambda \left(\Gamma(\Gamma - \mathbb{E})\right)^{-1} \Lambda^{-1} = \Lambda \left(C_{\widetilde{A}} + C_{\widetilde{A}}^{-1} - 2\mathbb{E}\right) \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E} & 0 \\ 0 & C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E} \end{pmatrix}.$$

Как результат, получим соотношение

$$\Lambda \, \Gamma(\Gamma - \mathbb{E}) \, \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-1} & 0 \\ 0 & (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Введём следующие обозначения

$$\mathscr{L} = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-m}\mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2) \text{ и } \mathscr{L}' = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{1-m}\mathcal{U}_{m-1}(C_{\widetilde{G}}/2).$$

Данные матрицы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ являются целочисленными.

Теорема B

[a] Пусть M_n — n-листное циклическим накрытие сферы $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над двухмостовым узлом K. Тогда

1°. Если $n = 2m + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то первая группа гомологий $H_1(M_{2m+1}, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, что представима матрицей $\mathscr{L}$.

2°. Если $n = 2m$, $n \in \mathbb{Z}$, то накрывающее отображение $\varphi : M_{2m} \to M_2$ индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\varphi_* : H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z}),$$

ядро которого раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей $\mathscr{L}'$.

[a] Plans A. Aportacion al estudio de los grupos de homologia de los recubrimientos ciclicos ramificados correspondiente a un nudo, Rev. Real. Acad. Cienc. Exact., Fisica y Nat. Madrid, 47 (1953), 161–193.

1°. **Пусть $\mathbf{n = 2m + 1}$.**

1. Используя результат Леммы 2 для полинома Чебышёва четвёртого рода $\mathcal{W}_m$ и формулу сокращённого умножения вида
$$x^{2m+1} - y^{2m+1} = (x-y)(x^{2m} + x^{2m-1}y + \ldots + xy^{2m-1} + y^{2m}),$$
получим
$$\frac{x^{2m+1} - y^{2m+1}}{x-y} = (xy)^m \mathcal{W}_m\left(1 + \frac{(x-y)^2}{2xy}\right).$$

2. Пусть $x = \Gamma$ и $y = \Gamma - \mathbb{E}$, тогда
$$\Gamma^{2m+1} - (\Gamma - \mathbb{E})^{2m+1} = (\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^m \mathcal{W}_m\left(\mathbb{E} + \frac{1}{2}(\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^{-1}\right) = G_{2m+1}.$$

3. Применяя соотношение (*), получим следующее равенство
$$\Lambda G_{2m+1} \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-m} \mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2) & 0 \\ 0 & (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-m} \mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеет место соотношение элементарной эквивалентности
$$G_{2m+1} \sim \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}, \quad \text{где} \quad \mathscr{L} = (C_{\widetilde{G}} - 2)^{-m} \mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2).$$

2°. **Пусть $\mathbf{n = 2m}$ и $\mathbf{G_{2m} = \Gamma^{2m} - (\Gamma - \mathbb{E})^{2m}}$.**

Рассмотрим целочисленные матрицы G_2 и G_{2m} как линейные операторы

$$G_2 : \mathbb{Z}^{2s} \to \mathbb{Z}^{2s} \text{ и } G_{2m} : \mathbb{Z}^{2s} \to \mathbb{Z}^{2s}.$$

По лемме о снежинке[5] существует точная последовательность

$$\ker G_2 \to \operatorname{coker} G_2^{-1} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_2 \to 0. \tag{3}$$

1. Поскольку матрица G_2 невырожденная, то $\ker G_2 = 0$ и
$$\operatorname{coker} G_2 = H_1(M_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_k,$$
где $k = |A(-1)| \neq 0$ определяет размерность группы $H_1(M_2, \mathbb{Z})$.

   Число k называется *детерминантом узла*[6].
   Отметим, детерминант двухмостового узла $K(p, q)$ равен $k = |p|$ [7].

2. Также в данной точной последовательности
$$\operatorname{coker} G_{2m} = \operatorname{coker} (\Gamma^{2m} - (\Gamma - \mathbb{E})^{2m}) = H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}).$$

---

[5] Kutateladze S.S. Fundamentals of functional analysis. Netherlands: Springer Science and Business Media, 2013.

[6] Reidemeister K. Knotentheorie. New York: Chelsea Pub. Co., NewYork, 1948.

[7] Raymond Lickorish W.B. An Introduction to Knot Theory. New York: Springer. 1997.

2°. **Пусть $\mathbf{n = 2m}$ и $\mathbf{G_{2m} = \Gamma^{2m} - (\Gamma - \mathbb{E})^{2m}}$.**

По лемме о снежинке[5] существует точная последовательность

$$\ker G_2 \to \operatorname{coker} G_2^{-1} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_2 \to 0. \tag{3}$$

3. Используя результат Леммы 2 для полинома Чебышёва второго рода $\mathcal{U}_n$ и формулу сокращённого умножения вида

$$x^{2m} - y^{2m} = (x^2 - y^2)(x^{2m-2} + x^{2m-4}y^2 + \ldots + x^2 y^{2m-4} + y^{2m-2}).$$

получим

$$\frac{x^{2m} - y^{2m}}{x^2 - y^2} = (xy)^{m-1} \mathcal{U}_{m-1} \left(1 + \frac{(x-y)^2}{2xy} \right).$$

Следующее равенство справедливо для G_{2m}, где $x = \Gamma$ и $y = \Gamma - \mathbb{E}$,

$$G_2^{-1} G_{2m} = (\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^{m-1} \mathcal{U}_{m-1} \left(\mathbb{E} + \frac{1}{2} (\Gamma(\Gamma - \mathbb{E}))^{-1} \right).$$

Применяя соотношение (*), получим следующее равенство

$$\Lambda G_2^{-1} G_{2m} \Lambda^{-1} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}', \text{ где } \mathscr{L}' = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{1-m} \mathcal{U}_{m-1}(C_{\widetilde{G}}/2).$$

[5] Kutateladze S.S. Fundamentals of functional analysis. Netherlands: Springer Science and Business Media, 2013.

2°. **Пусть $\mathbf{n = 2m}$ и $\mathbf{G_{2m} = \Gamma^{2m} - (\Gamma - \mathbb{E})^{2m}}$.**

По лемме о снежинке[5] существует точная последовательность

$$\ker G_2 \to \operatorname{coker} G_2^{-1} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_{2m} \to \operatorname{coker} G_2 \to 0. \qquad (3)$$

3. Поскольку умножение на целочисленную унимодулярную матрицу Λ не изменяет коядро оператора, выполняется следующее соотношение

$$\operatorname{coker}(\Lambda G_2^{-1} G_{2m} \Lambda^{-1}) = \operatorname{coker}(G_2^{-1} G_{2m}).$$

Тогда по формуле (*) (Теорема A)

$$\operatorname{coker}(G_2^{-1} G_{2m}) = \operatorname{coker}(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}') = V' \oplus V', \text{ где } V' = \operatorname{coker} \mathcal{L}'.$$

Таким образом, имеет место точная последовательность

$$0 \to V' \oplus V' \to H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z}) \to 0,$$

из которой следует требуемый результат.

[5] Kutateladze S.S. Fundamentals of functional analysis. Netherlands: Springer Science and Business Media, 2013.

Введём следующие обозначения

$$\mathscr{L} = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{-m}\mathcal{W}_m(C_{\widetilde{G}}/2) \;\text{ и }\; \mathscr{L}' = (C_{\widetilde{G}} - 2\mathbb{E})^{1-m}\mathcal{U}_{m-1}(C_{\widetilde{G}}/2).$$

Данные матрицы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ являются целочисленными.

Теорема B

[a] Пусть M_n — n-листное циклическим накрытие сферы $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над двухмостовым узлом K. Тогда

1°. Если $n = 2m+1$, $n \in \mathbb{Z}$, то первая группа гомологий $H_1(M_{2m+1}, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, что представима матрицей $\mathscr{L}$.

2°. Если $n = 2m$, $n \in \mathbb{Z}$, то накрывающее отображение $\varphi : M_{2m} \to M_2$ индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\varphi_* : H_1(M_{2m}, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z}),$$

ядро которого раскладывается в прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей $\mathscr{L}'$.

[a] Plans A. Aportacion al estudio de los grupos de homologia de los recubrimientos ciclicos ramificados correspondiente a un nudo, Rev. Real. Acad. Cienc. Exact., Fisica y Nat. Madrid, 47 (1953), 161–193.

СЕМИНАР ПО ДИСКРЕТНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

Россия, Москва, 23 апреля, 2025

Соколова Галина Константиновна
аспирант, g.sokolova@g.nsu.ru
Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОЛИНОМОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ УЗЛОВ