$q \in N,\ q \geq 2 \qquad a \in N,\ (a, q) = 1$

$(n-1)+1$

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_r}}} = [a_1, \dots, a_r]$$

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$$

$$\frac{1}{a_r} = \frac{1}{(a_r - 1) + \frac{1}{1}}$$

$$\frac{a}{q} = [a_1, \dots, a_r] = [a_1, \dots, a_r - 1, 1]$$

$a_r \geq 2$

$$x = [a_1, \dots, a_n, \dots]$$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) = \max(a_1, \dots, a_r)$$

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Гипотеза (Заремба) $\exists C \in R:$ $\forall q \geq 2 \quad \exists a,\ (a, q) = 1$

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < |x - \frac{p}{q}|$$

$$\frac{a}{q} = [a_1, \dots, a_r] \qquad K\left(\frac{a}{q}\right) \leq C$$

$\forall q \leq q_n \quad \left(\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}\right)$

$C = 5$

Гипотеза (Хенсли) для любых д.б. p – простых $\quad \exists a \quad (a, p) = 1$

$$K\left(\frac{a}{p}\right) \leq 2$$

Теор (Коробов) $\forall q$ – простое число $\exists a$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) \ll \log q$$

Теорема (Нидеррейтер) $q = 2^n, 3^n$ $\exists a$ $K\left(\frac{a}{q}\right) \leq \underline{\underline{3}}$

$$\boxed{rad(n) = \prod_{\substack{p \mid n \\ p\text{-простое}}} p}$$

$q = 5^n$ $\exists a\, K\left(\frac{a}{q}\right) \leq 4$

$q = 6^n$ $K\left(\frac{a}{q}\right) \leq 5$

$q = 7^{c \cdot 2^n}$, $(n \geq 0,\ c = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$ $K\left(\frac{a}{q}\right) \leq 3$

Теорема 1. $\forall q \geq 2$, $q \neq 2^n, 3^n$ $\exists a$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) \leq rad(q) - 1$$

$rad(2^n \cdot 3^m) = 6$

$K\left(\frac{a}{q}\right) \leq 5$

Лемма (Folding Lemma)

Если $\frac{t_r}{q_r} = [a_1, \dots, a_r]$ и $b \in \mathbb{N}$, тогда

$$\frac{t_r}{q_r} + \frac{(-1)^{r}}{b \cdot q_r^2} = [a_1, \dots, \overset{\geqslant 2}{a_r, b-1}, 1, a_r - 1, a_{r-1}, \dots, a_1] \quad (*)$$

$$= [a_1, \dots, a_r - 1, 1, b-1, a_r, \dots, a_1]$$

$q_r = a_r \cdot q_{r-1} + q_{r-2}$

дробь (*) имеет знаменатель $b \cdot q_r^2$

$[a_1, \dots, a_r, 0, 1, a_r - 1, a_{r-1}, \dots, a_1] = [a_1, \dots, a_r + 1, a_r - 1, \dots, a_1]$

$[\dots, x, 0, y, \dots] = [\dots, x+y, \dots]$

Док-во Теор 1:

$n_i \geq 1$, $\in \mathbb{N}$

$q = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \Rightarrow rad(q) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$

$q_{(0)} := q$ Определим $q_{(i)}, i \geq 1$ из рав

$(*)\ q_{(i-1)} = p_{(i)} \cdot q_{(i)}^2$, где $p_{(i)} = p_1^{v_1^{(i)}} \cdot \ldots \cdot p_k^{v_k^{(i)}}$, где $v_i^{(j)} \in \{0, 1\}$

$\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $q_{(N)} > 1$, но $q_{(N+1)} = 1$

$p_{(i)} \mid rad\, q$

$\dfrac{1}{\frac{q-1+1}{q-1}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{q-1}}$

$N = 0$. $rad(q) = q$. Рассм $\dfrac{q-1}{q} = [1, q-1]$ $K\left(\dfrac{q-1}{q}\right) \leq rad(q) - 1 = q - 1$

$N \geq 1$.

<u>Случай 1</u> $q(N) \neq 2, 3, 6$. $q(N) \geq 5$, в частности

$\mathrm{rad}(q) \geq q(N) \geq 5$

Для бесквадратного $q(N) \geq 5$ был $\varphi(q(N)) \geq 4$

$q(N-1) =$

<u>Утв 1</u> $\forall q$: $\varphi(q) \geq 4$, $\exists$ $1 \leq a \leq q-1$ $(a, q) = 1$:

$\frac{a}{q} = [a_1, \ldots, a_n]$ обладает св-вами: $\frac{1}{2^2}$

1. $n \geq 2$
2. $a_1, a_n \geq 2$
3. $K\left(\frac{a}{q}\right) \leq \frac{q-1}{2}$

$\frac{a_1}{q}$, $\frac{a_2}{q}$, $\frac{a_3}{q}$, $\frac{a_4}{q}$

$\frac{a}{q}$ $\frac{q-a}{q} = [a_2, \ldots]$

$[1, a_2 - 1, \ldots]$

$$\boxed{K\left(\frac{q}{q}\right) \le \frac{q-1}{2}}$$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — знаменатель ц.д. $[a_1, \dots, a_n]$

$\parallel$

$\langle a_n, \dots, a_1 \rangle$

$\exists\, j \in \{1, n\} \quad a_j > \frac{q-1}{2}$

$$q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle > \langle a_j, \dots, \frac{q-1}{2}, \dots \rangle \geq \langle a_j, \frac{q-1}{2} \rangle \geq \langle 2, \frac{q-1}{2} \rangle =$$

$j \notin \{1, n\}$

$$= (q-1) + 1 = q$$

$$q > q$$

Применим Кв 1 с $q = q(N)$

$\exists \quad \frac{a}{q(N)} = [a_1, \dots, a_n]$ $\quad a_1, a_n \geq 2$

$n \geq 2$

$K\left(\frac{a}{q(N)}\right) \leq \frac{q-1}{2}$ $\quad a_1 -$

Применим Folding Lemma

$\frac{t_r}{q_r} = \frac{a}{q(N)}$, $\quad b = p(N)$

$[a_1, \dots\dots, a_1] \to [a_1, \dots, a_1+1, a_1-1, \dots a_1]$

$2 \leq a_1 \leq \frac{p(N)-1}{2}$

$\frac{t_r}{q_r} + \frac{(-1)^r}{b \cdot q_r^2} = [a_1, \dots, a_n, p(N)-1, 1, a_n-1, \dots, a_1] = \frac{a(N-1)}{p(N) \cdot q_{(N)}^2} =$

$[a_1, \dots, a_n+1, a_n-1 \dots, a_1]$ $\quad = \frac{a(N-1)}{q(N-1)}$

$q(N) \to q(N-1) \to q(N-2) \to \dots \to q(0) = q$

Если $p(N) = 1$, $\quad K\left(\frac{a(N-1)}{q(N-1)}\right) \leq K\left(\frac{a}{q(N)}\right) + 1 \leq \frac{q(N)-1}{2} + 1 = \frac{q(N)+1}{2} \leq$

$\leq rad(q) - 1$

$\frac{rad(q)+1}{2} \leq rad(q) - 1$

$q(N) \leq rad(q)$,

$rad(q) \geq 5$

Если $p_{(N)} \geqslant 2$, тогда

$$K\left(\frac{a_{(N-1)}}{q_{(N-1)}}\right) \le \max\left(K\left(\frac{a}{q_{(N)}}\right),\ p_{(N)}-1\right) \le \max\left(\underbrace{\frac{q_{(N)}-1}{2}},\ \underbrace{p_{(N)}-1}\right) \le$$

$$\le \mathrm{rad}(q)-1 \qquad p_{(N)} \mid \mathrm{rad}\, q$$

$$q_{(N)} \to q_{(N-1)} \to q_{(N-2)} \to \ldots \to q_{(0)} = q$$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) \le \mathrm{rad}(q) - 1$$

Случай 2 $\quad q = 2^n \cdot 3^m \quad , n,m \geq 1$

$q \neq 2^4 3^m \quad \operatorname{rad} q \geq 10$

$q_{(N)} = 2, 3, 6$

$\frac{1}{2} = [2] \quad \frac{1}{3} = [3] \quad \frac{1}{6} = [5,1]$

$K\left(\frac{1}{q_{(N)}}\right) \leq 5$

$q_{(N-1)} = p_{(N)} \cdot q_{(N)}^2 \quad , \quad q_{(N)} \in \{2,3,6\} \quad , \quad p_{(N)} \in \{1,2,3,6\}$

$K\left(\frac{a}{q_{(N-1)}}\right) \leq 5$

$q_{(N)} \to q_{(N-1)} \to q_{(N-2)} \quad \frac{1}{2^2} \to q_{(N-2)}$

$\frac{b_1}{2^4}, \frac{b_2}{2\cdot 2^4}, \frac{b_3}{3\cdot 2^4}, \frac{b_4}{6\cdot 2^4}$

$\varphi(q_{(N-1)}) \geq 4$

$\varphi(4) = 2$

Замечание 1.

$q = 2^n 3^m$

$\operatorname{rad}(q) - 1 = 6 - 1 = 5$

явл оптимальной

$q = 2^n, 3^m$

(И спр $q = 2 \cdot 3$ или $\underline{q = 2 \cdot 3^3 = 54}$)

Замечание:

Теор 2 1. Пусть q — дост. б. нат. число с дост. большими делителями. $\exists a$

$$M = \underline{O}\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right)$$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) \le \underline{O}(\log q) \quad (**)$$

2. q - бесквадратное, то $(**)$

3. $q = p^n$, p-простое, n — дост. большое, то $(**)$

$n \asymp p^2$

$\mathrm{rad}(p^n) = p$

$$\Downarrow$$

$$K\left(\frac{a}{q}\right) \le C \cdot \frac{n \log p}{\log n \log p} \asymp C \frac{p^2 \log p}{2\log p \log p} \le p^2$$

$$\boxed{K\left(\frac{a}{q}\right) \le p-1}$$

$$q = q_{(0)} \to q_{(1)} \to \cdots \to q_{(N)}$$

$q_{(N)} \to$ бесквадратное

$$K\left(\frac{a}{q_{(N)}}\right) \le \frac{q-1}{2} \Longleftarrow$$

$$\exists\, a \quad K\left(\frac{a}{q_{(N)}}\right) \le \underline{O}\left(\frac{\log q_{(N)}}{\log\log q_{(N)}}\right) \Longleftarrow$$

$$[\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{}, b-1, \underbrace{1, a_n - 1, \dots, a_1}_{}] = \frac{a}{d}$$

$\operatorname{rad}(q) - 1$

$$D = \left\{ m \in \mathbb{N} : m \mid q_{(N)} \text{ и } m \le \underline{O}\left(\frac{\log q_{(N)}}{\log\log q_{(N)}}\right) \right\}$$

$1 \in D$

$b \in D \qquad K\left(\frac{a}{d}\right) \le \underline{O}(\dots)$

d — бесквадратное, то сможем получить

$$\underbrace{p_{i_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_j}^{n_j}}\, d^{2^n}$$, где $p_{i_1} \ldots p_{i_j} \in D \cup \{1\}$

$n_1, \ldots, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n \in \mathbb{N}$

d

d^{2^n}

$$K\left(\frac{a}{d^{2^n}}\right) \leq O\left(\frac{\log d}{\log \log d}\right)$$

d $\exists a$ $K\left(\frac{a}{d}\right) \leq O\left(\frac{\log d}{\log \log d}\right)$

$[a_1, \ldots, a_n, b-1, 1, a_n - 1, \ldots, a_1]$

d^2, d^4