Я. К. Шубин, О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов, *Матем. заметки*, 2022, том 111, выпуск 6, 929–939

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13370

Математические заметки

Том 111 выпуск 6 июнь 2022

УДК 519

О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов

Я. К. Шубин

В работе доказаны три новые теоремы, которые дают оценку числа ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: дистанционные графы, графы Джонсона.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13370

1. Введение. В данной работе мы рассматриваем специальный дистанционный граф $G(n, r, s)$, вершинами которого являются точки в n-мерном булевом кубе, у которых ровно r единиц, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно s. Также можно сформулировать данное определение в комбинаторных терминах, а именно, вершинами данного графа являются все возможные r-элементные подмножества множества $\mathscr{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а ребро проводится между подмножествами, имеющими ровно s общих элементов. Именно вторым определением мы будем пользоваться в дальнейшем.

Граф $G(n, r, s)$ имеет большое значение для теории графов, комбинаторной геометрии и исследования кодов с запрещенными расстояниями. Именно с помощью этих графов Франкл и Уилсон установили, что хроматическое число пространства растет экспоненциально с ростом размерности (см. [1]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи использовали результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ мощности больше 1 может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра (см. [2]–[5]). В работах [6]–[9] исследованы некоторые свойства графа $G(n, r, s)$ и схожих с ним по структуре графов.

Обозначим через $\rho(W)$ количество ребер графа $G = (V, E)$ на множестве $W \subseteq V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E \mid x \in W,\ y \in W\}|.$$

Также положим

$$\rho_G(l) = \min_{|W|=l,\, W \subseteq V} \rho(W).$$

Отметим, что проблема оценивания количества ребер в индуцированных подграфах тесно связана с теорией экспандеров и спектральной теорией графов.

Напомним, что *независимым множеством* вершин графа G называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины этого подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества.

Заметим, что если $l \leqslant \alpha$, то $\rho_G(l) = 0$. Таким образом, мы будем исследовать величину $\rho_{G(n,r,s)}(l)$ именно в случае

$$\alpha < l \leqslant |V(G(n,r,s))| = C_n^r.$$

Сначала нужно напомнить, как выглядит число независимости графа $G(n,r,s)$. В работе [10] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть даны числа r, s. Тогда выполнены следующие утверждения*:

1) *если $r > 2s+1$, то при достаточно больших n*

$$\alpha(G(n,r,s)) = C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}\,;$$

2) *если $r \leqslant 2s+1$ и $r-s$ – степень простого числа, то*

$$\alpha(G(n,r,s)) \sim n^s \cdot \frac{(2r-2s-1)!}{r! \cdot (r-s-1)!}\,;$$

3) *для любых r, s существуют $c(r,s)$ и $d(r,s)$, с которыми*

$$c(r,s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\} \leqslant \alpha(G(n,r,s)) \leqslant d(r,s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\}.$$

В частности, для понимания теоремы 3 ниже важно соотношение

$$\alpha(G(n,3,1)) \sim n.$$

Зная число независимости всего графа, можно оценить минимальное количество ребер в его индуцированных подграфах. Один из простых способов – теорема Турана.

Теорема 2. *Для любого графа G с числом независимости α и любого $l > \alpha$ выполнено*

$$\rho_G(l) \geqslant \frac{\alpha}{2}\left[\frac{l}{\alpha}\right]\left(\left[\frac{l}{\alpha}\right] - 1\right).$$

Обратим внимание на то, что в общем случае теорема Турана не улучшаема. Но в дальнейшем мы убедимся, что пользуясь спецификой графа $G(n,r,s)$, можно добиться намного лучшей оценки для некоторых фиксированных r, s и $l = l(n)$. А вот для графа $G(n,3,1)$ оценка величины $\rho_{G(n,3,1)}(l)$ с помощью теоремы Турана получается весьма хорошей, в работах [9], [11]–[13] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Для графа $G(n,3,1)$ выполнены следующие утверждения.*

1. *Пусть функция $l = l(n)$ такова, что $n = o(l)$, $l = O(n^2)$. Тогда*

$$\rho_{G(n,3,1)}(l) \sim \frac{l^2}{2n}\,.$$

2. *Пусть функция $l = l(n)$ такова, что $n^2 = o(l)$. Тогда*

$$(1+o(1))\frac{3l^2}{2n} \leqslant \rho_{G(n,3,1)}(l) \leqslant (1+o(1))\frac{9l^2}{2n}\,.$$

Теорема 4. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными r, s и любой функции $l = l(n)$ такой, что $l > \alpha(G(n,r,s))$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(l) \leqslant (1+o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}\,.$$

На данный момент теоремы 3 и 4 – это практически все известные оценки величины $\rho_{G(n,r,s)}(l)$. Есть еще ряд оценок в случае графа $G(n,3,1)$, когда $l(n)$ имеет порядок и даже асимптотику числа вершин (см. [14]), а также слегка уточненные оценки для графа $G(n,r,0)$, т.е. для кнезеровского графа (см. [15]).

В п. 2 мы полностью закроем случай $G(n,3,1)$, а также докажем более общее утверждение.

Теорема 5. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными $r, s > 0$ и любой функции $l = l(n)$ такой, что $n^{r-1} = o(l)$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(l) \geqslant (1+o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}\,.$$

Обратим внимание, что теорема 5 вместе с теоремой 4 дают точную оценку в случае “самых больших” функций l для любых фиксированных r и s. Говоря о “самых больших” функциях, мы имеем в виду, что в любом случае

$$l \leqslant |V(G(n,r,s))| = C_n^r = \Theta(n^r).$$

Таким образом, в теореме 5 функция l имеет порядок роста между n^{r-1} и n^r, и этот порядок в понятном смысле наибольший из возможных. В частности, именно такой случай рассматривался в пункте 2 теоремы 3, и там оставался зазор в константу раз между оценками. Теперь этого зазора нет, константа $9/2$ является правильной, и случай графа $G(n,3,1)$ действительно закрыт.

Также в данной работе мы докажем две теоремы для случая маленьких $l(n)$, а именно $l = o(n^{r-s})$. Если рассматривать случай $r > 2s+1$, то по пункту 1 теоремы 1 число независимости равно

$$C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}\,.$$

Отсюда видно, что случай $l = o(n^{r-s})$ затрагивает “самые маленькие” функции $l(n)$.

В п. 3 мы докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Для графа $G(n,r,s)$ с фиксированными r, s, где $r \geqslant 2s+1$, $s > 0$, и любой функции $l = l(n)$ такой, что $n^{r-s-1} = o(l)$, $l = o(n^{r-s})$, выполнено*

$$\rho_{G(n,r,s)}(l) \leqslant (1+o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_{r-s-1}^s \cdot (r-s-1)!}{2 \cdot (r-2s-1)!}\,.$$

Следует заметить, что теорема 6 улучшает оценку теоремы 4. Сравним константы в этих теоремах:

$$\frac{C_{r-s-1}^{s}\cdot(r-s-1)!}{2\cdot(r-2s-1)!}=\frac{(r-s-1)^2(r-s-2)^2\cdots(r-2s)^2}{2s!},$$
$$\frac{C_r^s\cdot r!}{2\cdot(r-s)!}=\frac{r^2(r-1)^2\cdots(r-s+1)^2}{2s!}.$$

Из такой записи мы видим, что первая константа меньше, чем вторая для всех s. К примеру, для случая $G(n,3,1)$ константа из теоремы 4 равна $9/2$ (и это хорошо только в случае 2 теоремы 3, так как ввиду новой теоремы 5 в этом случае константа $9/2$ неулучшаема; сейчас же мы находимся в рамках случая 1 теоремы 3, и там константа $1/2$), а из теоремы 6 – $1/2$ (и это снова наилучший результат согласно теореме 3).

В п. 4 данной работы мы обратим внимание на граф $G(n,r,1)$ с фиксированным значением $r\geqslant 4$. Заметим, что в таком графе $C_{n-2}^{r-2}\leqslant l\leqslant C_n^r$. Для случая $n^{r-1}=o(l)$ точная оценка уже известна из теорем 4 и 5. А для более маленьких l мы докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Для графа $G(n,r,1)$ с фиксированным $r\geqslant 4$ и любой функции $l=l(n)$ такой, что $n^{r-2}=o(l)$, $l=o(n^{r-1})$, выполнено*

$$(1+o(1))\cdot\frac{l^2}{n}\cdot\frac{1}{4(2r-1)}\leqslant\rho_{G(n,r,1)}(l)\leqslant(1+o(1))\cdot\frac{l^2}{n}\cdot\frac{(r-2)^2}{2}.$$

Получаем, что в случае $G(n,r,1)$ для больших l мы нашли точную оценку, а для маленьких l мы оставили всего лишь зазор в константу. Заметим также, что здесь нижняя оценка принципиально сильнее оценки Турана, у которой в знаменателе степень n равна не единице, а $r-s-1=r-2$. Именно поэтому константный зазор является весьма существенным продвижением в этом случае.

Также в работах [16], [17] были доказаны улучшения теоремы Турана для дистанционных графов на плоскости и слоях между плоскостями.

2. Доказательство теоремы 5. Возьмем подмножество вершин W_n графа $G(n,r,s)$ такое, что $|W_n|=l(n)$.

Пронумеруем все s-элементные подмножества $\mathscr{R}_n=\{1,2,\dots,n\}$ и назовем их $S_1,S_2,\dots S_m$, где $m=C_n^s$. Для каждого S_i определим подмножество вершин нашего множества W_n, которые содержат его:

$$K_i=\{v\mid S_i\subset v,\ v\in W_n\}.$$

Данные множества будут пересекаться по вершинам. Но если две вершины нашего графа соединены ребром, то они будут одновременно входить ровно в одно из K_i, так как имеют ровно s общих элементов. Тогда мы имеем

$$\rho(W_n)=\sum_{i=1}^{m}\rho(K_i).$$

Заметим, что каждая вершина входит ровно в C_r^s различных K_i, поэтому получаем

$$\sum_{i=1}^{m}|K_i|=l\cdot C_r^s.$$

Возьмем множество вершин K_i и оценим величину $\rho(K_i)$ снизу. Рассмотрим любую вершину a из данного множества. Любая вершина, несмежная с a, должна иметь с ней еще хотя бы один общий элемент, кроме множества S_i, иначе они будут пересекаться ровно по s элементам. Тогда число таких вершин не больше, чем $(r-s)C_{n-s-1}^{r-s-1}$, где $r-s$ – количество способов выбрать еще 1 общий элемент, а C_{n-s-1}^{r-s-1} – количество способов выбрать остальные $r-s-1$ элементов. Получаем, что каждая вершина данного множества имеет степень внутри данного множества хотя бы $|K_i|-(r-s)C_{n-s-1}^{r-s-1}$, т.е. получаем оценку

$$\rho(K_i) \geqslant \frac{|K_i|(|K_i|-(r-s)C_{n-s-1}^{r-s-1})}{2}.$$

Теперь мы можем оценить величину $\rho(W_n)$ как

$$\begin{aligned}\rho(W_n) &= \sum_{i=1}^{m} \rho(K_i) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|(|K_i|-(r-s)C_{n-s-1}^{r-s-1})}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|^2}{2} - \sum_{i=1}^{m} |K_i| \frac{(r-s)C_{n-s-1}^{r-s-1}}{2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|^2}{2} - \frac{l \cdot C_r^s (r-s) C_{n-s-1}^{r-s-1}}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|^2}{2} - (1+o(1)) \frac{l \cdot C_r^s (r-s) n^{r-s-1}}{2(r-s-1)!} = \sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|^2}{2} + o\biggl(\frac{l^2}{n^s}\biggr),\end{aligned}$$

поскольку $n^{r-1} = o(l)$.

Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|K_i|^2}{2} \geqslant \frac{1}{2m} \biggl(\sum_{i=1}^{m} |K_i|\biggr)^2 = \frac{l^2 \cdot (C_r^s)^2}{2C_n^s} \sim \frac{l^2 \cdot (C_r^s)^2 s!}{2n^s} = \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}.$$

Подставляя это в предыдущее неравенство, получаем требуемое. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 6. Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию теоремы 6, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $\rho(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. При этом можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию теоремы 6, и число n. Положим

$$x(n) = n - \biggl[\frac{l(n)(s+1)}{C_k^{r-s-1}}\biggr] - s - 3, \qquad \text{где } k = \biggl[\frac{n}{2}\biggr],$$

а также

$$y(n) = \biggl[\frac{l(n)(s+1)}{C_{x(n)}^{r-s-1}}\biggr] + s + 2.$$

Заметим, что у обеих больших целых частей аргумент имеет порядок l/n^{r-s-1}. По условию теоремы $l = o(n^{r-s})$, откуда следует, что $y = o(n)$ и $x \sim n$. Кроме того,

$$x(n) + y(n) \leqslant n - \frac{l(n)(s+1)}{C_k^{r-s-1}} - s - 2 + \frac{l(n)(s+1)}{C_{x(n)}^{r-s-1}} + s + 2 \leqslant n,$$

так как при достаточно больших n можно считать, что $x(n) > k$, а значит, и $C_{x(n)}^{r-s-1} > C_k^{r-s-1}$.

Для уменьшения громоздкости дальнейших выкладок будем писать x вместо $x(n)$ и y вместо $y(n)$. Рассмотрим следующие подмножества множества $\mathscr{R}_n = \{1, \dots, n\}$:

$$A = \{1, \dots, x\}, \qquad B = \{x+1, \dots, x+y\}.$$

Пронумеруем всевозможные $(r-s-1)$-элементные подмножества множества A:

$$S_1, \quad S_2, \quad \dots, \quad S_m, \qquad \text{где} \quad m = C_x^{r-s-1}.$$

Разобьем множество B на непересекающиеся подмножества по $s+1$ элементу в каждом:

$$B_i = \{x + (s+1)(i-1) + 1, x + (s+1)(i-1) + 2, \dots, x + (s+1)(i-1) + s + 1\},$$
$$i \in \left\{1, \dots, \left[\frac{y}{s+1}\right]\right\}.$$

Рассмотрим также следующее множество вершин:

$$W_n^* = \bigcup_{S_i} \bigcup_{B_j} \{S_i \cup B_j\}.$$

Оценим мощность множества W_n^*. Ясно, что

$$|W_n^*| = m \cdot \left[\frac{y}{s+1}\right] = C_x^{r-s-1} \cdot \left[\frac{y}{s+1}\right] \geqslant l(n), \qquad |W_n^*| \sim l(n).$$

Далее оценим количество ребер. Легко заметить, что если две вершины пересекаются по какому-то B_i, то они уже имеют как минимум $s+1$ общих элементов, а значит, не смежны. Получаем, что вершины $\{S_i \cup B_j\}$ и $\{S_k \cup B_h\}$ смежны, только если S_i и S_k пересекаются ровно по s элементам. Тогда степень каждой вершины равна

$$C_{r-s-1}^s \cdot C_{x-(r-s-1)}^{r-2s-1} \cdot \left(\left[\frac{y}{s+1}\right] - 1\right).$$

Теперь мы можем оценить общее количество ребер:

$$\rho(W_n^*) \leqslant \frac{l \cdot C_{r-s-1}^s \cdot C_{x-(r-s-1)}^{r-2s-1} \cdot [y/(s+1)]}{2} \sim \frac{l^2}{2} \cdot \frac{C_{x-(r-s-1)}^{r-2s-1}}{C_x^{r-s-1}} \cdot C_{r-s-1}^s$$
$$\sim \frac{l^2}{x^s} \cdot \frac{C_{r-s-1}^s \cdot (r-s-1)!}{2 \cdot (r-2s-1)!} \sim \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_{r-s-1}^s \cdot (r-s-1)!}{2 \cdot (r-2s-1)!}.$$

Воспользуемся тем, что $|W_n^*| \geqslant l(n)$, и обозначим через W_n любое $l(n)$-элементное подмножество множества W_n^*. Ввиду неравенства $\rho(W_n) \leqslant \rho(W_n^*)$ получаем, что W_n – искомое множество. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 7. Заметим, что верхняя оценка вытекает из теоремы 6 при $s=1$. Далее мы будем доказывать только нижнюю оценку.

Для каждого n возьмем подмножество вершин W_n графа $G(n,r,1)$ такое, что

$$|W_n| = l(n), \qquad l = o(n^{r-1}), \quad n^{r-2} = o(l).$$

Для каждого элемента i возьмем множество вершин K_i нашего подграфа, которые содержат элемент i:

$$K_i = \{v \mid v \in W_n,\, i \in v\}.$$

Введем обозначение $k_i = |K_i|$. Заметим, что каждая вершина входит ровно в r различных K_i, поэтому получаем

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = rl.$$

Множества K_i будут пересекаться по вершинам. Но если две вершины нашего графа соединены ребром, то они будут одновременно входить ровно в одно из K_i, так как имеют ровно один общий элемент. Тогда мы имеем

$$\rho(W_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho(K_i).$$

Также для каждой пары элементов $\{i,j\}$ возьмем множество вершин $M_{i,j}$ нашего подграфа, содержащее элементы i и j одновременно:

$$M_{i,j} = \{v \mid v \in W_n,\, \{i,j\} \subset v\}.$$

Обозначим мощности таких подмножеств $m_{i,j} = |M_{i,j}|$.

Также для каждого элемента i обозначим M_i максимальное по мощности $M_{i,j}$. Положим $m_i = |M_i|$.

Назовем элемент i *хорошим*, если для него выполнено $m_i \leqslant ((2r-1)/(2r))k_i$, а иначе – *плохим*. Множество хороших элементов назовем A, а плохих – B:

$$A = \left\{ i \;\middle|\; m_i \leqslant \frac{2r-1}{2r}\, k_i \right\}, \qquad B = \left\{ i \;\middle|\; m_i > \frac{2r-1}{2r}\, k_i \right\}.$$

Лемма 1. *Для любого хорошего элемента i выполнено*

$$\rho(K_i) \geqslant \frac{2r-1}{4r^2}\, k_i^2 - \frac{(r-1)^2}{r}\, n^{r-3} k_i.$$

Доказательство. Разделим наше доказательство на два случая

$$m_i \leqslant \frac{1}{r}\, k_i \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{r}\, k_i < m_i \leqslant \frac{2r-1}{2r}\, k_i.$$

1) Пусть для какого-то элемента i выполнено $m_i \leqslant (1/r)k_i$. Степень каждой вершины $(i, a_2, a_3, \dots, a_r)$ внутри множества вершин K_i будет не меньше

$$k_i - m_{i,a_2} - m_{i,a_3} - \dots - m_{i,a_r} \geqslant k_i - (r-1)m_i \geqslant \frac{1}{r}\, k_i.$$

Тогда получаем, что

$$\rho(K_i) \geqslant \frac{1}{2r}\, k_i^2 > \frac{2r-1}{4r^2}\, k_i^2 - \frac{(r-1)^2}{r}\, n^{r-3} k_i.$$

Лемма в этом случае доказана, перейдем ко второму более сложному случаю.

2) Пусть для элемента i выполнено

$$\frac{1}{r}\, k_i < m_i \leqslant \frac{2r-1}{2r}\, k_i.$$

Множество вершин K_i можно поделить на два подмножества: M_i и $Q_i = K_i \setminus M_i$. Также напомним, что все вершины множества M_i имеют еще какой-то общий элемент j по своему определению, а вершины множества Q_i элемент j не содержат. Возьмем любую вершину $v = (i, a_2, a_3, \ldots, a_r) \in Q_i$. Заметим, что любая вершина множества M_i, которая не смежна с v, должна содержать элементы i, j и еще хотя бы один элемент из множества $\{a_2, \ldots, a_r\}$. Тогда таких вершин не более

$$(r-1)C_{n-3}^{r-3} \leqslant (r-1)n^{r-3}.$$

Таким образом, количество вершин множества M_i, которые смежны с v, не меньше, чем $m_i - (r-1)n^{r-3}$. Получаем, что

$$\begin{aligned}\rho(K_i) &\geqslant |Q_i| \cdot (m_i - (r-1)n^{r-3}) = (k_i - m_i)(m_i - (r-1)n^{r-3}) \\ &= (k_i - m_i)m_i - (r-1)n^{r-3}(k_i - m_i).\end{aligned}$$

Оценим эту разность по частям: $k_i - m_i \leqslant (r-1)k_i/r$, поэтому

$$(r-1)n^{r-3}(k_i - m_i) \leqslant \frac{(r-1)^2}{r}\, n^{r-3} k_i.$$

Теперь рассмотрим $(k_i - m_i)m_i$ как функцию относительно m_i; это парабола с ветвями вниз, а значит, ее минимум на интервале достигается на одном из концов: при $m_i = k_i/r$ получаем $(r-1)k_i^2/r^2$, а при $m_i = (2r-1)k_i/(2r)$ получаем $(2r-1)k_i^2/(4r^2)$, что меньше. Таким образом,

$$\rho(K_i) \geqslant \frac{2r-1}{4r^2}\, k_i^2 - \frac{(r-1)^2}{r}\, n^{r-3} k_i.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i < (r-1)l + 2n^{r-2} = (r-1)l + o(l).$$

Доказательство. Каждая вершина множества W_n содержит r элементов, а значит, входит в r различных K_i и максимум в r различных M_i. Оценим сверху количество вершин, которые входят сразу в r множеств M_i. Для доказательства построим новый ориентированный граф F, где вершинами будут изначальные элементы множества $\mathscr{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а из вершины i будет выходить ребро к вершине j, если

$M_{i,j}$ выбрано в качестве M_i. Таким образом, вершин будет n, из каждой вершины выходит ровно 1 ориентированное ребро, т.е. ребер тоже n.

Если от вершины i проведено ребро к вершине j, а от j – к вершине i, то назовем эти две вершины *парой.* Каждая вершина состоит не более, чем в одной паре. Вершины, которые не состоят в парах, назовем *свободными.* Положим, что граф F содержит t пар, тогда свободных вершин будет $n - 2t$.

Каждой вершине $v = (a_1, \dots, a_r) \in W_n$ сопоставим множество вершин $a_1, \dots, a_r$ графа F. Если вершина v входит во все $M_{a_1}, M_{a_2}, \dots, M_{a_r}$, то в соответствующем ей подграфе F любое ориентированное ребро, исходящее из этих r вершин, ведет к одной из них же. Назовем множество из r вершин графа F *особенным*, если все ребра, исходящие из этих вершин, ведут опять в это множество. Если какая-то вершина из пары принадлежит особенному множеству, то и вторая вершина из этой пары обязана принадлежать ему.

Оценим количество особенных множеств. Разобьем все особенные множества на два вида: множества, которые содержат только пары, и множества, которые содержат хотя бы одну свободную вершину.

1) Если в особенном множестве будут находиться только вершины из пар, то таких множеств будет не более, чем количество способов выбрать $r/2$ пар: $C_t^{r/2} < n^{r-2}$ при $r \geqslant 4$. Таким образом, мы оценили количество особенных множеств первого вида, перейдем ко второму.

2) Пусть особенное множество второго вида содержит свободную вершину a_1. Тогда от a_1 ведет ориентированное ребро к другой вершине a_2, а от a_2 к какой-то новой вершине a_3, причем a_3 не совпадет с a_1, потому что a_1 свободная. Тогда a_1, a_2, a_3 принадлежат нашему множеству и количество способов выбрать остальные вершины не больше, чем C_{n-3}^{r-3}. Получаем, что общее количество особенных множеств со свободной вершиной a_1 не больше, чем C_{n-3}^{r-3}. Заметим, что это верно для любой свободной вершины a_1, поэтому всего особенных множеств второго вида не больше, чем

$$(n-2t)C_{n-3}^{r-3} < n^{r-2}.$$

Получаем, что в сумме особенных множеств первого и второго вида меньше, чем $2n^{r-2}$. Из этого следует, что максимум $2n^{r-2}$ вершин изначального графа состоят сразу в r множествах M_i, а значит, суммарная мощность M_i не больше, чем

$$(r-1)l + 2n^{r-2} = (r-1)l + o(l).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i \in A} k_i > \frac{r}{2r-1}\, l - \frac{4r}{2r-1}\, n^{r-2}.$$

Доказательство. Заметим, что $k_i < (2r)m_i/(2r-1)$ для плохого элемента i. Тогда

$$\sum_{i \in B} k_i < \frac{2r}{2r-1} \sum_{i \in B} m_i,$$

а по лемме 2 имеем

$$\sum_{i\in B} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i < (r-1)l + 2n^{r-2}.$$

Получаем

$$\sum_{i\in B} k_i < \frac{2r}{2r-1}((r-1)l + 2n^{r-2}) = \frac{2r(r-1)}{2r-1}\,l + \frac{4r}{2r-1}\,n^{r-2}.$$

Тогда для хороших элементов имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} k_i &= \sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i\in B} k_i = rl - \sum_{i\in B} k_i > rl - \left(\frac{2r(r-1)}{2r-1}\,l + \frac{4r}{2r-1}\,n^{r-2}\right)\\ &= \frac{r}{2r-1}\,l - \frac{4r}{2r-1}\,n^{r-2}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Наконец, мы сможем оценить общее число ребер. Используем лемму 1 и получим

$$\begin{aligned}\rho(W_n) &= \sum_{i=1}^{n} \rho(K_i) \geqslant \sum_{i\in A} \rho(K_i) \geqslant \sum_{i\in A}\left(\frac{2r-1}{4r^2}\,k_i^2 - \frac{(r-1)^2}{r}\,n^{r-3}k_i\right)\\ &\geqslant \frac{2r-1}{4r^2}\sum_{i\in A} k_i^2 - (r-1)^2 n^{r-3} l.\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и лемму 3, имеем

$$\sum_{i\in A} k_i^2 \geqslant \frac{1}{|A|}\left(\sum_{i\in A} k_i\right)^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i\in A} k_i\right)^2 \geqslant \frac{(rl/(2r-1) - 4rn^{r-2}/(2r-1))^2}{n}.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\rho(W_n) &\geqslant \frac{2r-1}{4r^2}\cdot\frac{(rl/(2r-1) - 4rn^{r-2}/(2r-1))^2}{n} - (r-1)^2 n^{r-3} l\\ &= \frac{1}{4(2r-1)}\frac{l^2}{n} + o\left(\frac{l^2}{n}\right).\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 7 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. Frankl, R. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.

[2] A. Raigorodskii, “Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters”, Contemp. Math., **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.

[3] А. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (337) (2001), 107–146.

[4] V. Boltyanski, H. Martini, P. Soltan, *Excursions Into Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[5] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.

[6] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “Об одном обобщении кнезеровских графов”, *Матем. заметки*, **107**:3 (2020), 351–365.

[7] А. В. Бердников, А. М. Райгородский, “Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида”, *Пробл. передачи информ.*, **57**:2 (2021), 44–50.

[8] П. А. Огарок, А. М. Райгородский, “Об устойчивости числа независимости некоторого дистанционного графа”, *Пробл. передачи информ.*, **56**:4 (2020), 50–63.

[9] Ф. А. Пушняков, А. М. Райгородский, “Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа”, *Матем. заметки*, **107**:2 (2020), 286–298.

[10] P. Frankl, Z. Füredi, “Forbidding just one intersection”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **39**:2 (1985), 160–176.

[11] Ф. А. Пушняков, “О числе ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 550–558.

[12] Ф. А. Пушняков, “Новая оценка числа ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа”, *Пробл. передачи информ.*, **51**:4 (2015), 71–77.

[13] Ф. А. Пушняков, *О числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов*, Дис. … канд. физ-матем. наук, 2020.

[14] Ф. А. Пушняков, “О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов”, *Матем. заметки*, **105**:4 (2019), 592–602.

[15] Ф. А. Пушняков, А. М. Райгородский, “Оценка числа ребер в подграфах графа Джонсона”, *Докл. АН*, **499** (2021), 40–43.

[16] L. E. Shabanov, A. M. Raigorodskii, “Turán type results for distance graphs”, *Discrete Comput. Geom.*, **56**:3 (2016), 814–832.

[17] Л. Э. Шабанов, “Турановские оценки для дистанционных графов в тонкой слойке”, *Комбинаторика и теория графов. IX*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **464**, ПОМИ, СПб., 2017, 132–168.

Я. К. Шубин
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: shubin.yakoff@gmail.com

Поступило
23.11.2021
После доработки
29.01.2022
Принято к публикации
01.02.2022