Многогранники и мультиобходы бинарных деревьев

Щербаков Олег

7 мая 2024 г.

Задача Громова о минимальном заполнении

M — риманово многообразие с метрикой ρ.
W плёнка, затягивающая M,
то есть W — компактное многообразие и $\partial W = M$.
Пусть на W задана метрика d такая, что $\forall x, y \in M \quad d(x, y) \geq \rho(x, y)$.
Метрическое пространство (W, d) — *заполнение* метрического пространства (M, ρ).
Задача Громова — описание точной нижней грани объёмов заполнений и описание таких пространств (W, d), называемых *минимальными заполнениями*.
см. например, M.Gromov “Filling Riemannian manifolds”, J. Differential Geom., 18.1 (1983) 1-147.

Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении

M — конечное псевдометрическое пространство с метрикой ρ.
$G = (V, E, \phi)$ — связный граф, соединяющий M, то есть $M \subset V$.
$\omega : E \to [0, \infty)$ — весовая функция. $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — взвешенный граф.
$\omega(\mathcal{G}) := \sum\limits_{e \in E} \omega(e)$ — вес графа. Γ_{ij} — путь из вершины i в j.
На $\mathcal{G}$ есть псевдометрика $d_\omega(i, j) := \min\limits_{\Gamma_{ij}} \sum\limits_{e \in E} \omega(e)$
Пусть $\forall i, j \in M \quad d_\omega(i, j) \geq \rho(i, j)$, тогда $\mathcal{G}$ — *заполнение* (M, ρ).
Вес минимального заполнения $\mathrm{mf}(M) := \inf\limits_{\mathcal{G}} \omega(G)$.
$\mathcal{G}$ — *минимальное заполнение* M, если $\omega(\mathcal{G}) = \mathrm{mf}(M)$.
Если зафиксировать тип графа, то получаем *минимальные параметрические заполнения*.
см. [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Матем. сб., 203:5 (2012), 65-118.

Обобщённые минимальные заполнения

M — конечное множество с симметрической функцией $\rho(x, y)$, необязательно неотрицательной!
Для взвешенного графа $\mathcal{G}$ разрешим весовой функции ω принимать отрицательные значения.
$\mathcal{G}$ обобщенное заполнение M, если

$$\forall x, y \in M : \quad d_\omega(x, y) \geq \rho(x, y).$$

Теорема. Пусть M – псевдометрическое пространство. Тогда $\mathrm{mf}\,(M) = \mathrm{mf}_-\,(M)$.
Теорема доказана в: Иванов А. О.,Овсянников З. Н., Стрелкова Н. П., Тужилин А. А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2012. №5. С.3-8.

Бинарные деревья

Дерево G у которого все вершины могут иметь только степень 1 и 3 называем *бинарными*.
Теорема. (Иванов А.О., Тужилин А.А. [1]) Для любого конечного псевдометрического пространства M существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом.

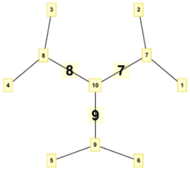
Далее G — бинарное дерево, ∂G — вершины степени 1, причём $\partial G = M$.
Для любых двух вершин G существует **единственный** путь Γ_{ij} из i в j, далее нас будут интересовать только граничные пути, то есть соединяющие вершины из $\partial G = M$.
Далее m — число граничных вершин, $d = C_m^2$ — число их пар, $r = 2m - 3$ — число рёбер дерева G.

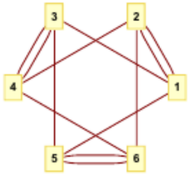
Мультиобходы

Мультициклический порядок кратности n на множестве M — это отображение $\sigma : \mathbb{Z}_{mn} \to M$, такое, что

$$1) \quad \sigma(i) \neq \sigma(i+1) \quad \forall i \qquad 2) \quad |\sigma^{-1}(v)| = n \quad \forall v \in M$$

Мультиобход граничных вершин $\partial G = M$ дерева G — такой мультициклический порядок, что через каждое ребро дерева G проходят ровно $2n$ граничных путей.





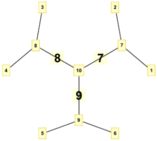
Пример.

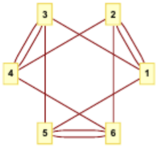
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (124356213465)$$

Эквивалентность мультиобходов

Определим векторное пространство $U = \mathbb{R}^d$.
Вектор мультиобхода $w^\sigma := (\sigma_{12}, \ldots, \sigma_{(m-1)m})$ где σ_{ij} — число граничных путей связывающих i и j вершину в мультиобходе σ.
Мультиобходы σ и τ называются *эквивалентными*, если $w^\sigma = w^\tau$, обозначим это так: $\sigma \cong \tau$.
Мультиграф мультиобхода. По мультиобходу σ построим мультиграф G^σ, его вершины — это M, а кратность ребра соед. вершины i и j положим равной σ_{ij}.
Пример.

$$\sigma = (124356213465)$$



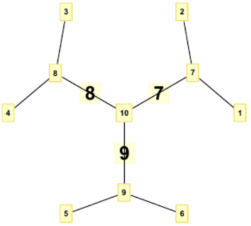


$$w^\sigma = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2)$$

Матрица разрезов (транспонированная)

По всякому бинарному дереву G построим матрицу $A = A(G)$ из r строк, соответсвующих рёбрам и d столбцов, соответствующих парам вершин:

$$a_{ij}^k := \begin{cases} 1, \text{если} & e_k \in \Gamma_{ij} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Если w^σ — мультиобход кратности n, то $Aw^\sigma = 2n\mathbb{I}$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \ldots, 1)$

Фундаментальная теорема.

Теорема. Для всякого вектора u с целыми неотрицательными координатами, такого, что $Au = 2n\mathbb{I}$ существует мультиобход σ, для которого данный вектор является вектором мультиобхода.

Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб., 2013. Т.204, №9. С.51-72.

Многогранник бинарного дерева

В работе Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Cham. 2022. pp. 165-182
по бинарному дереву G построили матрицу разрезов A. По Этой матрице в U построим выпуклый многогранник $\mathbf{X}$:
Вершины $\mathbf{X}$ могут быть найдены с помощью следующей теоремы:
Теорема. Для того, чтобы точка x была угловой, необходимо и достаточно, чтобы нашлись линейно-независимые столбцы $A_{\varkappa_1}, A_{\varkappa_2}, \dots A_{\varkappa_r}$ матрицы A, такие что:

$$A_{\varkappa_1} x_{\varkappa_1} + A_{\varkappa_2} x_{\varkappa_2} + \dots + A_{\varkappa_r} x_{\varkappa_r} = \mathbb{I},$$

причём $x_{\varkappa_s} \geq 0$, а все остальные $x_{ij} = 0$.
Техническая сложность: число выборов $C_d^r = C_{\frac{m(m-1)}{2}}^{2m-3}$ очень велико уже при $m = 12$.

Аддитивная полугруппа мультиобходов

Сумма. По σ и τ построим векторы w^σ w^τ, по фундаментальной теореме существует мультиобход η такой, что $w^\eta = w^\sigma + w^\tau$.

$$\sigma + \tau := \eta$$

Умножение на натуральное число. Для мультиобхода σ по фундаментальной теореме построим мультиобход η такой, что $w^\eta = nw^\sigma$

$$n\sigma := \eta$$

Приводимость. Мультиобход σ назовём неприводимым, если справедлива импликация:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\sigma = \tau + \eta \Longrightarrow \exists k : \quad \tau = k\sigma, \eta = (n-k)\sigma$$

и приводимым, в противном случае. Множество классов эквивалентности неприводимых мультиобходов обозначим $\mathcal{S}(G)$.

Формула веса минимального параметрического заоплнения

Мультипериметр мультиобхода: $p(M,\sigma)=\frac{1}{2n}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_{mn}}\rho(\sigma(k),\sigma(k+1))$.

В работе: Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб., 2013. Т.204, №9. С.51-72.   получена формула

$$\mathrm{mf}\,(M)=\min_{G}\max_{\sigma\in\mathcal{S}(G)}p(M,\sigma)$$

Формула веса минимального параметрического обобщённого заполнения:

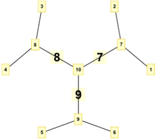
$$\mathrm{mpf}_{-}\,(M,G)=\max_{x\in\mathbf{X}}\sum_{i<j}\rho_{ij}x_{ij}$$

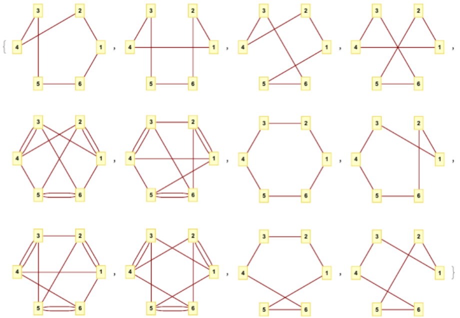
Из работы Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Cham. 2022. pp. 165-182

Пример

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1), && \tfrac{1}{2}(1,0,1,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1),\\
&\tfrac{1}{2}(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1), && \tfrac{1}{2}(1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1),\\
&\tfrac{1}{4}(2,1,0,0,1,0,1,1,0,2,0,1,1,0,2), && \tfrac{1}{4}(2,0,1,1,0,1,0,0,1,2,0,1,1,0,2),\\
&\tfrac{1}{2}(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1), && \tfrac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1),\\
&\tfrac{1}{4}(2,0,1,0,1,1,0,1,0,2,1,0,0,1,2), && \tfrac{1}{4}(2,1,0,1,0,0,1,0,1,2,1,0,0,1,2),\\
&\tfrac{1}{2}(1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1), && \tfrac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{16}+d_{24}+d_{34}+d_{35}+d_{56}), \quad \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{14}+d_{26}+d_{34}+d_{35}+d\\
\tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{15}+d_{24}+d_{34}+d_{36}+d_{56}), \quad \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{14}+d_{25}+d_{34}+d_{36}+d\\
\tfrac{1}{4}(2d_{12}+d_{13}+d_{16}+d_{24}+d_{25}+2d_{34}+d_{36}+d_{45}+2d_{56}),\\
\tfrac{1}{4}(2d_{12}+d_{14}+d_{15}+d_{23}+d_{26}+2d_{34}+d_{36}+d_{45}+2d_{56}),\\
\tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{16}+d_{23}+d_{34}+d_{45}+d_{56}), \quad \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{13}+d_{26}+d_{34}+d_{45}+d\\
\tfrac{1}{4}(2d_{12}+d_{14}+d_{16}+d_{23}+d_{25}+2d_{34}+d_{35}+d_{46}+2d_{56}),\\
\tfrac{1}{4}(2d_{12}+d_{13}+d_{15}+d_{24}+d_{26}+2d_{34}+d_{35}+d_{45}+2d_{56}),\\
\tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{15}+d_{23}+d_{34}+d_{46}+d_{56}), \quad \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{13}+d_{25}+d_{34}+d_{46}+d
\end{gathered}
$$





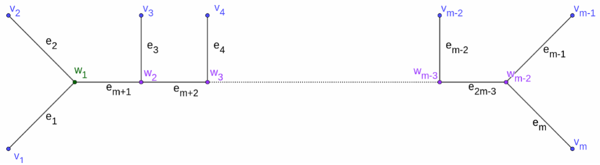
Неприводимые мультиобходы и вершины многогранника

Точка мультиобхода. По мультиобходу σ кратности n определим точку многогранника:

$$x^{\sigma} := \frac{1}{2n} w^{\sigma}$$

(Напомним, что $Aw^{\sigma} = 2n\mathbb{I}$, тогда $Ax^{\sigma} = \mathbb{I}$.)
Построили естественное отображение $\mathcal{T} \to \mathbf{X}_{\mathbb{Q}}$.
Теорема. Пусть $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ и $x^{\sigma_1}, \ldots, x^{\sigma_s}$ — соответствующие точки многогранника $\mathbf{X}$, тогда $x^{\sigma_1}, \ldots, x^{\sigma_s}$ — множество всех вершин этого многогранника.

Змея



Теорема. Неприводимые мультиобходы бинарного дерева типа змея исчерпываются 1-обходами:

$$(12 i_1 i_2 \ldots i_p m\, m j_q j_{q-1} \ldots j_1)$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ и $\{i_1, \ldots i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{3, 4, \ldots m-1\}$, $p + q = m - 3$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Следствие. Многогранник змеи с m граничными вершинами имеет ровно 2^{m-3} вершин.

Пример. Обходу $\sigma = (123\ldots m)$ соответтвует вершина

$$x = \frac{1}{2}(\underbrace{1,0,0,\ldots 0}_{m-1}, \underbrace{1,0,0,\ldots 0}_{m-2}, \ldots \underbrace{1,0,0}, \underbrace{1,0}, \underbrace{1})$$

Данной вершине соответствует мультипериметр мультиобхода

$$2P(M,\sigma) = \rho_{12} + \rho_{23} + \ldots + \rho_{(m-1)m} + \rho_{1m}$$

О бинарных деревьев с 3 усами

- Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с 3 усами (далее $\mathfrak{B}_3$) не превсходит 2.
- Неприводимые 2-обходы существуют у любого бинарного дерева с 3 усами.

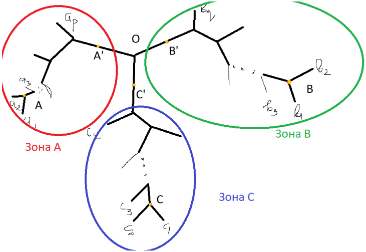


Рис.: Бинарное дерево $\mathfrak{B}_3$

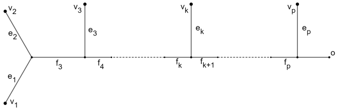


Рис.: Побег

- Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева из 4 т.н. побегов не превосходит 4.
- Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева из 5 т.н. побегов не превосходит 8.

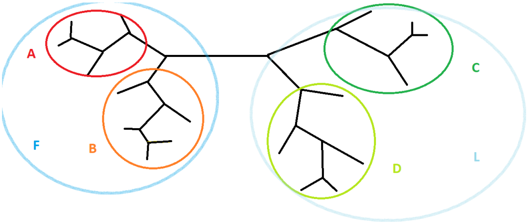
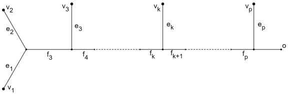


Рис.: Бинарное дерево $\mathfrak{B}_4^0$

Структура мультиобхода на побеге



Лемма

Для любого l-обхода σ дерева G справедливо:

$$\sigma \cong (\ldots * A_1 * \ldots * A_2 * \quad \ldots \quad * A_l * \ldots) \tag{1}$$

где $A_k, k = \overline{1..l}$ представляют собой цепи вида

$$A_k = J_k 1 I_k \tag{2}$$

$$J_k = j_{q_k}^k \ldots j_2^k j_1^k \text{ и } I_k = i_1^k i_2^k \ldots i_{r_k}^k, q_k + r_k = p - 1$$

$$j_{q_k}^k \ldots j_2^k j_1^k \sqcup i_1^k i_2^k \ldots i_{r_k}^k = \{2, 3, 4, \ldots, p\}$$

$$j_{q_1}^k > \ldots > j_2^k > j_1^k \quad \text{и} \quad i_1^k < i_2^k < \ldots < i_{r_k}^k$$

*Символом * обозначены какие-то вершины, не входящие в побег A.*

Бинарные деревья с тремя парами усов: ограничение на Кратность и общий вид

Теорема. Неприводимые мультиобходы бинарного дерева из $\mathfrak{B}_3$ состоят из цепей A_k, B_k, C_k для соответствующих побегов и могут быть только такими:

$$\text{а)} \quad \sigma \cong (A_1 B_1 C_1) \qquad \text{или} \qquad \text{б)} \quad \sigma \cong (A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2),$$

причём в случае б) $A_1 = a_p A_1'$ и $A_2 = A_2' a_p$ или $A_1 = A_1' a_p$ и $A_2 = a_p A_2'$, аналогично для частей B_i и C_i.

Теорема. Неприводимых 2-обходов у бинарного дерева из $\mathfrak{B}_3$ не более чем $2^{2(m-5)}$.

Компьютерные эксперименты

№	m	Диаграмма Юнга	1-обходов	2-обходов	Всего
1	6	$\varnothing$	8	4	12
2	7	$\square$	16	16	32
3	8	$\square\square$	32	56	88
4	8	$\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$	32	64	96
5	9	$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$	64	256	320
6	9	$\square\square\square$	64	164	248
7	9	$\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$	64	224	288

Теорема о нормальной форме мультиобхода

Теорема. Для всякого l-обхода σ бинарного дерева G имеет место эквивалентность:

$$\sigma \cong (M_1 M_2 \dots M_l)$$

причём каждое выражение (M_i) — 1-обход.

Следствие. Максимальная кратность бинарного дерева с m граничными вершинами не превосходит m.

— — —

Ранее А.О.Иванов и А.А.Тужилин доказали, что максимальная кратность неприодимого мультиобхода не превосходит числа 2^{2m-5}.

Спасибо за внимание!