

# Оценки плотности упаковки шаров с радиусами в интервале $[\rho, 1]$

Аркадий Алиев

Высшая Школа Экономики

- Определения и постановка задачи
- Примеры и известные оценки
- Упаковка кругов с радиусами в интервале  $[r, 1]$ 
  - Оценка плотности через разбиение на треугольники с вершинами в центрах шаров (Von August Florian, 1960)
  - Оценка плотности через разбиение на многоугольные клетки содержащие шары (Von Gerd Blind, 1969)
- Обобщение оценки Blind1969 на размерность 3

## Упаковка

Пусть  $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i=1,2,\dots}$  — семейство выпуклых тел  $K_1, K_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ . Семейство  $\mathcal{K}$  называется упаковкой, если внутренности  $\text{int } K_i$  не пересекаются.

## Плотность упаковки

$$\delta^d(\mathcal{K}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\bigcup_i K_i \cap [-k, k]^d|}{|[-k, k]^d|}.$$

### Шары нескольких радиусов

Обозначим через  $\delta_{>p}^d$  максимальное значение  $\delta^d(\mathcal{K})$  среди всех семейств, содержащих только шары радиусов от  $p$  до 1.

### Шары нескольких радиусов из конечного набора

Обозначим через  $\delta_{r_1, \dots, r_m}^d$  максимальное значение  $\delta^d(\mathcal{K})$  среди всех семейств, содержащих только шары радиусов  $r_1, \dots, r_m$ .

### Постановка задачи

Хотим оценить  $\delta_{>p}^d, \delta_{r_1, \dots, r_m}^d$

### Открытый вопрос

Найти  $p < 1$  такое что  $\delta_{>p}^d = \delta_1^d$ .

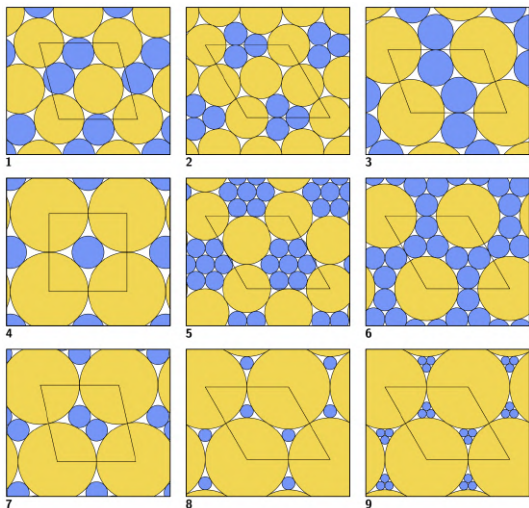


Рис.: Плотнейшие упаковки шаров двух радиусов

# Известные оценки $\delta_{1,r}^2$

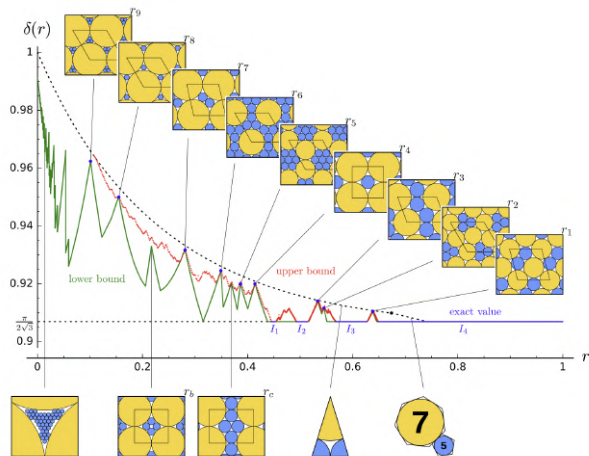


Рис.: Плотности бинарных упаковок

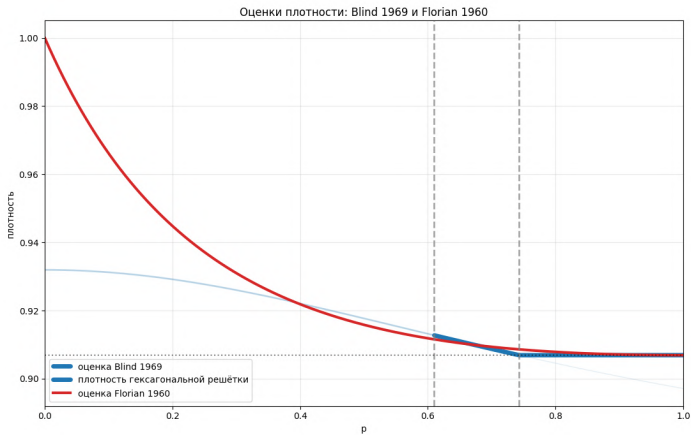


Рис.: Оценки  $\delta_{>p}^2$

# Оценка плотности через разбиение на треугольники: картинка

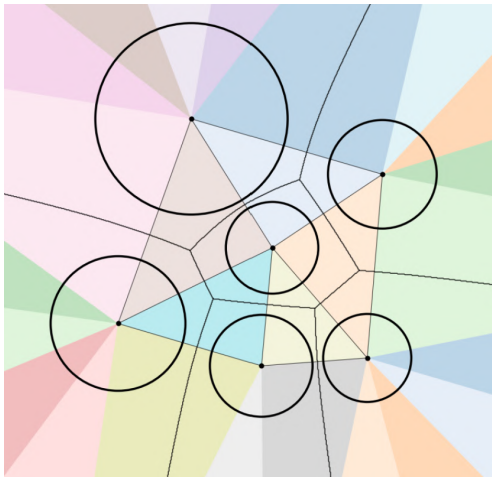


Рис.: Триангуляция Делоне

# Оценка плотности через разбиение на треугольники: зачем нужна триангуляция Делоне

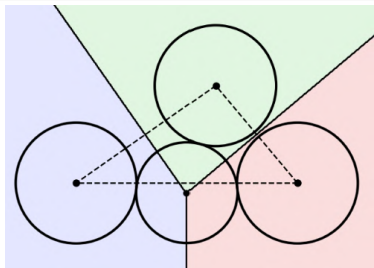


Рис.: Хороший треугольник

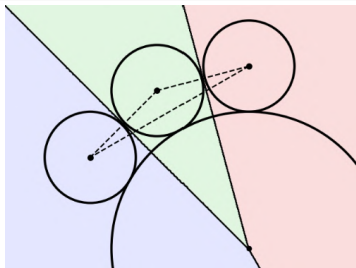


Рис.: Плохой треугольник

## В неуплотняемой упаковке нет плохих треугольников

- В плохом треугольнике радиус опорной окружности больше чем минимум из радиусов остальных
- Если при триангуляции упаковки возникает плохой треугольник, то можно в эту упаковку добавить еще один круг

# Оценка плотности через разбиение на треугольники: общая схема

## План доказательства

- Строим триангуляцию Делоне для упаковки.
- Плотность упаковки не больше максимальной плотности отдельного треугольника
- Оцениваем плотность отдельного треугольника

# Оценка плотности через разбиение на треугольники: Результат

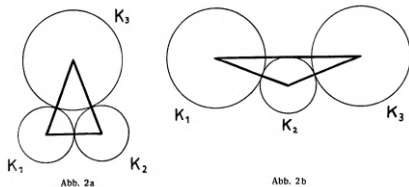


Рис.: Самые плотные треугольники

Обозначение

$$s(p) = \frac{\pi p^2 + 2(1 - p^2) \arcsin\left(\frac{p}{1+p}\right)}{2p\sqrt{2p+1}}$$

Результат (August Florian, 1960)

$$\delta_{>p}^2 \leq s(p).$$

# Оценка плотности через разбиение на треугольники: Картинка

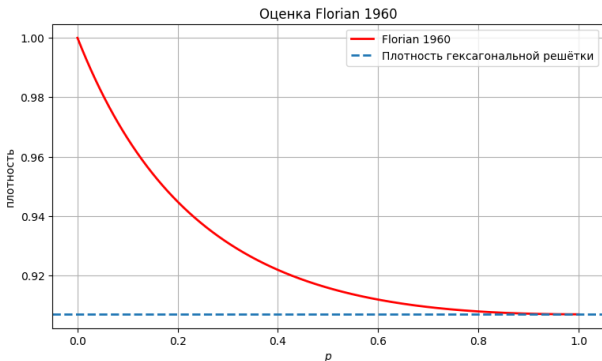


Рис.: Финальная оценка

Результат (August Florian, 1960)

$$\delta_{>p}^2 \leq s(p).$$



# Оценка плотности через разбиение на многоугольные клетки: Картинка

## Power cell

$$Pow(x, K_i) = d(x, O_i)^2 - r_i^2;$$

$$T_i = \{x : \arg \min_m Pow(x, K_m) = i\}.$$

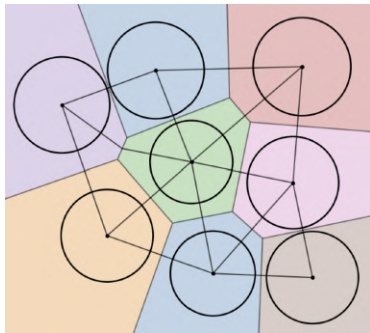


Рис.: Power cells

# Оценка плотности через разбиение на многоугольные клетки: общая схема

## План доказательства для единичных шаров

- Шару  $K_i$  сопоставляем power cell  $T_i$  - многоугольник с  $e_i$  сторонами
- Из свойств планарных графов получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e_1 + \dots + e_m}{m} = \bar{e} \leq 6.$$

- Оцениваем площадь клетки  $|T_i| \geq e_i \tan \frac{\pi}{e_i} = f(e_i)$
- Заменяем клетки на одну среднюю

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum |T_i| \geq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum f(e_i) \geq$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f \left( \frac{1}{m} \sum e_i \right) \geq f(6).$$

# Адаптация для шаров с радиусами в интервале $[p, 1]$ : Интуиция

## Интуиция

- Клетки с большим количеством сторон пусть будут вокруг больших шаров, с маленьким количеством сторон вокруг маленьких
- Большие клетки будут учитываться при подсчете плотности с большим весом и результат может оказаться плотнее гексагональной решетки

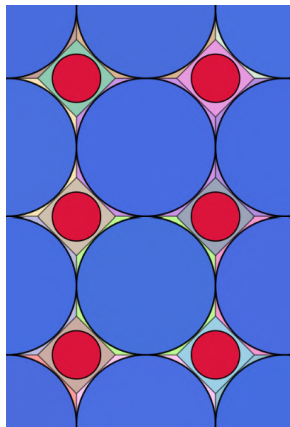


Рис.: Пример

# Адаптация для шаров с радиусами в интервале $[p, 1]$ : Идея и обозначения

## Идея

Отдельно будем оценивать плотность для клеток с маленьким числом сторон, отдельно с большим, потом объединим.

## Обозначения

- Пусть в области  $[-R, R]^2$  при  $R \rightarrow \infty$  находится  $u$  клеток с количеством сторон  $< b$  и  $v$  с количеством сторон  $> b$ .
- Среднее количество сторон у клеток с  $< b$  сторонами обозначим  $\bar{e}_<$
- Среднее количество сторон у клеток с  $> b$  сторонами обозначим  $\bar{e}_>$

## Ограничение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{u\bar{e}_< + v\bar{e}_>}{u + v} \leq 6.$$

### План доказательства для радиусов в интервале $[p, 1]$

- Клетки с количеством сторон  $e_i < 6$  заменяем на среднюю с количеством сторон  $\bar{e}_< \leq 5$ . Мысленно вписываем туда круг радиуса  $p$
- Клетки с количеством сторон  $e_i > 6$  заменяем на среднюю с количеством сторон  $\bar{e}_> \geq 7$ . Мысленно вписываем туда круг радиуса 1
- Оцениваем суммарную плотность этих двух объединенных клеток
- Добавляем 6-угольные клетки, для которых плотность оценивается через гексагональную

# Адаптация для шаров с радиусами в интервале $[p, 1]$ : Объединение маленьких и больших клеток

## Объединение усредненных клеток

При некоторых  $p$ .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{u\pi p^2 + v\pi}{up^2 f(\bar{e}_<) + vf(\bar{e}_>)} \leq \frac{\pi p^2 + \pi}{p^2 f(5) + f(7)}.$$

При условии

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{u\bar{e}_< + v\bar{e}_>}{u+v} \leq 6 \\ \bar{e}_< \leq 5 \\ \bar{e}_> \geq 7 \\ f(n) = n \tan \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

# Адаптация для шаров с радиусами в интервале $[p, 1]$ : Результат

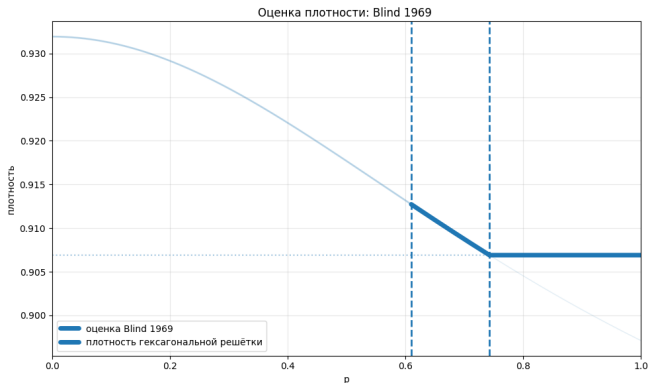
## Обозначения

- $f(n) = n \tan \frac{\pi}{n}$  - площадь правильного  $n$ -угольника описанного вокруг единичной окружности
- $g(p) := \pi \frac{p^2+1}{p^2 f(5)+f(7)}$  - суммарная плотность маленькой 5-угольной клетки и большой 7-угольной
- $p^* : g(p^*) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, p^* \approx 0.78$
- $p_0 \approx 0.61$  - некоторая техническая нижняя граница для  $p$ , возникающая в вычислениях

## Результат (Von Gerd Blind, 1969)

- При  $p \in [p_0, p^*]$  имеем  $\delta_{>p}^2 \leq g(p)$
- При  $p \in [p^*, 1]$  имеем  $\delta_{>p}^2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

# Адаптация для шаров с радиусами в интервале $[p, 1]$ : Картинка



## Результат (Von Gerd Blind, 1969)

- При  $p \in [p_0, p^*]$  имеем  $\delta_{>p}^2 \leq g(p)$
- При  $p \in [p^*, 1]$  имеем  $\delta_{>p}^2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

## Основные шаги в Blind 1969

- Разбиение плоскости на клетки
- Оценка среднего количества соседей у клетки
- Усреднение клеток с разным числом соседей

### Power cell

$$Pow(x, K_i) = d(x, O_i)^2 - r_i^2;$$

$$T_i = \{x : \arg \min_m Pow(x, K_m) = i\}.$$

# Переход к размерности 3: Оценка среднего количества граней

## Интуиция

Если у двух шаров клетки соседние, то шары не могут находиться на слишком большом расстоянии друг от друга

## Оценка

Среднее число граней  $\leq 123$  для  $p > 0.98$ .

### Наименьший описанный многогранник с $n$ гранями

Пусть  $v_d(n)$  - Наименьший объем описанного вокруг единичной сферы многогранника с  $n$  граням

### Оценка на объем снизу

- В размерности 2 знаем что оптимум это правильный  $n$  угольник. То есть  $v_2(n) = f_2(n) = n \tan \frac{\pi}{n}$ . Кроме того  $f(n)$  выпукла по  $n$ , то есть удобно можем усреднить.
- В размерности 3 известна нижняя оценка Average Polygon Ideal estimate

$$v_3(n) \geq f_3(n) = 2(n-2) \tan \frac{\pi n}{6(n-2)} \left( 4 \sin^2 \frac{\pi n}{6(n-2)} - 1 \right),$$

и это тоже выпуклая функция, поэтому усреднять будем через нее.

## Обозначения

*Оценка снизу на объём клетки с  $n$  гранями*

$$f(n) = 2(n-2) \tan\left(\frac{\pi n}{6(n-2)}\right) \left(4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{6(n-2)}\right) - 1\right)$$

*Средняя плотность маленькой клетки с  $e-1$  гранями и большой с  $e+1$  гранями*

$$g_e(p) = \frac{4\pi}{3} \frac{p^3 + 1}{p^3 f(e-1) + f(e+1)}$$

*Среднее число граней у power cell в разбиении*

$$\bar{e} \leq 123 \text{ для } p > 0.98.$$

# Переход к размерности 3: Результат

## Допустимый интервал

$[p_0, p^*]_{\bar{e}} \subset [0, 1]$  определяется из

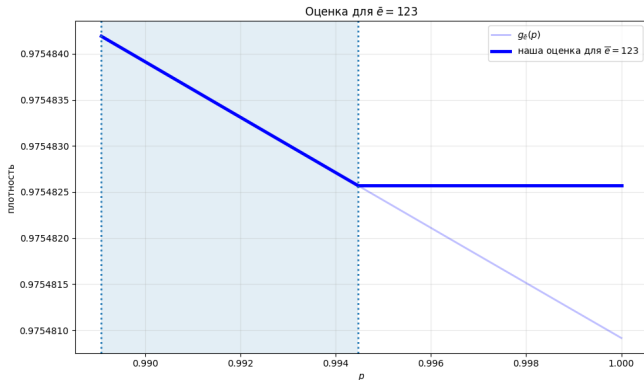
$$\begin{cases} p \geq \left( \frac{f(\bar{e}-1) - f(\bar{e}+1)}{-f'(\bar{e}-1)} - 1 \right)^{1/3}; \\ p \geq \left( \frac{f'(\bar{e}+1)}{f'(\bar{e}-1)} \right)^{1/3}; \\ p \geq \left( \frac{1}{\frac{f(\bar{e}-1) - f(\bar{e}+1)}{-f'(\bar{e}+1)} - 1} \right)^{1/3}; \\ g_{\bar{e}}(p) \geq \frac{4\pi}{3} f(\bar{e}); \end{cases}$$

## Аналог Blind1969 в размерности 3

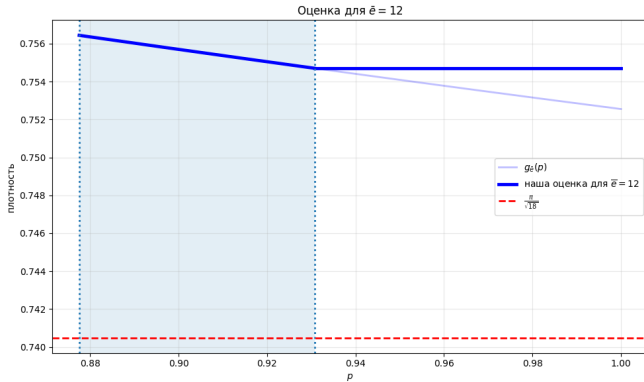
Пусть среднее количество соседей у клетки в Power cell разбиении равно  $\bar{e}$ . Тогда

- При  $p \in [p_0, p^*]_{\bar{e}}$  имеем  $\delta_{>p}^3 \leq g_{\bar{e}}(p)$
- При  $p \in [p^*, 1]$  имеем  $\delta_{>p}^3 \leq \frac{4\pi}{3f(\bar{e})}$ .

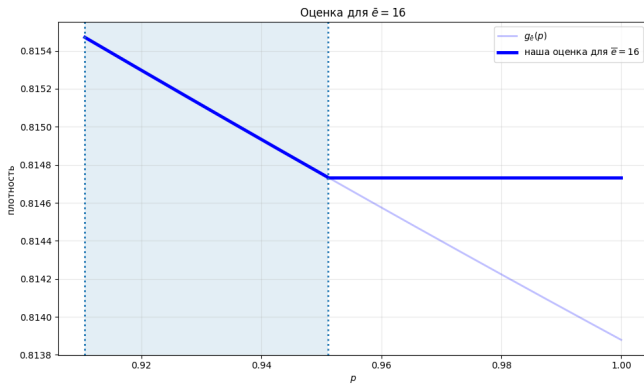
# Переход к размерности 3: Картинка для $\bar{\epsilon} = 123$



# Переход к размерности 3: Картинка для $\bar{\epsilon} = 12$



# Переход к размерности 3: Картинка для $\bar{\epsilon} = 16$



## Проблемы подхода

- Теоретический максимум метода даст оценку как в гипотезе додекаэдра (немного хуже оптимальной плотности)
- Не очень понятно как оценить среднее количество соседей

- Определения и постановка задачи
- Примеры и известные оценки
- Упаковка кругов с радиусами в интервале  $[r, 1]$ 
  - Оценка плотности через разбиение на треугольники с вершинами в центрах шаров (Von August Florian, 1960)
  - Оценка плотности через разбиение на многоугольные клетки содержащие шары (Von Gerd Blind, 1969)
- Обобщение оценки Blind1969 на размерность 3

## Литература

- G. Blind. Über Unterdeckungen der Ebene durch Kreise. *Journal für die Reine Angewandte Mathematik*, 236:145–173, 1969.
- A. Florian. Ausfüllung der Ebene durch Kreise. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 9:300–312, 1960.
- Fernique, Thomas & Pchelina, Daria. (2025). Bounding the density of binary sphere packing. 10.48550/arXiv.2505.14110.
- Fernique, T. (2024). Density of Binary Disc Packings: Lower and Upper Bounds. *Experimental Mathematics*, 33(2), 235–246. <https://doi.org/10.1080/10586458.2022.2061651>

## Контакты

- @alievajr
- arkadiy.aliev@gmail.com