Изотермическая система координат на поверхностях вращения

И.Х. Сабитов

31/10/2023

План доклада

1. История вопроса
2. Случай поверхностей вращения рода 0
3. Случай поверхностей вращения рода 1

1. Краткая история вопроса

Внутренние координаты (u, v) поверхности называются *изотермическими*, если в них первая форма поверхности представляется в виде

$$ds^2 = \Lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2). \tag{1}$$

Известно, что на любой поверхности при очень слабых условиях их регулярности локально можно ввести изотермические координаты и относительно атласа таких координат поверхность может быть истолкована как риманова поверхность с соответствующей комплексной структурой, см. [1] и [2]. Но сама операция введения изотермических координат описывается весьма сложно: даже в наиболее простом случае односвязных поверхностей надо решать некоторую систему Бельтрами, решение которой по известному уравнению поверхности явно не выписывается, а только доказывается его существование в виде предела сходящейся бесконечной последовательности решений некоторых довольно сложных интегральных уравнений, см. [3].

2. Случай поверхностей вращения рода 0

Но в случае поверхности вращения процесс перехода от известного ее классического представления в функции уравнения меридиана к ее уравнению в изотермических координатах удается описать в простом явном виде, тем более, что в этом классе поверхностей изотермические координаты оказываются введенными глобально. Мы рассмотрим два класса поверхностей вращения - гомеоморфные сфере и тору.

Поверхности рода 0. Пусть поверхность S получена вращением вокруг оси Oz плоской кривой $\Gamma : x = x(\sigma), z = z(\sigma)$, где σ - натуральный параметр, для которого $x_\sigma'^2 + z_\sigma'^2 = 1$ с условиями $x(0) = z(0) = 0, x(L) = 0, z(L) > 0$ и $x(\sigma) > 0$ при $0 < \sigma < L$, где L - длина меридиана. Для темы статьи достаточно предположить, что гладкость кривой класса C^1 (а при необходимости вычисления гауссовой кривизны предполагаем, что гладкость меридиана класса C^2). Кроме того, не обязательно, чтобы касательная к Γ в точках $\sigma = 0$ и $\sigma = L$ была ортогональна к оси вращения, т.е. поверхность в полюсах может иметь выступающие заострения или, наоборот, углубления. Тогда поверхность представляется уравнениями

$$x = x(\sigma)\cos\varphi,\ \ y = x(\sigma)\sin\varphi,\ \ z = z(\sigma). \tag{2}$$

Введем на S другие параметры (u, v), чтобы поверхность была представлена в явном виде как гомеоморфный образ единичной сферы с центром в $(0, 0, 1)$, параметризованной стереографической проекцией на горизонтальную плоскость с декартовыми координатами (u, v) с центром $(0, 0)$, касающуюся сферы в ее южном полюсе $(0, 0, 0)$. При таком выборе системы координат и параметров единичная сфера имеет уравнение

$$X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 - 1 = 0$$

с координатами точек

$$X = \frac{4u}{4 + u^2 + v^2},\ Y = \frac{4v}{4 + u^2 + v^2},\ Z = \frac{2(u^2 + v^2)}{4 + u^2 + v^2}. \tag{3}$$

Представим поверхность S как образ при гомеоморфном отображении на нее сферы (3) с переходом параллелей сферы на высоте Z на параллели поверхности S с соответствующим значением σ. Взаимо-однозначное соответствие между параллелями сферы и поверхности S, определяемыми значениями $Z, 0 \leq Z \leq 2$, и $\sigma, 0 \leq \sigma \leq L$, можно устанавливать разными способами, мы выберем это соответствие через линейное отображение $\sigma = \frac{L}{2}Z = \frac{Lr^2}{4+r^2}, r^2 = u^2 + v^2$ с сохранением значений φ. Тогда координаты точек поверхности S из (2) выразятся через u, v следующим образом

$$x{=}x(\frac{Lr^2}{4{+}r^2})\cos\varphi, y{=}x(\frac{Lr^2}{4{+}r^2})\sin\varphi, z{=}z(\frac{Lr^2}{4{+}r^2}), \tag{4}$$

где $\cos\varphi = \dfrac{u}{r} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sin\varphi = \dfrac{v}{r} = \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$. Таким образом, поверхность вращения S можно считать параметризованной точками расширенной комплексной плоскостью или точками сферы.

Метрическая форма поверхности S из (4) в координатах (r, φ) имеет вид

$$ds^2 = \frac{64L^2r^2}{(4+r^2)^4}dr^2 + x^2(\frac{Lr^2}{4+r^2})d\varphi^2.$$

Преобразуем форму ds^2 следующим образом

$$ds^2 = x^2(\frac{Lr^2}{4+r^2})[(\frac{8rL}{x(\frac{Lr^2}{4+r^2})(4+r^2)^2}dr)^2 + d\varphi^2] \tag{5}$$

и введем новую переменную τ равенством

$$\tau = \int \frac{8rL}{x(\frac{Lr^2}{4+r^2})(4+r^2)^2}dr = \tau(r). \tag{6}$$

Но
$$\frac{8rL}{(4+r^2)^2}dr = d\frac{Lr^2}{4+r^2} = d\sigma,$$
поэтому (6) можно представить в виде
$$\tau = \int \frac{d\sigma}{x(\sigma)} = \tau(\sigma). \tag{7}$$

Функция $x(\sigma)$ имеет производную x'_σ, причем $|x'_\sigma| \leq 1$, поэтому $x(\sigma)$ имеет представление $x(\sigma) = x'_\sigma(0)\sigma + o(\sigma)$, когда $\sigma \to 0$. Это значит, что интеграл в (7) расходящийся при $\sigma \to 0+$, при любом выборе произвольной постоянной, имея при этом положительную производную. Поэтому $\tau \to -\infty$, когда $\sigma \to 0$. Аналогично, в левой полуокрестности значения $\sigma \to L$ интеграл для τ должен стремиться к $+\infty$. Так как функция $\tau(\sigma)$ монотонна, существует обратная функция $\sigma = \sigma(\tau)$. Тогда ds^2 из (5) можно представить в виде

$$ds^2 = x^2(\sigma(\tau))(d\tau^2 + d\varphi^2). \tag{8}$$

Введем новую переменную ρ соотношением $\tau = \ln\rho, 0 \leq \rho \leq \infty$. Тогда ds^2 принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{\rho^2}x^2(\sigma(\ln\rho))(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2).$$

Положим $\xi = \rho\cos\varphi, \eta = \rho\sin\varphi$ и метрическая форма в координатах (ξ, η) примет желанный изотермический вид, как в (1):

$$ds^2 = \Lambda^2((\xi,\eta)(d\xi^2 + d\eta^2), \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}x(\sigma(\ln\sqrt{\xi^2+\eta^2})). \tag{9}$$

Проилюстрируем на примере сфере применение этого метода для нахождения вида ее метрической формы в изотермических координатах. Пусть единичная сфера получена, как у нас, вращением полуокружности $\Gamma : x = x(\sigma) = \sin\sigma, z = z(\sigma) = 1 - \cos\sigma, 0 \leq \sigma \leq \pi$ вокруг оси Oz. Сфера имеет в стереографических координатах представление (3) с ее проекцией на касательную плоскость в точке $(0, 0, 0)$. Допустим, мы не знаем представление ее первой формы в изотермических координатах и хотим его найти, используя нашу методику. Связь между параметрами σ и Z можно установить простой линейной зависимостью: $\sigma = \dfrac{\pi}{2}Z, 0 \leq \sigma \leq \pi, 0 \leq Z \leq 2$. В нашем случае условие $x_\sigma'^2 + z_\sigma'^2 = 1$ выполнено. Поэтому ключевое соотношение (7) имеет вид

$$\tau = \int \frac{8r\pi}{\sin(\frac{\pi r^2}{4+r^2})(4 + r^2)^2} dr = \int \frac{d\sigma}{\sin\sigma} = \tau(\sigma), \tag{10}$$

где $\sigma = \dfrac{\pi r^2}{4 + r^2}$.

Интеграл в (10) легко считается и мы имеем

$$\tau = \tau(\sigma) = \ln \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi r^2}{2(4 + r^2)}, -\infty < \tau < +\infty.$$

Отсюда находим

$$\sigma = \frac{\pi r^2}{4 + r^2} = 2 \arctan e^{\tau}, r^2(\tau) = \frac{8 \arctan e^{\tau}}{\pi - 2 \arctan e^{\tau}}$$

и согласно (8) имеем

$$ds^2 = \sin^2(2 \arctan e^{\tau})(d\tau^2 + d\varphi^2).$$

Используя тождество

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

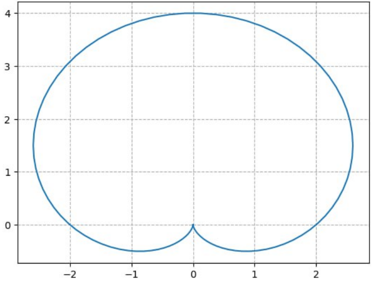
и полагая $\tau = \ln \rho$, приходим к известной классической формуле для метрики единичной сферы в изотермических координатах (ξ, η):

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + \rho^2)^2}(d\xi^2 + d\eta^2), \ 0 \leq \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \leq +\infty,$$

что и должно было получиться в случае правильности нашего способа перехода к изотермическим координатам.

Формально мы имеем формулу (8) нужного вида для поверхности вращения с любым меридианом, но нужно проверить вопрос о регулярности коэффициента $\Lambda(\xi, \eta)$, потому что в нем в знаменателе при подходе к полюсу встречается выражение $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to 0$. Для примера рассмотрим поверхность, полученную вращением кардиоиды

$$x = f(t) = a \sin t(1 - \cos t), z = g(t) = -a \cos t(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi$$



вокруг оси Oz (мы берем половину линии, так как только она и нужна для образования поверхности вращения).

Эта кривая замечательна тем, что в ней переход к натуральному параметру σ можно легко записать в явном виде

$$\sigma = 8a\sin^2\frac{t}{4},\ 0 \le t \le \pi. \tag{11}$$

Далее имеем

$$t = 4\arcsin\sqrt{\frac{\sigma}{8a}}, \sin t = \frac{(4a-\sigma)\sqrt{\sigma(8a-\sigma)}}{8a^2}, \cos t = 1 - \frac{\sigma(8a-\sigma)}{8a^2}.$$

На основании этих равенств легко находим значения $x(\sigma), z(\sigma)$ и их производных:

$$x(\sigma) = (4a - \sigma)\frac{\left(\sqrt{\sigma(8a - \sigma)}\right)^3}{64a^3} \tag{12}$$

$$z(\sigma) = -a\frac{[8a^2 - \sigma(8a - \sigma)]\sigma(8a - \sigma)}{64a^4} \tag{13}$$

$$x'(\sigma) = \frac{(12a^2 - 8a\sigma + \sigma^2)\sqrt{\sigma(8a - \sigma)}}{16a^3} \tag{14}$$

$$z'(\sigma) = -\frac{(4a - \sigma)(\sigma^2 - 8a\sigma + 4a^2)}{16a^3} \tag{15}$$

со свойством

$$x'^2(\sigma) + z'^2(\sigma) = 1. \tag{16}$$

Тогда метрика поверхности вращения имеет вид

$$ds^2 = d\sigma^2 + x^2(\sigma)d\varphi^2 = x^2(\sigma)[(\frac{d\sigma}{x(\sigma)})^2 + d\varphi^2]. \quad (17)$$

Нам нужно исследовать поведение основного интеграла (7). С учетом равенства (12) и с заменой $u = 4a - \sigma$ для подынтегральной функции в (7) получаем представление

$$\frac{1}{x(\sigma)} = -u^{-1}((4a)^2 - u^2)^{-3/2},$$

откуда имеем, что

$$\tau = -\int u^{-1}((4a)^2 - u^2)^{-3/2}du.$$

Этот интеграл вычисляется в элементарных функциях и он дает равенство

$$\tau = \tau(\sigma) = \frac{1}{(4a)^2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{8a}\ln\frac{4a+v}{4a-v}\right), v = \sqrt{\sigma(8a-\sigma)}.$$

Но видим, что даже в простейшем случае найти в явном виде обратную функцию $\sigma = \sigma(\tau)$ нет никакой надежды. Поэтому для качественного исследования можно ограничиться изучением локального поведения обратной функции при $\sigma \to 0$. Имеем эквивалентности

$$\frac{1}{x(\sigma)} \sim \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}\sigma^{3/2}}, \sigma \to 0.$$

откуда получаем, что

$$\tau = \int \frac{d\sigma}{x(\sigma)} = \tau(\sigma) \sim -\sqrt{2a}\sigma^{-1/2}, \sigma \to 0, \tau \to -\infty$$

и

$$ds^2 = x^2(\sigma)(d\tau^2 + d\varphi^2) \text{ и } x(\sigma) \sim \frac{\sqrt{2}\sigma^{3/2}}{\sqrt{a}}, \sigma \to 0.$$

Введем новый аргумент ρ, положив $\tau = \ln\rho, 0 \leq \rho \leq \infty$. Тогда метрическая форма определена на всей расширенной комплексной плоскости и имеет вид

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \rho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

где $\xi = \rho\cos\varphi, \eta = \rho\sin\varphi,\ \Lambda(\rho) \sim \dfrac{4a}{\rho\ln^3\rho}, \rho \to 0.$

Видим, что коэффициент $\Lambda(\rho)$ при подходе к точке $(0,0)$ неограниченно растет. Следовательно, в этом случае изотермические координаты не являются регулярной системой координат в том смысле, что метрический коэффициент оказывается неограниченной величиной (но заметим, что интеграл от $\Lambda(\rho)d\rho$ сходится на обоих концах, при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$). Вычислим теперь гауссову кривизну метрику и убедимся, что она тоже не является ограниченной. Действительно, рассматривая любой меридиан $x = x(\sigma), z = z(\sigma)$ с натуральным параметром σ с $x(\sigma) > 0$, для метрики соответствующей поверхности вращения согласно (17) имеем коэффициенты $E = 1, F = 0, G = x^2(\sigma)$ и для гауссовой кривизны K поверхности вращения получаем общее уравнение

$$K = -\frac{x''(\sigma)}{x(\sigma)} \tag{18}$$

(оно малоизвестно, но его справедливость после предъявления формулы (18) легко проверяется, если использовать явное представление кривизны поверхности через коэффициенты E, F, G и их производные, которое можно найти в учебниках [4] или [5]).

В случае кардиоиды для $x(\sigma)$ мы уже имеем уравнение (12). Вычислим $x''(\sigma)$, получим

$$x''(\sigma) = \frac{3(4a-\sigma)(4a^2-8a\sigma+\sigma^2)}{16a^3\sqrt{s(8a-s)}}, 0 \leq \sigma \leq 4a.$$

Тогда формула (18) дает значение кривизны поверхности

$$K = -\frac{12(\sigma^2-8a\sigma+4a^2)}{(\sigma(8a-\sigma))^2},$$

которая, как и положено, обладает симметрией относительно прямой $\sigma = 4a$, поэтому задает кривизну поверхности и для значений длины σ между $4a$ и $8a$. Видим, что кривизна поверхности неограничена при подходе к точке возврата кардиоиды, но это еще не значит, что соответствующая поверхность вращения не является многообразием ограниченной кривизны. Необходимый и достаточный признаком МОК состоит в том, что коэффициент Λ^2 в изотермическом представлении (1) является субгармонической функцией.

Теперь исследуем, когда в общем случае изотермические координаты на поверхности вращения оказываются регулярными или нерегулярными в зависимости от поведения поверхности в окрестности полюса. Пусть меридиан в окрестности полюса $(0,0,0)$ локально задан уравнением $z = ax^p, p > 0, p \neq 1$ (например, для кардиоиды $p = 2/3$), а второй полюс расположен в точке $(0,0,1)$. При переходе к натуральному параметру σ имеем связь $z(\sigma) = ax^p(\sigma)$ и $z'(\sigma) = apx^{p-1}(\sigma)x'(\sigma)$, откуда $(1 + a^2p^2x^{2p-2}(\sigma))x'^2(\sigma) = 1$. Так как на меридиане $x(\sigma) > 0$, то в достаточно малой окрестности полюса $x'(\sigma) > 0$, значит, там имеем уравнение

$$x'(\sigma) = \frac{1}{(1 + a^2p^2x^{2p-2}(\sigma))^{1/2}}, \tag{19}$$

откуда

$$x''(\sigma) = -\frac{(p-1)a^2p^2x^{2p-3}}{(1 + a^2p^2x^{2p-2})^2} \ .$$

Тогда по формуле (18) получаем значение

$$K = \frac{(p-1)a^2p^2x^{2p-4}}{(1+a^2p^2x^{2p-2})^2} .$$

Видим, что уже при нарушении условия C^2 гладкости (т.е. при $p < 2$) в полюсе кривизна поверхности перестает быть ограниченной, причем при $1 < p < 2$ и $0 < p < 1$ получаются разные порядки возрастания K, а именно, при $1 < p < 2$ имеем $K = O(x^{2p-4}), x \to 0$ и $K > 0$, а при $0 < p < 1$ получаем $K = O(x^{-2p}), x \to 0$ и $K < 0$.
Во всех этих случаях метрический коэффициент оказывается неограниченным, и в этом смысле изотермические координаты не являются регулярными.
Более интересным и содержательным является исследование поведения интеграла от KdS, где dS – элемент площади. Тогда интеграл по некоторой области от KdS играет роль меры кривизны этой области даже в условиях, когда кривизна поверхности в точках области не существует. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

В выбранных координатах σ, φ элемент площади поверхности равен $dS = x d\sigma d\varphi$, поэтому $KdS = -x'' d\sigma d\varphi$. Тогда интеграл по области Ω, ограниченной двумя параллелями $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, равен

$$\iint\limits_{\Omega} KdS = 2\pi \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} (-x''(\sigma)) d\sigma = 2\pi (x'(\sigma_1) - x'(\sigma_2)).$$

Значит, независимо от формы меридиана, даже если он имеет самопересечения, значение интеграла от KdS в поясе между двумя параллелями определяется направлениями меридиана в концевых точках соответствующей дуги меридиана. В частности, для интеграла по всей поверхности достаточно знать направления меридиана в полюсах поверхности. Например, для поверхности вращения кардиоиды по формуле (14) имеем $x'(0) = 0, x'(4a) = -1$, значит, интеграл по всей поверхности равен 2π. Отметим, что в «нормальном» случае интеграл от гауссовой кривизны по всей поверхности рода 0 равен 4π. Рассмотренный метод позволяет надеяться, что мы можем построить теорию изотермических координат и на кусочно-гладких поверхностях вращения.

Завершим рассмотрение случая поверхностей вращения типа сферы теоремой

Theorem

На всякой поверхности вращения рода 0 *с* C^1*-гладким меридианом можно ввести изотермическую систему координат с использованием только одной квадратуры, причем при дополнительном условии кусочной* C^2 *гладкости меридиана можно построить поверхность с любым заранее заданным значением интегральной кривизны от* -4π *до* 4π*.*

3. Случай поверхностей вращения рода 1

Сначала мы введем изотермическую систему координат на круговом торе. Пусть тор получен вращением вокруг оси Oz окружности $\Gamma : (x-a)^2 + z^2 = R^2, a > R$. Представим уравнение окружности в функции длины дуги σ:

$$x = x(\sigma) = a + R\cos\frac{\sigma}{R} > 0, z = z(z(\sigma) = R\sin\frac{\sigma}{R}.$$

Тогда тор представится уравнениями

$$x = x(\sigma)\cos\varphi,\ \ y = x(\sigma)\sin\varphi,\ \ z = z(\sigma)$$

с заданными на прямоугольнике $\Pi :\ 0 \leq \sigma \leq L = 2\pi R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ двояко-периодическими компонентами.

А дальше надо вычислить интеграл как в (7):

$$\tau = \int \frac{d\sigma}{a + R\cos\frac{\sigma}{R}} = \tau(\sigma). \tag{20}$$

Он равен

$$\tau = \tau(\sigma) = \frac{2R}{\sqrt{a^2 - R^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-R}{a+R}} \tan\frac{\sigma}{2R}\right) + Const \tag{21}$$

Подынтегральная функция существует на всей оси. Найдем обратную функцию сначала на промежутке $[-\pi R, \pi R)$. Получим

$$\sigma = \sigma(\tau) = 2R \arctan\left(\sqrt{\frac{a+R}{a-R}} \tan\frac{\sqrt{a^2-R^2}\tau}{2R}\right). \tag{22}$$

Метрика кругового тора в прямоугольнике П имеет изотермическое представление

$$ds^2 = \Lambda^2(\tau)(d\tau^2 + d\varphi^2),$$

где $\Lambda = x(\sigma(\tau)) = a + R\cos\frac{\sigma(\tau)}{R}$ с $\sigma(\tau)$ из (22).

В общем случае торообразная поверхность задается вращением произвольной замкнутой кривой $\Gamma : x = x(\sigma) > 0, z = z(\sigma)$ вокруг оси Oz. Схема введения изотермических координат такая же - вычиляется неопреленный интеграл вида (7). На этот раз он не имеет особенностей, так как всегда $x(\sigma) > 0$. Класс гладкости поверхности определяется классом гладкости меридиана. В случае гладкости класса C^2 гауссова кривизна вычисляется по той же формуле (18) и так как меридиан является гладкой замкнутой кривой, то интегральная кривизна будет равна 0.

Chern, Shiing-Shen, An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface, Proc. Amer. Mathematik. Soc., AMS (1955), 6 (5): 771–782, doi:10.2307/2032933, JSTOR 2032933

Bers L., Riemann Surfaces, New York University, Institut of Math. Sciences, New York, 1957-1958, pp. 15-35.

Векуа И.Н., Обобщенные аналитические функции. М., Госиздат физико-математ. литературы, 1959, 628 с. (есть издание 1988 г.)

Погорелов А.В., Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, Изд-во Харьковского унивеситета, 1961, 167 с.

Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М., «Наука», 1973, 440 с.

С П А С И Б О !