Зависят ли свойства плоской замкнутой кривой от выбора точки начала ее обхода?

И.Х. Сабитов

18.12.2024 г.

1.

Когда обсуждается вопрос об использовании замкнутой кривой в каком-нибудь рассуждении, обычно не задумываясь берут какую-нибудь подходящую ее параметризацию с согласованной по задаче ориентацией и начинают вычисления с удобной для расчетов точки. При этом, как правило, не учитывают, не влияет ли выбор точки начала обхода кривой на свойства кривой? Мы покажем, что если кривую рассматривать в функции ее натурального параметра, то изменение начальной точки обхода кривой влияет как на локальные, так и на глобальные внешне-геометрические характеристики кривой, за исключением случаев окружности. Другими словами, выбор точки начала обхода замкнутой кривой не изменяет ее внутреннюю геометрию, но изменяет ее внешнюю геометрию.

2.

Рассмотрим сначала пример кардиоиды с параметрическим уравнением

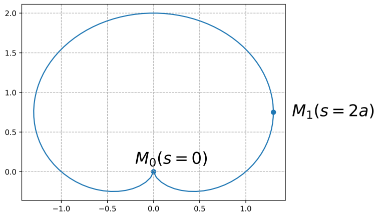

Рис.1.

$$x = a\sin\varphi(1-\cos\varphi), y = -a\cos\varphi(1-\cos\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где числовой параметр $a > 0$. Мы выбрали этот пример, потому что для него легко перейти от углового параметра φ к натуральному параметру s:

$$s = 8a\sin^2\frac{\varphi}{4}, 0 \leq s \leq 8a. \quad (1)$$

Далее, из (1) имеем

$$\varphi = 4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8a}}, \sin\varphi = \frac{(4a-s)\sqrt{s(8a-s)}}{8a^2}, \cos\varphi = 1 - \frac{s(8a-s)}{8a^2}.$$

Из этих равенств находим значения $x(s), y(s)$ и их производных:

$$x(s) = (4a-s)\frac{\left(\sqrt{s(8a-s)}\right)^3}{64a^3}, \quad y(s) = a\frac{[s(8a-s)-8a^2]s(8a-s)}{64a^3} \quad (2)$$

$$x'(s) = \frac{(12a^2-8as+s^2)\sqrt{s(8a-s)}}{16a^3}, \quad (3)$$

$$y'(s) = -\frac{(4a-s)(s^2-8as+4a^2)}{16a^3}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) выводим, что выполнено нужное для натуральной параметризации равенство

$$(x')^2(s) + (y')^2(s) = 1. \quad (5)$$

Пусть начало обхода кардиоиды в точке $M_0(0,0)$ при значении $s=0$ и возвращаемся в ту же точку при значении $s=8a$. Считаем, что функции $x(s), y(s)$ продолжаются по периодичности с периодом $T=8a$ на все значения s Это приводит к уравнению вида

$$\mathbf{r}(8a+t)=\mathbf{r}(t), -\infty < t < +\infty.$$

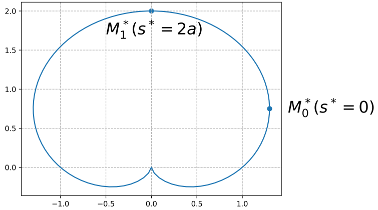

Рис.2.

Сдвинем начало отсчета длины дуги в точку $M_1(s=2a)=(\frac{3\sqrt{3}a}{4},\frac{3a}{4})$, которую теперь обозначим как $M_0^*(s*=0)$. Радиус-вектор кривой с началом обхода в новой точке обозначим как $\mathbf{r}^*(s)$. Натуральный аргумент s у кривой $\mathbf{r}^*(s)$ по-прежнему будет изменяться от 0 до $8a$.

Новую кривую получаем как образ отображения отрезка $[0, 8a]$ в R^2 со значениями координат $x^*(s), y^*(s)$. Имеем:

$$x^*(s) = \frac{(2a-s)[(s+2a)(6a-s)]^{3/2}}{64a^3}, 0 \leq s \leq 6a$$

$$\frac{(10a-s)[(s-6a)(14a-s)]^{3/2}}{64a^3}, 6a \leq s \leq 8a,$$

$$y^*(s) = \frac{(s+2a)(6a-s)[(s+2a)(6a-s)-8a^2]}{64a^3}, 0 \leq s \leq 6a$$

$$\frac{(s-6a)(14a-s)[(s-6a)(14a-s)-8a^2]}{64^3}, 6a \leq s \leq 8a.$$

Переименуем теперь M_1 в M_0^* с начальным значением параметра $s = 0$, как и положено в начале обхода. Тогда значению длины дуги, равной $2a$, при новом правиле обходе будет соответствовать точка M_1^* с координатами $(x = 0, y = 2\mathrm{a})$. Если новое положение кардиоиды как образа отрезка $[0, 8a]$ получается из исходного ее положения просто движением, тогда по *определению движения* все расстояния на плоскости должны оставаться без изменения. Расстояние между точками M_0 и M_1 равно $\frac{3}{2}a$, а расстояние между их образами M_0^* и M_1^* равно $\frac{\sqrt{13}}{2}a$. Итак, по внутренней геометрии расстояния в парах (M_0, M_1) и (M_0^*, M_1^*) оба равны $2a$, а пространственные расстояния, т.е. длины соответствующих хорд, разные. Очевидно, равенство внутренних расстояний остается верным для всех пар точек, значит, перенос начальной точки обхода приводит к появлению нового представления кардиоиды с координатами (x^*, y^*), нетривиально изометричного исходному ее изображению как образа, в обоих случаях, одного и того же отрезка $[0, 8a]$. Как множества точек в R^2, эти множества абсолютно идентичны, но как отображения $[0, 8a] \to R^2$ они различны и их связывает нетривиальная изометрия.

3.

Если изменение начала обхода кривой происходит непрерывно, то соответствующая деформация кривой будет нетривиальным *изгибанием* кривой, при котором дуги непрерывно переходят в дуги с теми же длинами, но с разными по длине хордами.
То, что это так для всех кривых, кроме случая окружности, подтверждается следующей теоремой.
Теорема. Для того, чтобы у C^1- гладкой кривой равные по длине дуги имели равные по длине хорды, необходимо и достаточно, чтобы кривая была окружностью или дугой окружности.
Доказательство. Достаточность условия очевидна, проверим его необходимость. По условию необходимости дано, что равные по длине дуги стягиваются равными по длине хордами. Пусть на кривой с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ выделена некоторая дуга длины Δs. Тогда квадрат расстояния между концевыми точками $(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2$ и Δs связаны одним и тем же соотношением вида

$$(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2 = f(\Delta s) \tag{6}$$

для некоторой *не зависящей* от значения s функции f.

Обозначим для краткости Δs как t. Из уравнения (6) при $s = 0$ имеем

$$f(t) = [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)]^2,$$

так что уравнение (6) с учетом периодичности координат точек замкнутой кривой при всех t и s представится в виде

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2. \tag{7}$$

Дуги с концевыми точками $\mathbf{r}(s-t), \mathbf{r}(s))$ и $\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(s+t)$ имеют одинаковые длины $\Delta s = |t|$. Значит, длины соответствующим им хорд равны, поэтому функция $[\mathbf{r}(s+t)-\mathbf{r}(s)]^2$ и, соответственно, $[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)]^2$ являются относительно t четными функциями. . Продифференцируем уравнение (7) по s и t. Получим

$$2[\mathbf{r}(s+t)-\mathbf{r}(s)][\mathbf{r}'_s(s+t))-\mathbf{r}'_s(s)] = 0. \tag{8}$$

$$2[\mathbf{r}(s+t)-\mathbf{r}(s)]\mathbf{r}'_t(s+t) = 2[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)]\mathbf{r}'_t(t). \tag{9}$$

Производные $(\mathbf{r}(s+t))'_s$ и $(\mathbf{r}(s+t))'_t$ равны между собой, как производные сложной функции $\mathbf{r}(u), u = s+t$ соответственно по s и по t. Учитывая это наблюдение, вычтем из формулы (9) формулу (8) и получим равенство

$$[\mathbf{r}(s+t)-\mathbf{r}(s)]\ \mathbf{r}'_s(s) = [\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)]\mathbf{r}'_t(t). \tag{10}$$

Теперь учтем, что мы работаем с функциями, имеющими четность по отношению к переменной t. Тогда производная по t функции (8) будет нечетной, а производная функции (9) по s останется четной. Значит, в формуле (10) имеем равенство четной и нечетной функций, что возможно только если обе они тождественно равны нулю.

Итак, имеем уравнение

$$2[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)]\mathbf{r}'_t(t) = 0,$$

из которого выводим равенство

$$[\mathbf{r}^2(t) - 2\mathbf{r}(0)\mathbf{r}(t)]'_t = 0.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)]^2 = Const, \tag{11}$$

что и означает, что кривая является окружностью.

4.

Рассмотрим случай малого изменения точки начала обхода, т.е. кривую $\mathbf{r}(s+\varepsilon)=\mathbf{r}(s)+\varepsilon\mathbf{z}(s)$. Тогда условием б.м. изгибания кривой является выполнение равенства

$$d\mathbf{r}d\mathbf{z}=0$$

или выполнение равенства

$$\mathbf{r}'(s)\mathbf{z}'(s)=0.$$

Так как $\mathbf{r}'^2(s)=1$, то дифференцируя это соотношение, получаем $\mathbf{r}'(s)\mathbf{r}''(s)=0$, т.е. поле б.м. изгибания $\mathbf{z}'(s)$ существует и пропорционально $\mathbf{r}''(s)$.

Опишем полученный результат более подробно. Пусть дана замкнутая C^1-гладкая кривая. Введем на ней натуральную параметризацию, для которой имеем $x'^2(s) + y'^2(s) = 1, 0 \leq s \leq L$, где L - длина кривой. Две изометричные кривые называем *эквивалентными*, если их образы на плоскости получаются движением на плоскости. По смыслу движения все расстояния на плоскости остаются неизменными, в частности, при движении не изменяются не только длины дуг, но не изменяются и длины хорд соответствующих дуг кривых. Изменим точку начала отсчета длины на кривой. Кривая как множество точек на плоскости останется неизменным, но она изменится как отображение отрезка $[0, L]$ в R^2, в частности, образ точки $0 \in [0, L]$ в R^2 будет другим. Обозначим два положения кривой как C и C^*. Так вот, для того, чтобы кривые C и C^* были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они были окружностями одного радиуса. Это значит, что если кривая C не была окружностью, то при изменении точки начала отсчета длины новая кривая C^* будет нетривиально изометрична исходной кривой, т.е. не получается из нее движением, в частности, изменятся длины хорд.

Если изменение точки начала отсчета длины происходит непрерывно, то получается *нетривиальное изгибание* кривой. Значит, внешние свойства кривой, как образа отрезка $[0, L]$, при изменении точки начала отсчета длины кривой изменятся, при этом кривизна кривой $k(s)$ как функция от s тоже изменится, т.е. кривизна кривой не является инвариантом изгибания.

Влияние изменения начала отсчета длины кривой можно увидеть из следующего мысленного эксперимента. Пусть из некоторой точки кривой послан сигнал, идущий по кривой. После прохождения по кривой некоторого расстояния, из точки кривой, куда дошел сигнал, посылается по хорде в точку отправления сообщение о прибытии посланного сигнала. Теорема говорит, что если кривая не была дугой окружности, то сигналы, посланные из разных точек, но идущие сначала вдоль кривой на одинаковые расстояния, придут в точку отправления за разное время. Интересно было бы узнать, как изменяется в зависимости от характеристик кривой время прихода сигнала в исходную точку при данной длине пути по кривой.

СПАСИБО !