

## Близкие правильногранным тела на пути от правильногранников к (равнорёберным) паркетогранникам

Тимофеенко Алексей Викторович

Научно-исследовательский семинар  
по дискретной геометрии и геометрии чисел  
под руководством профессоров  
Н. П. Долбилина, Н. Г. Мощевитина, М. Д. Ковалева и  
И. Х. Сабитова  
Москва, 16:45 1 апреля 2025 г.

## Схема доклада

1. Правильногранные тела и паркетогранники без условных вершин
  - Граница известного неизвестного о паркетогранниках
  - Равнорёберные паркетогранники
2. Близкие правильногранным тела с комбинаторым строением отличным от правильногранника
3. Правильногранники и  $s$ -паркетогранники
4. Группы и паркетогранники в системах компьютерной алгебры и графики

# Паркетогранники и $s$ -паркетогранники

## Паркетогранники и $s$ -паркетогранники

**Паркетным** называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников.

## Паркетогранники и $s$ -паркетогранники

**Паркетным** называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Если эти многоугольники правильные, то сам паркетный многоугольник называем  **$s$ -паркетным**.

## Паркетогранники и $s$ -паркетогранники

**Паркетным** называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Если эти многоугольники правильные, то сам паркетный многоугольник называем  **$s$ -паркетным**. Выпуклый многогранник с паркетными и быть может равноугольными гранями называем **паркетогранником**. Соответственно гранями  **$s$ -паркетогранника** служат  $s$ -паркетные и быть может правильные многоугольники.

## Паркетогранники и $s$ -паркетогранники

**Паркетным** называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Если эти многоугольники правильные, то сам паркетный многоугольник называем  **$s$ -паркетным**. Выпуклый многогранник с паркетными и быть может равноугольными гранями называем **паркетогранником**. Соответственно гранями  **$s$ -паркетогранника** служат  $s$ -паркетные и быть может правильные многоугольники. Общие рёбра равноугольных

многоугольников, из которых составлена паркетная грань, называют **условными**. Отличные от вершины паркетогранника вершины этих многоугольников тоже называют условными.


## Описание тел с правильными и быть может $s$ -паркетными гранями без условных вершин

### Теорема (...–2011)

Кроме призм  $P_n$  и антипризм  $A_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ , существует ровно 186 выпуклых многогранников с гранями правильными или так составленными из правильных многоугольников, что каждая вершина многоугольника служит и вершиной грани:

---

<sup>1</sup>Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

<sup>2</sup>Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Совр. пробл. матем. и мех. **VI**. Матем. Вып. 3. К 100-летию со дня рожд. Н. В .Ефимова. – М.: МГУ, 2011, С. 155-170. 

## Описание тел с правильными и быть может $s$ -паркетными гранями без условных вершин


### Теорема (...–2011)

Кроме призм  $P_n$  и антипризм  $A_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ , существует ровно 186 выпуклых многогранников с гранями правильными или так составленными из правильных многоугольников, что каждая вершина многоугольника служит и вершиной грани:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;

---

<sup>1</sup>Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

<sup>2</sup>Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Совр. пробл. матем. и мех. **VI**. Матем. Вып. 3. К 100-летию со дня рожд. Н. В .Ефимова. – М.: МГУ, 2011, С. 155-170. 

## Описание тел с правильными и быть может $s$ -паркетными гранями без условных вершин


### Теорема (...–2011)

Кроме призм  $P_n$  и антипризм  $A_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ , существует ровно 186 выпуклых многогранников с гранями правильными или так составленными из правильных многоугольников, что каждая вершина многоугольника служит и вершиной грани:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
- 2 13 архимедовых тел,

---

<sup>1</sup>Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

<sup>2</sup>Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Совр. пробл. матем. и мех. **VI**. Матем. Вып. 3. К 100-летию со дня рожд. Н. В. Ефимова. – М.: МГУ, 2011, С. 155-170. 

## Описание тел с правильными и быть может $s$ -паркетными гранями без условных вершин

### Теорема (...–2011)

Кроме призм  $P_n$  и антипризм  $A_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ , существует ровно 186 выпуклых многогранников с гранями правильными или так составленными из правильных многоугольников, что каждая вершина многоугольника служит и вершиной грани:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
- 2 13 архимедовых тел,
- 3 92 многогранника Джонсона,<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

<sup>2</sup>Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Совр. пробл. матем. и мех. **VI**. Матем. Вып. 3. К 100-летию со дня рожд. Н. В. Ефимова. – М.: МГУ, 2011, С. 155-170.

## Описание тел с правильными и быть может $s$ -паркетными гранями без условных вершин

### Теорема (...–2011)

Кроме призм  $P_n$  и антипризм  $A_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ , существует ровно 186 выпуклых многогранников с гранями правильными или так составленными из правильных многоугольников, что каждая вершина многоугольника служит и вершиной грани:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
- 2 13 архимедовых тел,
- 3 92 многогранника Джонсона,<sup>1</sup>
- 4 78  $s$ -паркетогранников без условных вершин.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

<sup>2</sup>Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Совр. пробл. матем. и мех. **VI**. Матем. Вып. 3. К 100-летию со дня рожд. Н. В. Ефимова. – М.: МГУ, 2011, С. 155-170.

## Составные и несоставные многогранники

К 1973 г. В. А. Залгаллер, Б. А. Иванов и Ю. А. Пряхин описывают все **несоставные тела**,

## Составные и несоставные многогранники

К 1973 г. В. А. Залгаллер, Б. А. Иванов и Ю. А. Пряхин описывают все **несоставные тела**, то есть такие  $s$ -паркетогранники без условных вершин и выпуклые тела с правильными гранями, что никакая плоскость не рассекает такое тело на тела, каждое из которых является  $s$ -паркетогранником без условных вершин или правильногранником.

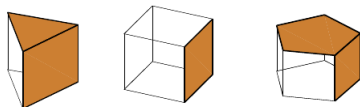
## Составные и несоставные многогранники

К 1973 г. В. А. Залгаллер, Б. А. Иванов и Ю. А. Пряхин описывают все **несоставные тела**, то есть такие  $s$ -паркетогранники без условных вершин и выпуклые тела с правильными гранями, что никакая плоскость не рассекает такое тело на тела, каждое из которых является  $s$ -паркетогранником без условных вершин или правильногранником. Соединяя одинаковыми гранями несоставные многогранники Залгаллера, – В.А.Залгаллер называл их **простыми**, – Иванова и Пряхина, получаем все выпуклые многогранники, каждая грань которых либо правильная, либо так составлена из правильных многоугольников, что каждая их вершина служит и вершиной грани.

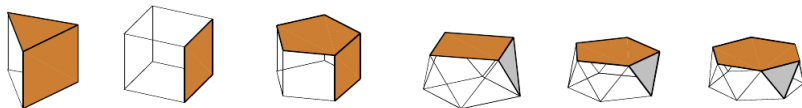
## Составные и несоставные многогранники

К 1973 г. В. А. Залгаллер, Б. А. Иванов и Ю. А. Пряхин описывают все **несоставные тела**, то есть такие  $s$ -паркетогранники без условных вершин и выпуклые тела с правильными гранями, что никакая плоскость не рассекает такое тело на тела, каждое из которых является  $s$ -паркетогранником без условных вершин или правильногранником. Соединяя одинаковыми гранями несоставные многогранники Залгаллера, – В.А.Залгаллер называл их **простыми**, – Иванова и Пряхина, получаем все выпуклые многогранники, каждая грань которых либо правильная, либо так составлена из правильных многоугольников, что каждая их вершина служит и вершиной грани. Очевидно, что эти  $s$ -паркетогранники без условных вершин равнорёберные.

## Призмы, антипризмы и другие несоставные тела



## Призмы, антипризмы и другие несоставные тела



## Призмы, антипризмы и другие несоставные тела

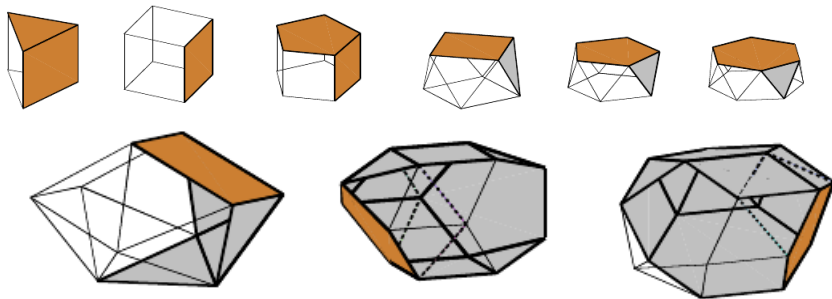


Рис. 34.  $M_{22}$ .

Рис. 35.  $Q_4$ .

Рис. 36.  $Q_6$ .

## Равнорёберные паркетогранники с условными вершинами

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырёх из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

## Равнорёберные паркетогранники с условными вершинами

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырем из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

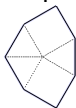


Figure: 7c

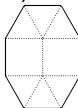


Figure: 8c

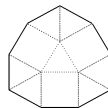


Figure: 9b

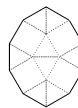


Figure: 10b

## Равнорёберные паркетогранники с условными вершинами

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырем из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

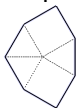


Figure: 7c

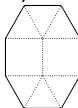


Figure: 8c

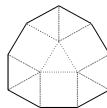


Figure: 9b

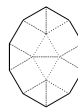


Figure: 10b

### Гипотеза, 2018

Четыре призмы, в основаниях которых лежат паркетные многоугольники типов  $(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$ ,  $(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$ ,  $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$  и  $(6, 12^4, 6, 12^4)$ , и только они являются равнорёберными паркетогранниками с фиктивными вершинами.

## Простейшая модель тела $M_{24a}$

### Теорема о модели $M_{24a}(90)$

Множество вершин модели многогранника  $M_{24a}$  равно объединению орбит точек

$$(a\sqrt{2} - b, a + b\sqrt{2}, h), (-b(1 + \sqrt{2}), a(1 + \sqrt{2}), h),$$

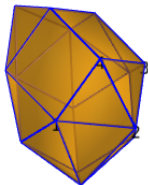
$$(-a\sqrt{2} - b, a - b\sqrt{2}, h), (-b, a, h + \sqrt{2}/2),$$

где  $a = \sqrt{18 + 6\sqrt{6}}/12$ ,  $b = \sqrt{18 - 6\sqrt{6}}/12$ ,  $h = \sqrt{2\sqrt{6} - 2}/4$ ,  
при действии группой

$$[2, 2]^+ \cong \left\langle \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle.$$

## Простейшая живая модель тела $M_{24a}$

<https://sagecell.sagemath.org/?q=xypadw>



## Простейшая живая модель тела $M_{24a}$

<https://sagecell.sagemath.org/?q=xypadw>

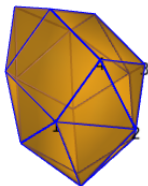
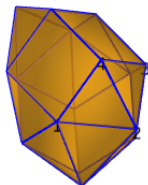


Figure: 24-гранник  $M_{24a}(45)$  и его фундаментальные вершины

## Простейшая живая модель тела $M_{24a}$

<https://sagecell.sagemath.org/?q=xypadw>



**Figure:** 24-гранник  $M_{24a}(45)$  и его фундаментальные вершины

**Следствие 1.** *Четырёхугольные грани модели тела  $M_{24a}$  являются квадратами и все рёбра единичные за исключением с точностью до симметрии двух её рёбер длиной*

$$\sqrt{1 + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} \approx 1,12228 \text{ и } \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{3} + 3)\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} \approx 0,9801.$$

## Правильногранники с углами $(3^2, 4^2)$

Построенная модель тела  $M_{24a}$  интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильногранников: рассмотренного  $J_{15}$  и четырёхскатного прямого бикупола  $P_{2,39} = J_{28}$ . см. Johnson Solids<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup><https://www.orchidpalms.com/polyhedra/johnson/johnson.html>

## Правильногранники с углами $(3^2, 4^2)$

Построенная модель тела  $M_{24a}$  интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильногранников: рассмотренного  $J_{15}$  и четырёхскатного прямого бикупола  $P_{2,39} = J_{28}$ . см. Johnson Solids<sup>3</sup>. Однако, для доказательства несуществования правильногранника с комбинаторным строением  $M_{24a}$  построенную модель необходимо усложнить. Для этого вводится параметр, равный величине угла, образованного смежными квадратными гранями.

---

<sup>3</sup><https://www.orchidpalms.com/polyhedra/johnson/johnson.html>

## Правильногранники с углами $(3^2, 4^2)$

Построенная модель тела  $M_{24a}$  интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильногранников: рассмотренного  $J_{15}$  и четырёхскатного прямого бикупола  $P_{2,39} = J_{28}$ . см. Johnson Solids<sup>3</sup>. Однако, для доказательства несуществования правильногранника с комбинаторным строением  $M_{24a}$  построенную модель необходимо усложнить. Для этого вводится параметр, равный величине угла, образованного смежными квадратными гранями. Если угол этот отличен от прямого, то соответствующие 6-гранные поверхности можно увидеть на правильногранниках  $M_{21} = J_{89}$ ,  $M_{22} = J_{86}$ ,  $P_{3,7} = J_{14}$ ,  $P_{3,11} = J_{16}$ ,  $P_{2,35} = J_{27}$  и  $P_{2,44} = J_{30}$ .

---

<sup>3</sup><https://www.orchidpalms.com/polyhedra/johnson/johnson.html>

## Правильногранники с углами $(3^2, 4^2)$

Построенная модель тела  $M_{24a}$  интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильногранников: рассмотренного  $J_{15}$  и четырёхскатного прямого бикупола  $P_{2,39} = J_{28}$ . см. Johnson Solids<sup>3</sup>. Однако, для доказательства несуществования правильногранника с комбинаторным строением  $M_{24a}$  построенную модель необходимо усложнить. Для этого вводится параметр, равный величине угла, образованного смежными квадратными гранями. Если угол этот отличен от прямого, то соответствующие 6-гранные поверхности можно увидеть на правильногранниках  $M_{21} = J_{89}$ ,  $M_{22} = J_{86}$ ,  $P_{3,7} = J_{14}$ ,  $P_{3,11} = J_{16}$ ,  $P_{2,35} = J_{27}$  и  $P_{2,44} = J_{30}$ .

**Теорема 2.** *Если  $AutM_{24a} = [2, 2]^+$ , то тело  $M_{24a}$  не может быть правильногранным.*

<sup>3</sup><https://www.orchidpalms.com/polyhedra/johnson/johnson.html>

## Теорема косинусов трёхгранного угла

### Теорема косинусов трёхгранного угла

<sup>a</sup>. Пусть  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  – двугранный угол напротив плоского угла  $\alpha$  в трёхгранном угле с плоскими углами  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $\alpha(A, \beta, \gamma)$  – плоский угол  $\alpha$  в трёхгранном угле с известными  $A, \beta, \gamma$ . Тогда справедливо равенство

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A. \quad (1)$$

---

<sup>a</sup>А. В. Погорелов. Геометрия. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, стр. 253

Применяется также обозначение  $A(m, n, k)$  для величины двугранного угла напротив плоского угла такого, как у правильного  $m$ -угольника в трёхгранном угле с плоскими углами такими, как у правильных  $m$ -угольника,  $n$ -угольника и  $k$ -угольника. Например,

## GAP-функция $\text{coA}(n, m, k)$ , $A(3, 4, 5)$

Вычисление  $\text{cos } A(m, n, k)$  системой комп. алгебры GAP

```
coA:=function(n,m,k)
local co;
co:=(cos(180-360/n)-cos(180-360/m)*cos(180-360/k))/sin(180-
360/m)/sin(180-360/k);
return co;
end;
```

## GAP-функция $\text{coA}(n, m, k)$ , $A(3, 4, 5)$

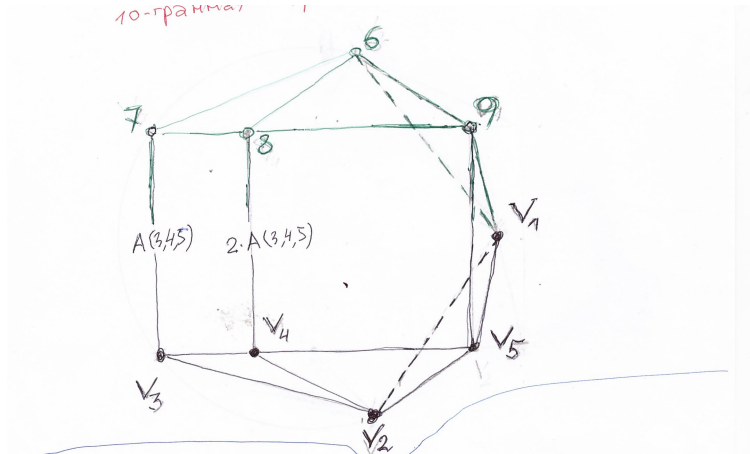
Вычисление  $\text{coA}(m, n, k)$  системой комп. алгебры GAP

```
coA:=function(n,m,k)
local co;
co:=(cos(180-360/n)-cos(180-360/m)*cos(180-360/k))/sin(180-
360/m)/sin(180-360/k);
return co;
end;
```

```
gap> Read("trig");
gap> cos(72);
1/2*E(5)+1/2*E(5)^4
gap> Read("coA.g");
gap> coA(4,3,4);
0
gap> coA(3,4,4);
1/2
gap> coA(3,4,5);
2/5*E(20)-2/5*E(20)^9+1/5*E(20)^13-1/5*E(20)^17
```

Протокол вычислений:

## Проекция рёбер 10-гранника $A_{4,5}$



# Алгебраическая модель 10-гранника $A_{4,5}$

**Теорема** (модель тела  $A_{4,5}$ )  
 Пусть  $h$  - высота правильного 5-угольника с единичными сторонами,  $R$  и  $r$  - радиусы его описанной и вписанной окружностей соответственно. Пусть  $O$  - центр описанной около этого 5-угольника окружности, его вершины лежат в плоскости  $xOy$  и

$$V_1 = (R, 0, 0), \quad V_2 = (R \cos(-\frac{2\pi}{5}), R \sin(-\frac{2\pi}{5}), 0),$$

$$V_3 = (R \cos(-\frac{4\pi}{5}), R \sin(-\frac{4\pi}{5}), 0),$$

$$V_4 = (-R + \cos A(3,4,5), \frac{-1}{2}, \sin A(3,4,5)),$$

$$V_5 = (-R + \cos A(3,4,5) + \cos(\pi - 3 \cdot A(3,4,5)), \frac{-1}{2}, \sin A(3,4,5) - \sin 3 \cdot A(3,4,5))$$

Тогда объединение орбит точек  $V_1, V_2, \dots, V_5$  при действии группы  $[ ] = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$  совпадает с множеством вершин 10-гранника  $A_{4,5}$  с правильными гранями за исключением трёх равнобедренных треугольников в  $\epsilon$  ребром, к которому симметричны.

## Maple-преобразования значения функции $\cos A(3, 4, 5)$

```
restart:E:=n0 ->exp(2*I*Pi/n0):  
co345:=2/5*E(20)-2/5*E(20)^9+1/5*E(20)^13-1/5*E(20)^17;simplify  
(%);convert(% ,radical);simplify(%);
```

$$\text{co345} := \frac{2e^{\frac{1}{10}\pi}}{5} - \frac{2\left(e^{\frac{1}{10}\pi}\right)^9}{5} + \frac{\left(e^{\frac{1}{10}\pi}\right)^{13}}{5} - \frac{\left(e^{\frac{1}{10}\pi}\right)^{17}}{5}$$
$$\frac{4 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{5} - \frac{2 \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{5}$$

$$\text{co345} := -\frac{\sqrt{2} \sqrt{5+\sqrt{5}} (-5+\sqrt{5})}{20}$$

## GAP-вычисления значений $\sin^2 A(3, 4, 5)$ и радиусов $r, R$

```
gap> coA(5,5,5);  
-1/5*E(5)+1/5*E(5)^2+1/5*E(5)^3-1/5*E(5)^4  
gap> 2*coA(3,4,5)^2-1;  
-1/5*E(5)+1/5*E(5)^2+1/5*E(5)^3-1/5*E(5)^4  
gap> 1-coA(3,4,5)^2;  
-2/5*E(5)-3/5*E(5)^2-3/5*E(5)^3-2/5*E(5)^4  
gap> si:=last;  
-2/5*E(5)-3/5*E(5)^2-3/5*E(5)^3-2/5*E(5)^4  
gap> r:=tg(54)/2;  
3/10*E(20)-3/10*E(20)^9-1/10*E(20)^13+1/10*E(20)^17  
gap> R:=1/2/cos(54);  
1/5*E(20)-1/5*E(20)^9-2/5*E(20)^13+2/5*E(20)^17  
-----
```

## Maple-преобразования числа $\sin A(3, 4, 5)$ и радиусов $r, R$

```
si345:=sqrt(si345sq);simplify(%);
```

$$si345 := \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$$

$$R := \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5 + \sqrt{5}} + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}})}{10} \quad r := \frac{\sqrt{2} (5 + \sqrt{5})^{3/2}}{40}$$

0.6881909600

## Maple-модель 10-гранника $A_{4,5}$

```
> restart:  
> v:=[[R,0,0],[R*cos(-2*Pi/5),R*sin(-2*Pi/5),0],[R*cos(-4*Pi/5),R*  
sin(-4*Pi/5),0],[-r+co345,-1/2,si345],[-r+co345-4*co345^3+3*  
co345,-1/2,si345-3*si345+4*si345^3]];f:=[[1,3,2]];  
v:= [[R, 0, 0], [R cos( $\frac{2\pi}{5}$ ), -R sin( $\frac{2\pi}{5}$ ), 0], [-R cos( $\frac{\pi}{5}$ ), -R sin( $\frac{\pi}{5}$ ), 0], [-r  
+ co345, - $\frac{1}{2}$ , si345], [-4 co3453 + 4 co345 - r, - $\frac{1}{2}$ , 4 si3453 - 2 si345]]  
f:= [[1, 3, 2]]  
> v:=convert(v,radical);v:=simplify(%,radical);  
v:= [[ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5+\sqrt{5}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})}{10}$ , 0, 0],  
[ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5+\sqrt{5}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})}{10}(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4})$ ,
```

## Maple-модель 10-гранника $A_{4,5}$ (окончание)

```
> f:=[[1,5,2], [1,6,9], [1,9,5], [1,2,3,7,6], [2,3,4], [2,4,5], [3,
  4,8,7], [4,5,9,8], [6,7,8], [6,8,9] ];
f:= [[1, 5, 2], [1, 6, 9], [1, 9, 5], [1, 2, 3, 7, 6], [2, 3, 4], [2, 4, 5], [3, 4, 8, 7],      (19)
     [4, 5, 9, 8], [6, 7, 8], [6, 8, 9]]
```

```
> with(plots): polygonplot3d([seq([seq(v[f[i]][j]),j=1..nops(f[i])
],i=1..nops(f))]);
```

```
> v:=[op(v),[v[2][1],-v[2][2],v[2][3]]]: v:=[op(v),[v[3][1],-v[3]
  [2],v[3][3]]]: v:=[op(v),[v[4][1],-v[4][2],v[4][3]]]: v:=[op(v),
  [v[5][1],-v[5][2],v[5][3]]]:v;
```

```

$$\left[ \left[ \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5+\sqrt{5}} + 2\sqrt{5-\sqrt{5}})}{10}, 0, 0 \right], \right. \quad (18)$$

```

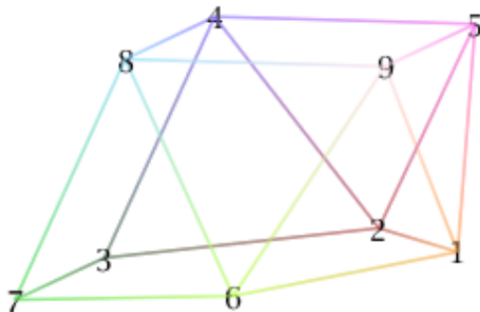
```
> f:=[[1,5,2], [1,6,9], [1,9,5], [1,2,3,7,6], [2,3,4], [2,4,5], [3,
  4,8,7], [4,5,9,8], [6,7,8], [6,8,9] ];
f:= [[1, 5, 2], [1, 6, 9], [1, 9, 5], [1, 2, 3, 7, 6], [2, 3, 4], [2, 4, 5], [3, 4, 8, 7],      (19)
     [4, 5, 9, 8], [6, 7, 8], [6, 8, 9]]
```

```
> with(plots): polygonplot3d([seq([seq(v[f[i]][j]),j=1..nops(f[i])
],i=1..nops(f))]);
```

## Графическая Maple-модель 10-гранника $A_{4,5}$

```
nops(v);nops(f);A45:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i]][j]),j=1..nops  
(f[i]))],i=1..nops(f))]): for i from 1 to 9 do t[i]:=textplot3d(  
[v[i][1],v[i][2],v[i][3],`i`],color=black): end do: display({A45,  
seq(t[i],i=1..9)});
```

9  
10



## Второе (Maple-)доказательство теоремы о модели $A_{4,5}$

```
> p:=v[1]-v[5];simplify(p[1]^2+p[2]^2+p[3]^2); simplify(sqrt(p[1]^2+p[2]^2+p[3]^2));evalf(%);
```

$$p := \left[ \frac{\sqrt{2} \sqrt{5+\sqrt{5}} (-11+\sqrt{5})}{40} + \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5+\sqrt{5}} + 2\sqrt{5-\sqrt{5}})}{10}, \frac{1}{2}, \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}} \sqrt{5}}{25} \right]$$

$$- \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{-30\sqrt{5} + 150}}{10}$$

0.9105929974

```
> p:=v[2]-v[5];simplify(p[1]^2+p[2]^2+p[3]^2);evalf(%);sqrt(%);
```

$$p := \left[ \frac{\sqrt{2} \sqrt{5+\sqrt{5}} (-11+\sqrt{5})}{40} + \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5+\sqrt{5}} + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}) (\sqrt{5}-1)}{40}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}} \sqrt{5-\sqrt{5}}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{20}, - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}} \sqrt{5}}{25} \right]$$

1

## Мера удалённости 10-гранника $A_{4,5}$ от правильногранника

Характеристики  $E$ ,  $P$  и  $A^\circ$  моделей тела  $A_{4,5}$  коллекции  
Johnson Solid Near Misses: <https://u.to/6Kh3lg> (№7) и  
построенной в докладе.



$E=0.194$ ,  $P=0$ ,  $A=34.0^\circ$

**>  $E=0.179$ ,  $P=0$ ,  $A=36.55^\circ$**

## Модель $M_{24a}(44, 12)$ (19 февраля 2025 г.)

**Теорема 4.** *24-гранник  $M_{24a}$  с группой симметрий  $[2, 2]^+$  обладает квадратной гранью и единичными рёбрами за исключением двух симметричных рёбер, соединяющих вершины типа  $(3^5)$ , тогда и только тогда, когда образованный квадратными гранями угол  $2\beta \approx 88,249^\circ$  и такой, что  $\cos^2 \beta$  есть третий (действительный) корень многочлена*

$$240058368w^{12} - 2189623296w^{11} + 8787763200w^{10} - 20441067520w^9 + \\ + 30545817344w^8 - 30697016320w^7 + 21078311680w^6 - 9816811776w^5 + \\ + 2991393696w^4 - 543094336w^3 + 42900368w^2 + 1776384w - 408321.$$

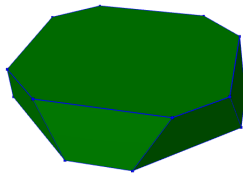
## Модель $M_{24a}(44, 12)$ (19 февраля 2025 г.)

**Теорема 4.** 24-гранник  $M_{24a}$  с группой симметрий  $[2, 2]^+$  обладает квадратной гранью и единичными рёбрами за исключением двух симметричных рёбер, соединяющих вершины типа  $(3^5)$ , тогда и только тогда, когда образованный квадратными гранями угол  $2\beta \approx 88,249^\circ$  и такой, что  $\cos^2 \beta$  есть третий (действительный) корень многочлена

$$240058368w^{12} - 2189623296w^{11} + 8787763200w^{10} - 20441067520w^9 + \\ + 30545817344w^8 - 30697016320w^7 + 21078311680w^6 - 9816811776w^5 + \\ + 2991393696w^4 - 543094336w^3 + 42900368w^2 + 1776384w - 408321.$$

**Следствие 4.** Отличными от правильных граней модели тела  $M_{24a}$  из теоремы 4 являются только смежные по ребру с концами в вершинах типов  $(3^5)$  равнобедренные треугольники. Углы напротив оснований этих треугольников равны приблизительно  $71,18537^\circ$ , а основания примерно в 1,164 раза длинее несимметричных им рёбер.

## C-антипризмы и B-антипризмы



## C-антипризмы и B-антипризмы

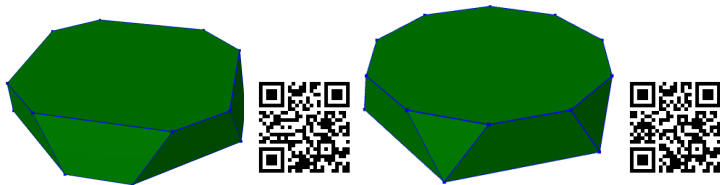


Figure: C-антипризма  $CA_4$  и B-антипризма  $BA_5$

## C-антипризмы и B-антипризмы

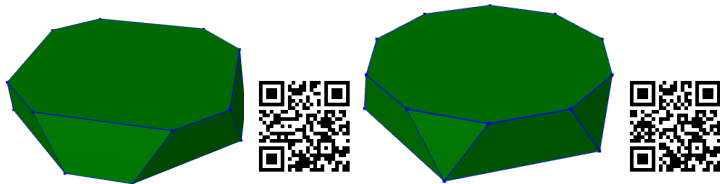


Figure: C-антипризма  $CA_4$  и B-антипризма  $BA_5$

### Вопрос.

Существует ли выпуклый многогранник с равноугольными гранями, тип которого отличается от типа правильногранного тела?

## Модель простого $r$ -паркетогранника $Q_{6b}$ (19 февраля 2025 г.)

**Теорема 5.** Объединение орбит точек

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} (1 + \sqrt{5})\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$$

при действии группой (диэдра)

$$[3] \cong \left\langle \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

совпадает с множеством вершин 11-гранника  $Q_{6b}$  с правильными одной шестиугольной, тремя пятиугольными, тремя квадратными и треугольной гранями, а также тремя трапециями, каждая из которых составлена из трёх треугольников с единичными рёбрами (<https://u.to/QJTmlQ>).

## Сколь угодно близкие правильнограннику многогранники

Пусть  $\epsilon > 0$ . Добавим к трём (фундаментальным) вершинам теоремы 5 четвёртую точку, расположенную на высоте  $\epsilon$  над серединой большего основания трапецевидной грани с ребром  $V_2V_3$ :

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right) + \epsilon \right).$$

Действуя группой [3] теперь уже на четыре точки, получим все вершины 20-гранника<sup>4</sup>, у которого все нетреугольные и одна треугольная грань правильные, а оставшиеся 12 треугольных граней сколь угодно мало – в зависимости от  $\epsilon$  – отличаются от правильных. Будем этот 20-гранник обозначать  $Q_{6b\epsilon}$ .

<sup>4</sup><https://u.to/Tk7nlQ>

# ГРУППЫ И ПАРКЕТОГРАННИКИ

Семинар Группы и паркетогранники<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup><https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2026>

## ГРУППЫ И ПАРКЕТОГРАННИКИ

Семинар Группы и паркетогранники<sup>5</sup> Чаты семинара см. МАХ,  
What'sApp и Telegram.

курс «Применение систем компьютерной алгебры и графики в  
исследованиях групп и многогранников» в Институте  
непрерывного образования Сибирского Федерального  
Университета (ИНО СФУ):

<https://ino.sfu-kras.ru/program/1937/3262>

осенью 2025 г.

---

<sup>5</sup><https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2026>

СПАСИБО за внимание!