Геодезические в пространстве Громова–Хаусдорфа

Вихров Антон

27 марта 2024 г.

Функцией расстояния будем называть симметричное отображение $\rho\colon X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на диагонали.
Если выполняется неравенство многоугольника, то есть

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

то функцию расстояния будем называть *обобщенной псевдометрикой*.
Если $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, то обобщенной метрикой.
В случае, если ρ не принимает бесконечных значений, то будем убирать слово "обобщенный".
Всюду далее
$\rho(x, y) = |xy| = d(x, y)$,
$U_\varepsilon(a) = \left\{x \in X : |ax| < \varepsilon\right\}$ — открытый шар с центром в точке a радиуса ε,
$U_\varepsilon(A) \;=\; \bigcup\limits_{a \in A} U_\varepsilon(a).$

Расстояние Хаусдорфа

Определение

Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства X. *Расстоянием Хаусдорфа* будем называть следующую величину:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{X}}(A, B) = \inf\left\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \colon A \subseteq U_r(B) \,\&\, B \subseteq U_r(A)\right\}.$$

Предложение

$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{X}}$ *является метрикой на подпространстве* $\mathcal{H}(X)$ *— замкнутых ограниченных подпространств* $A \subseteq X$.

Расстояние Громова–Хаусдорфа

Определение

Пусть A, B, X — метрические пространства. Если A изометрично $\tilde{A}$, а B изометрично $\tilde{B}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — подпространства X, то тройку $(X, \tilde{A}, \tilde{B})$ будем называть *реализацией пары* (A, B).

Определение

Расстоянием Громова–Хаусдорфа между двумя метрическими пространствами A, B называется точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа среди всех реализаций пары (A, B). Иными словами,

$$\mathrm{d_{GH}}(A, B) = \inf_{(X, \tilde{A}, \tilde{B})} \left\{ r : \exists (X, \tilde{A}, \tilde{B}) \text{ такая, что } \mathrm{d_H^X}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq r \right\}.$$

Элементы теории множеств NBG

Все объекты теории NBG называются классами. Имеется два типа классов:
–множество A : существует класс C такой, что $A \in C$;
–собственный класс A : для любого класса C выполняется $A \notin C$.
Каждый элемент класса является множеством. Декартово произведение классов является классом, на классах можно определять функции.
Через $\mathcal{GH}$ будем обозначать *класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до эквивалентности*. Далее все метрические пространства рассматриваются с точностью до изометрии. Расстояние d_{GH} является обобщенной псевдометрикой на собственном классе $\mathcal{GH}$.

Некоторые свойства NBG

Теорема

Система аксиом NBG конечно аксиоматизируема.

Теорема

Для любой формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ с n свободными переменными, которые могут являться только множествами, существует единственный класс, содержащий все множества, удовлетворяющих формуле.

Пример

Классами являются:

1. $\{x\}$
2. $\{x \notin \{x\}\}$

На собственном классе A нельзя задать топологию: действительно, если τ — топология на τ, то $A \in \tau$ и A является множеством. Поэтому топологию на классе нужно переопределять.
Пусть n – кардинальное число. Выберем из класса A класс A_n (подкласс, содержащий все множества, мощности не более n). Если A_n является множеством для любого кардинального n, то такой класс A будем называть фильтрующимся множествами. Топологию τ определим, как последовательность вложенных топологий на каждом A_n.
Для произвольного отображения $f : X \to A$, где X является множеством, $Im(X)$ также будет являться множеством, то есть, $Im(X)$ будет лежать в некотором A_n, и можно определить непрерывность отображения f.

Есть выделенные подклассы $\mathcal{GH}$:

1. $\mathcal{M}$ — компактных метрических пространств(пространство Громова–Хаусдорфа)
2. $\mathcal{B}$ — ограниченных метрических пространств

Облаком называют совокупность всех метрических пространств, расположенных на конечном расстоянии друг от друга. В частности, $\mathcal{B}$ является облаком.

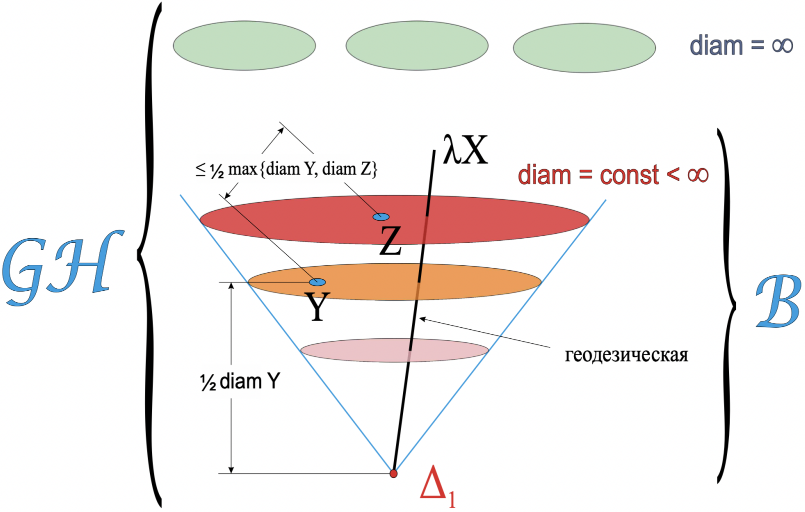

Рис.: Структура $\mathcal{GH}$

Простейшие свойства.

Теорема

Для $X, Y \in \mathcal{GH}$ *выполняется:*

1. $2\,\mathrm{d_{GH}}(X, \triangle_1) = \mathrm{diam}(X)$,
2. *Если* $\min\bigl(\mathrm{diam}(X), \mathrm{diam}(Y)\bigr) < \infty$, *то* $2\,\mathrm{d_{GH}}(X, Y) \ge \bigl|\mathrm{diam}(X) - \mathrm{diam}(Y)\bigr|$,
3. $2\,\mathrm{d_{GH}}(X, Y) \le \max\bigl(\mathrm{diam}(X), \mathrm{diam}(Y)\bigr)$,
4. *Для* $X \in \mathcal{B}$, $2\,\mathrm{d_{GH}}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu|\,\mathrm{diam}(X)$,
5. $\mathrm{d_{GH}}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\,\mathrm{d_{GH}}(X, Y)$.

На $\mathcal{M}$ расстояние d_{GH} является метрикой. Пространство M:

1. стягиваемо,
2. линейно связно,
3. полное,
4. сепарабельное,
5. со строго внутренней метрикой,
6. не локально компактно.

Определение

Соответствием между двумя множествами A и B называется подмножество $R \subseteq A \times B$ такое, что его канонические проекции $\pi_A(R)$ и $\pi_B(R)$ сюрьективны.

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R, а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B будем обозначать как $\mathcal{R}(A, B)$.

Определение

Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B. Его *искажение* определяется равенством

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big|d_A(a, a') - d_B(b, b')\big| \, : \, aRb \ \text{ и } \ a'Rb'\Big\}.$$

Предложение

Для любых метрических пространств A, B имеет место равенство :

$$2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B) = \inf_{R \in \mathcal{R}(A,B)} \operatorname{dis} R.$$

Определение

Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ будем называть *оптимальным*, если $2\,\mathrm{d_{GH}}(X,Y) = \operatorname{dis}(R)$. Множество таких соответствий обозначается через $\mathcal{R}_{opt}$.

Теорема

Если X, $Y \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{R}_{opt} \neq \emptyset$.

Обозначение

Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X на себя. Введем обозначения:

$$\mathrm{s}(X) = \inf\bigl\{|xx'| : x \ne x'; x, x' \in X\bigr\},$$
$$\mathrm{t}(X) = \inf\bigl\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| : x \ne x' \ne x'' \ne x; x, x', x'' \in X\bigr\},$$
$$\mathrm{e}(X) = \inf\bigl\{\,\mathrm{dis}(f), f \in S(X), f \ne \mathrm{id}\bigr\},$$
$$\mathrm{e}'(X) = \inf\bigl\{\,\mathrm{dis}(f), f \in S(X), f \notin \mathrm{ISO}(X)\bigr\}$$

Определение

1. Если $\mathrm{s}(X), \mathrm{e}(X), \mathrm{t}(X)$ строго положительны, то пространство называется *пространством общего положения*.
2. Если $\mathrm{s}(X), \mathrm{e}'(X)$ строго положительны, то пространство называется *пространством обобщенного общего положения*.

Нетрудно построить пространство общего положения конечной мощности, однако для произвольной это не так просто.

Пример

Существуют пространства общего положения сколь угодно большой мощности.

Пусть X — это произвольное бесконечное множество. По теореме Цермело множество может быть вполне упорядочено, т.е. существует линейный порядок, в котором каждое подмножество содержит наименьший элемент. Введем на X какой-нибудь полный порядок $\prec$. Известно, что не существует $\sigma : X \to X$, сохраняющей порядок, отличной от тождественного отображения.

Отметим, что линейный порядок на X можно задать в виде ориентированного графа G_0, в котором ребра — это все упорядоченные пары (x, y), где $x \prec y$. Из сказанного выше вытекает, что единственным автоморфизмом графа G_0 является тождественное отображение. Построим теперь новый ориентированный граф H_0, заменив каждое ребро $e = xy$ графа G_0 на три вершины u_e, v_e, w_e и четыре ребра xu_e, $u_e v_e$, $v_e y$, $v_e w_e$. Граф H — соответствующий H_0 неориентированный граф.

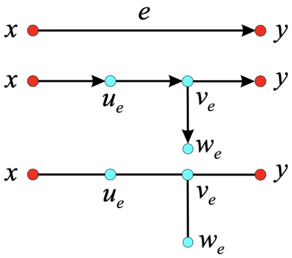

Рис.: Граф G_0.

Нетрудно заметить, что в H нет изоморфизмов. Зададим на H метрику, положив расстояние между разными несмежными вершинами равным 1, а между смежными равным $1+\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$, полученное метрическое пространство обозначим V. Ясно, что $\mathrm{s}(V)=1$ и $t(V)\geq 1-\varepsilon$. Заметим, что искажение каждой биекции множества V на себя, не являющейся автоморфизмом графа H, равно ε, поэтому, в силу отсутствия у H нетождественных автоморфизмов, заключаем, что $\mathrm{e}(V)\geq\varepsilon$, следовательно, V — пространство общего положения.

Теорема

Метрические пространства общего положения являются всюду плотным подмножеством в $\mathcal{GH}$.

Теорема

Для любого Y, лежащего в достаточно малой окрестности пространства обобщенного общего положения X, множество оптимальных соответствий состоит из одного элемента и представляется в виде $\bigcup\{x_i \times R(x_i)\}$.

Теорема

Для любых Y, Z, лежащих в ε-окрестности пространства общего положения X, однозначно определены разбиения Y_i и Z_i (относительно X), причем любое соответствие R, $\operatorname{dis}(R) < 4\varepsilon$, *представляется в виде $\{Y_i \times Z_{\sigma(i)}\}$ для некоторой $\sigma \in S(X)$(биекция σ одна и та же для всех соответствий).*

Теорема

Группа изометрий пространства M тривиальна.

Теорема

Достаточно малые окрестности конечных пространств общего положения равной мощности изометричны.

Теорема

Любое ограниченное метрическое пространство изометрично вкладывается в $\mathcal{GH}$.

Определение

Непрерывная кривая γ, соединяющая пространства X, Y ($\mathrm{d_{GH}}(X, Y) < \infty$), для которой $|\gamma| - \mathrm{d_{GH}}(X, Y) < \varepsilon$, называется ε*–кратчайшей*.

Теорема

Если $\mathcal{R}_{opt} \neq \emptyset$, то существует геодезическая, соединяющая X, Y.

Теорема

Существует метрические пространства X и Y со следующими свойствами:

1. $0 < \mathrm{d_{GH}}(X, Y) < \infty$
2. $\mathcal{R}_{opt}(X, Y) = \emptyset$
3. $\nexists \tilde{X}, \tilde{Y}$, *таких что* $\mathrm{d_{GH}}(X, \tilde{X}) = \mathrm{d_{GH}}(Y, \tilde{Y}) = 0$ *и* $\tilde{X} \neq X$ *и* $\tilde{Y} \neq Y$

Хаусдорфова Реализация

Определение

Хаусдорфовой реализацией пары метрических пространств A, B расстояния Громова–Хаусдорфа будем называть такую тройку $(X, \tilde{A}, \tilde{B})$, что $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ изометричны A и B соответственно, и $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{X}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, B)$.

Теорема

Если для пары X, Y существует хаусдорфова реализация, то между ними существует геодезическая в классе Громова–Хаусдорфа.

Теорема

Существует пара метрических пространств для которой не существует хаусдорфовой реализации.

Особый класс метрических пространств

Определение

Функция $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется *метрически выпуклой*, если $f(X) = (X, f \circ d_X)$ является метрическим пространством для любого метрического пространства X.

Теорема

Функция f является метрически выпуклой тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$ и для любых неотрицательных a, b, c удовлетворяющих $a \leq b + c$, выполняется $f(a) \leq f(b) + f(c)$.

Лемма

Функция $l_\varepsilon(x) = \varepsilon\lceil x/\varepsilon\rceil$ является метрически выпуклой.

Применим $l_{2^{-n}}$ для всех n ко всем метрическим пространствам по отдельности. Понятно, что некоторые метрические пространства станут равными друг-другу. Но у каждого метрического пространства спектр будет лежать в множестве $\{m2^{-n}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Тем самым искажения всех соответствий между двумя произвольными метрическими пространствами будут лежать в дискретном нигде не плотном множестве. То есть между такими пространствами будет существовать оптимальное соответствие.