

Опять о многоугольниках Рейнхардта

С. Б. Гашков

В [9] Рейнхардт доказал изодиаметрическое неравенство для периметра n -угольника данного диаметра d . В [1] автором настоящей заметки было приведено более простое доказательство. Попутно было доказано аналогичное неравенство для ширины¹⁾. А именно, доказана следующая теорема.

Если p периметр, b ширина и d диаметр выпуклого n -угольника, то справедливы неравенства $2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leq p \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$. Каждое из неравенств точное, если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Достигаются они, в частности, на правильных n -угольниках при нечетном n , и на полуправильных n -угольниках при четном n , отличных от степени двойки²⁾.

Вопрос об экстремальных n -угольниках³⁾ оказался непростым. Он был явно сформулирован автором в тексте, помещенном вслед за статьей (под названием «задачи для исследования»). В нем утверждалось, в частности, что для простого p единственным экстремальным p -угольником является правильный, единственным экстремальным $2p$ -угольником является полуправильный, среди девятиугольников имеется в точности два экстремальных (один правильный, другой полуправильный), а для всех остальных $n \neq 2^k$ существуют экстремальные n -угольники, не являющиеся ни правильными, ни полуправильными. Там же было приведено следующее неравенство Рейнхардта для площади n -угольника

$$s \leq \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} d^2,$$

в котором равенство достигается только для правильных нечетноугольников.

Примерно в то же время были получены верхние и нижние оценки для числа различных экстремальных n -угольников, но опубликовать их в журнале «Квант» не предоставлялось возможным, а публикации в научных

¹⁾ Соответствующие определения можно найти в [1–3].

²⁾ Полуправильными в [1] названы равносторонние n -угольники, вписанные в правильные k -угольники Рело, где k — делитель n , но фактически там дано более явное определение.

³⁾ Для которых обращается в равенство любое из двух неравенств, так как они обращаются в равенство одновременно.

журналах препятствовало отсутствие уверенности в новизне результатов, в частности изодиаметрического неравенства для ширины $2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leq p$ (в [1] оно вместе с неравенством для периметра было названо неравенством Рейнхардта).

После возобновления ежегодника «Математическое просвещение» появилась возможность публикации в нем, что и было осуществлено⁴⁾ в [2]. Там было кратко повторено доказательство из [1] (по не вполне понятной сейчас самому автору причине в [2] не было ссылки на [1]), доказаны утверждения, оставленные в [1] без доказательства, а также некоторые новые утверждения. Экстремальные n -угольники в [2] были названы многоугольниками Рейнхардта, им были сопоставлены двухцветные ожерелья и подмножества мощности n в группе комплексных корней степени $2n$ из единицы, не содержащие противоположных корней, и с помощью этих элементарных соображений получены верхние и нижние оценки для числа n -угольников Рейнхардта с точностью до вращений⁵⁾. А именно, для него получены оценки

$$\frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m | n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \leq R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m | n} 2^{n/m} \varphi(m),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\varphi(n)$ — функция Эйлера; нижняя оценка — это в точности число «периодических» n -угольников⁶⁾. Для $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число, в [2] было доказано с помощью круговых многочленов, что все n -угольники Рейнхардта периодические, откуда следует формула

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m | n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) = \\ &= \frac{1}{2n} (2^{n/p} p + 2^{n/p^2} p(p-1) + \dots + 2^{n/p^k} p^{k-1} (p-1)) \sim 2^{n/p} p / 2n. \end{aligned}$$

Недавно автор случайно увидел в интернете статью [7], где, в частности, были найдены формулы для числа периодических n -угольников

⁴⁾ После того, как автор нашел свои старые записи и сделал из них ТЭХ-файл, а также перевод на немецкий и послал в «Elemente der Mathematik», и получил оттуда отказ под предлогом, что подобного стиля статьи журнал не принимает.

⁵⁾ Пользуясь возможностью, заметим здесь, что в [2] в двух формулах посреди с. 98 есть опечатки — в одной в последнем равенстве пропущен множитель $m/2n$, а другой между двумя суммами вставлен ненужный знак равенства.

⁶⁾ Т. е. тех, которым соответствуют периодические ожерелья; в частности, полуправильные многоугольники являются периодическими.

Рейнхардта⁷⁾ с точностью до вращений и осевых симметрий⁸⁾, повторен результат из [2] о том, что при $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$ не бывает непериодических n -угольников Рейнхардта, с помощью компьютерного поиска найдены для некоторых n непериодические (названные в [7] спорадическими) n -угольники, и было выдвинуто предположение о том, что при $n = pq$, где $p > q$ — простые, спорадических n -угольников не существует. Из [7] автор узнал также, что в [4] доказано неравенство для ширины $2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leq p$ без ссылок на [1], где это было сделано намного ранее (и вероятно, проще). Значит, по-видимому, этот результат [1] являлся новым.

В [6], наряду с другими результатами, была доказана

ТЕОРЕМА 1. *Непериодических n -угольников Рейнхардта при n , равном произведению двух различных простых, не существует.*

Ниже мы приведем более простое доказательство этого факта. Полагаем, что и остальные результаты [6] могут быть доказаны более просто с использованием указанного ниже подхода.

Доказательство [6] основано на теореме Рейнхардта [9] о том, что экстремальным n -угольникам можно однозначно сопоставить *многочлены Рейнхардта* $f(x)$ такие, что $f(0) = 1$, $\deg f < n$, $\Phi_{2n} \mid f$, где Φ_{2n} — *круговой полином*⁹⁾ порядка $2n$, а коэффициенты $f(x)$ равны $0, \pm 1$, причем число ненулевых коэффициентов нечетно. Утверждение теоремы, т. е. отсутствие спорадических n -угольников, очевидно следует из следующей леммы [6]:

ЛЕММА 1. *Если $n = pq$, где $p > q > 2$ — простые, то многочлен Рейнхардта $f(x)$ делится или на $\Phi_p(-x^q)$ или на $\Phi_q(-x^p)$.*

Действительно, так как $\Phi_p(-x^q) = x^{(p-1)q} - x^{(p-2)q} + \dots \pm x^q \mp 1$, указанная делимость означает антипериодичность последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$, т. е. выполнения равенств $f_i = -f_{i+p}$, где $0 \leq i < q(p-1)$, а значит и q -периодичность соответствующего n -угольника¹⁰⁾ (это не очевидно, так как здесь мы не приводим правила построения многочленов Рейнхардта, однако несложно доказывается в [6, 7], куда мы и отсылаем читателя).

⁷⁾ Термин n -угольники Рейнхардта, кажется, не использовался в [7] и появился только в [6].

⁸⁾ Почему-то мне не пришло в голову рассмотреть такую задачу.

⁹⁾ Определение круговых полиномов, или полиномов деления круга, можно найти в любом учебнике высшей алгебры.

¹⁰⁾ Многоугольник называется t -периодическим, если его группа вращений имеет порядок t .

Для доказательства этой леммы в [6] используется следующая лемма, фактически содержащаяся в [5, 8, 10]¹¹⁾.

ЛЕММА 2. *Если $g(x)$ — произвольный многочлен степени, меньшей $n = pq$, с целыми коэффициентами, делящийся на Φ_n , то*

$$g(x) = a(x)\Phi_p(x^q) + b(x)\Phi_q(x^p), \quad a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad \deg a(x) < q, \quad \deg b(x) < p.$$

Так как при нечетном n , как известно из алгебры, $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, то из этой леммы (при подстановке $x = -y$) следует, что если $\Phi_{2n} \mid g(x)$, то $g(x) = a(x)\Phi_p(-x^q) + b(x)\Phi_q(-x^p)$, $\deg a(x) < q$, $\deg b(x) < p$.

В [1] экстремальным n -угольникам Рейнхардта другим способом однозначно сопоставлены многочлены $g(x)$, $\deg g < n$, у которых все коэффициенты равны ± 1 , такие, что Φ_{2n} делит g , причем, если коэффициенты g_i многочлена удовлетворяют условию антипериодичности $g_i = -g_{i+t}$, где n/t нечетно, то соответствующий n -угольник Рейнхардта будет n/t -периодическим.

Это позволяет упростить рассуждения [6] и вывести отсутствие спорадических n -угольников при $n = pq$, где $p > q > 2$ — простые, из следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Если сумма двух последовательностей, одна из которых антипериодична с периодом p , а другая антипериодична с периодом q , $(p, q) = 1$, есть последовательность, членами которой являются только два различных числа a, b , то эта последовательность тоже антипериодична либо с периодом p , либо с периодом q .*

Действительно, пусть $g(x)$, $\deg g < n$, многочлен с коэффициентами ± 1 , такой, что $\Phi_{2n} \mid g$, соответствующий произвольному n -угольнику Рейнхардта, $n = pq$, $p > q > 2$ — простые. Согласно лемме 2 имеем $g(x) = a(x)\Phi_p(-x^q) + b(x)\Phi_q(-x^p)$, $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg a(x) < q$, $\deg b(x) < p$. Так как последовательности коэффициентов многочленов $a(x)\Phi_p(-x^q)$, $b(x)\Phi_q(-x^p)$ антипериодичны с периодами q, p соответственно (и наоборот, любой многочлен степени $pq - 1$ с антипериодичной с периодом q последовательностью коэффициентов представим в виде $a(x)\Phi_p(-x^q)$, $\deg a(x) < q$), а последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ состоит только из двух чисел ± 1 , то из леммы 3 следует, что последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ антипериодична с периодом p или q , значит соответствующий ему n -угольник периодичен (т. е. имеет группу вращений порядка q или p).

Приведем доказательство леммы 3. Докажем вначале, что одна из двух суммируемых антипериодических последовательностей $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ такова,

¹¹⁾В [5, 8, 10] доказано более общее утверждение, но ограничений на степени многочленов там нет. В [8] дано более простое доказательство, чем в [5] и есть ссылка на [5]. В [10] ссылок на [5, 8] нет.

что все ее члены с четными номерами равны. Допустим, что это неверно, тогда найдутся четные числа i_0, i_1, j_0, j_1 , такие, что $a_{i_0} < a_{i_1}, b_{j_0} < b_{j_1}, i_0, i_1 < 2q, j_0, j_1 < 2p$. Согласно китайской теореме об остатках для любых $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ найдется число $N_{\alpha, \beta} < 2pq$, такое что $N_{\alpha, \beta} = i_\alpha \pmod{2q}, N_{\alpha, \beta} = j_\beta \pmod{2p}$ (китайская теорема применяется к числам $i_\alpha/2, j_\beta/2$ и модулям q, p , а потом все умножается на 2). Тогда при $N = N_{\alpha, \beta}$ имеем в силу периодичности $c_N = a_N + b_N = a_{i_\alpha} + b_{j_\beta}$, значит $c_{N_{0,0}} = a_{i_0} + b_{j_0} < a_{i_0} + b_{j_1} = c_{N_{0,1}} < a_{i_1} + b_{j_1} = c_{N_{1,1}}$, т.е. сумма последовательностей состоит не из двух, а хотя бы из трех разных чисел, что противоречит условию. Поэтому можно считать, что, например, в последовательности $\{a_i\}$ все члены $a_{2i}, i = 0, 1, 2, \dots$, равны некоторому числу a . В силу q -антипериодичности $a_{2i+1} = -a_{q+2i+1} = -a, i = 0, 1, 2, \dots$, поэтому $\{a_i\} = a, -a, a, -a, \dots$, т.е. $\{a_i\}$ на самом деле антипериодична с периодом 1, а потому и антипериодична с любым нечетным периодом, например p . Но тогда антипериодична с тем же периодом p и сумма $\{c_i = a_i + b_i\}$, что доказывает лемму.

Замечание. Очевидно, таким же способом доказывается и следующая лемма (которая далее не понадобится).

Если сумма двух последовательностей, одна из которых периодична с периодом p , а другая периодична с периодом q , $(p, q) = 1$, есть последовательность, членами которой являются только два различных числа a, b , то эта последовательность тоже периодична либо с периодом p , либо с периодом q .

Для полноты приведем доказательство леммы 2 из [6]. Так как Φ_p, Φ_q при простых $p > q$ взаимно просты, то из известного свойства алгоритма Евклида следует существование многочленов $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg a(x) < q, \deg b(x) < p$, таких, что $a(x)\Phi_p(x) + b(x)\Phi_q(x) = 1$. Если $g(x)$ — многочлен делящийся на Φ_n , то $g(x) = \Phi_n(x)h(x)$, откуда

$$g(x) = h(x)a(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x)\Phi_n(x)\Phi_q(x).$$

Деля $h(x)a(x)$ на $\Phi_q(x)$, имеем $h(x)a(x) = c(x)\Phi_q(x) + f_1(x)$, $\deg f_1(x) < q$, и предыдущее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} g(x) &= f_1(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + (c(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x))\Phi_n(x)\Phi_q(x) = \\ &= f_1(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + f_2(x)\Phi_n(x)\Phi_q(x), \\ f_2(x) &= c(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x). \end{aligned}$$

Так как $\Phi_{pq}(x) = \frac{(x^{pq} - 1)(x - 1)}{(x^p - 1)(x^q - 1)}$, то $\Phi_n(x)\Phi_p(x) = \frac{x^{pq} - 1}{x^q - 1} = \Phi_p(x^q)$, значит $\Phi_n(x)\Phi_p(x) = \Phi_p(x^q), \Phi_n(x)\Phi_q(x) = \Phi_q(x^p)$, поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде $g(x) = f_1(x)\Phi_p(x^q) + f_2(x)\Phi_q(x^p)$. Так как $\deg f_1 < q, \deg g < n$, то $\deg f_1(x)\Phi_p(x^q) < q + (p - 1)q = pq = n$, значит

$\deg(f_2(x)\Phi_q(x^p)) = \deg(g(x) - f_1(x)\Phi_p(x^q)) < n$, поэтому $\deg f_2(x) < n - (q - 1)p = p$, что и доказывает лемму.

Также для полноты приведем кратко доказательство из [1, 2] неравенства Рейнхардта и условий его обращения в равенство. Пусть M^* — симметризация Минковского n -угольника M , т. е.

$$M^* = \frac{1}{2}(M + (-M)) = \{(x - y)/2 : x, y \in M\}.$$

Тогда множество M^* есть центрально-симметричный выпуклый $2m$ -угольник, где $m \leq n$, с теми же периметром, диаметром и шириной что и у M . Из центральной симметричности M^* следует, что его внутренний радиус $r^* = b/2$ и внешний радиус $R^* = d/2$ (доказательства всех используемых фактов можно найти в [1, 3]). Последовательность $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ строго монотонно убывает, а $n \sin \frac{\pi}{n}$ строго монотонно возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} &\leq \\ &\leq 2mb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} = 4mr^* \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} \leq p \leq 4mR^* \sin \frac{\pi}{2m} = 2md \sin \frac{\pi}{2m} \leq \\ &\leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

причем равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$, $p = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$ лишь тогда справедливы, когда M^* есть правильный $2n$ -угольник.

Для правильного n -угольника при нечетном n справедливы равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$, а при четном n ни одно из них не верно. Однако при четном n , не равном степени двойки, указанные равенства могут достигаться. Примеры n -угольников, для которых они достигаются, можно построить следующим образом¹²⁾. Представим n произвольным образом в виде $m(2k + 1)$. Возьмем правильный $2k + 1$ -угольник с наибольшей диагональю d и с центром в каждой его вершине построим круг радиуса d . Выпуклая фигура, являющаяся пересечением построенных кругов — это правильный $2k + 1$ -угольник Рело. Ее диаметр равен d , а периметр πd . Ширина ее во всех направлениях одинакова и равна d (это фигура постоянной ширины). Впишем в нее n -угольник с равными сторонами так, чтобы среди его вершин содержались все вершины рассматриваемого $2k + 1$ -угольника. Каждая из $2k + 1$ упомянутых дуг при этом будет разбиваться на m равных дужек, хорды которых будут сторонами рассматриваемого n -угольника. Диаметр его d , а ширина равна $b = d \cos(\pi/2n)$ — высоте равнобедренного треугольника с ребром d и углом при вершине π/n . Тогда его периметр равен $2nd \sin(\pi/2n) = 2b \operatorname{tg}(\pi/2n)$.

¹²⁾ В [1] они назывались полуправильными n -угольниками

Укажем теперь вытекающее из приведенного доказательства полное описание n -угольников Рейнхардта (взятое из [2]). Пусть M такой n -угольник, тогда M^* — правильный $2n$ -угольник (в противном случае равенство не достигается). Ориентируем все стороны многоугольника M^* в одном направлении и сопоставим им вектора, изображающие комплексные корни $2n$ -й степени из единицы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{2n-1}$, где $\varepsilon = \exp \frac{i\pi}{n}$. Тогда сторонам n -угольника M однозначно сопоставляется n -элементное множество, также обозначаемое M , лежащее в группе корней из единицы $W_{2n} = \{1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{2n-1}\}$. При подходящем выборе обозначений, можно считать $1 \in M$. Если расположить вектора этого множества в определенном порядке так, чтобы начало очередного вектора совпало с концом предыдущего, то они будут ограничивать n -угольник, подобный n -угольнику M . Естественно, центрально-симметричному многоугольнику $(-M)$ соответствует множество $(-M)$ такое, что $M \cap (-M) = \emptyset$. Ясно, что условия $M \cap (-M) = \emptyset$ и $M \cup (-M) = W_{2n}$ равносильны. Они равносильны также тому, что в каждой паре противоположных векторов $\{\varepsilon^i, \varepsilon^{n+i} = -\varepsilon^i\}$ один принадлежит M , а другой принадлежит $-M$. Также очевидно, что $\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0$, так как сумма векторов, в которые превращаются ориентированные в одном направлении стороны многоугольника, равна нулю. Расположение векторов в любом другом порядке, хотя и имеет всегда сумму равную нулю, приводит к невыпуклому или самопересекающемуся многоугольнику. Рассмотрим многочлен $f_M(x) = \sum_{\varepsilon^i \in M} x^i$, степени, меньшей $2n$, состоящий из $n - 1$ одночленов и единичного свободного члена. Его корнем будет $x = \varepsilon$. Заменяем в этом многочлене каждый член x^{n+i} на $-x^i$, $0 \leq i < n$. Полученный многочлен обозначим $g_M(x)$. Он состоит из $n - 1$ различных одночленов с коэффициентами ± 1 (в силу условия $M \cap (-M) = \emptyset$) и единичного свободного члена, имеет степень меньше n , значит он не содержит нулевых коэффициентов. Его корнем также будет $x = \varepsilon$. Согласно известным свойствам круговых многочленов (см., например, [5, 8, 10] и любой курс алгебры) последнее условие равносильно делимости $g_M(x)$ на круговой многочлен $\Phi_{2n}(x)$. По любому многочлену $g_M(x)$, удовлетворяющему указанным условиям, однозначно восстанавливается многочлен $f_M(x)$, множество M , соответствующее ему двухцветное ожерелье (см. [2]) и сам n -угольник Рейнхардта M . Поэтому задача описания всех таких n -угольников является чисто алгебраической (что и было показано в [2]).

Легко видеть, что условие антипериодичности коэффициентов многочлена g_M равносильно условию периодичности коэффициентов многочлена f_M , множества M и соответствующего ему двухцветного ожерелья. Из условия антипериодичности с периодом t (тогда обязательно n/t нечетно)

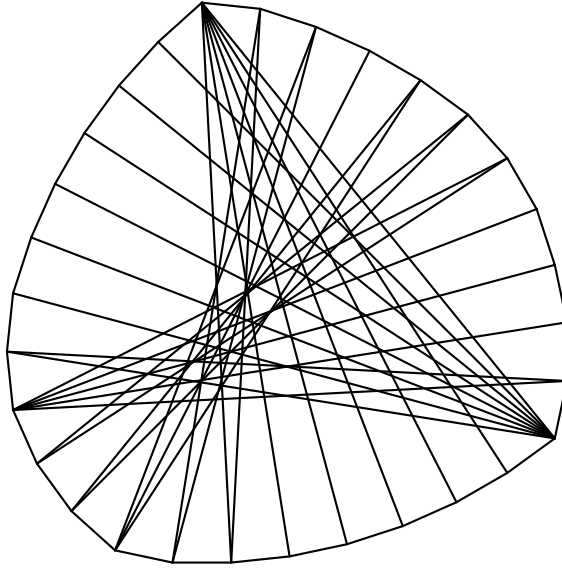


Рис. 2. Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 1

$$\begin{aligned}
 & (x^{13} - x^{12} + 2x^{10} + x^9 - x^8 - x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1) \cdot \\
 & \cdot (1 + x^2 - x^6 - x^8 - x^{10} + x^{14} + x^{16}) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 - \\
 & - x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} - x^{11} - x^{12} + x^{13} - x^{14} + x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - \\
 & - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29},
 \end{aligned}$$

и заметить, что $\Phi_{60}(\varepsilon) = -1 + \varepsilon^2 - \varepsilon^6 - \varepsilon^8 - \varepsilon^{10} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{16} = 0$, так как $0 = (\varepsilon^{30} + 1)(\varepsilon^2 + 1) = (\varepsilon^6 + 1)(\varepsilon^{10} + 1)(1 + \varepsilon^2 - \varepsilon^6 - \varepsilon^8 - \varepsilon^{10} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{16})$, $\varepsilon^6 + 1 \neq 0$, $\varepsilon^{10} + 1 \neq 0$.

Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 1, изображен на рис. 2. Кроме сторон, на нем показаны также его диаметры.

В [7] для построения этого же 30-угольника использовался многочлен Рейнхардта

$$\begin{aligned}
 r(x) = & \\
 = & 1 - x^7 + x^{13} - x^{14} + x^{15} - x^{16} + x^{17} - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{24} - x^{28} + x^{29},
 \end{aligned}$$

найденный компьютерным поиском. Тот факт, что он делится на Φ_{60} (и

имеет корнем ε) следует из тождества

$$(x^{13} - x^{12} - x^{11} + x^{10} + x^9 - x^7 + x^4 - x^2 + 1)(x^{16} + x^{14} - x^{10} - x^8 - x^6 + x^2 + 1) = r(x).$$

Многочлен $r(x)$ факторизован программой Maple, но проверку уже найденного тождества можно при желании выполнить и вручную.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-01-00508а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гашков С. Б. *Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника* // Квант, №10. 1985. С. 15–19.
- [2] Гашков С. Б. *Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта* // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. 2007. С. 91–103.
- [3] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. М.: ГИТТЛ. 1951.
- [4] Audet C., Hansen P., Messine F. *Isoperimetric polygons of maximum width* // Discrete Comput. Geom. Vol. 41, no 1. 2009. P. 45–60.
- [5] de Bruijn N. G. *On the factorization of cyclic groups* // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Vol. 15. 1953. P. 370–377.
- [6] Hare K. G., Mossinghoff M. J. *Sporadic Reinhardt polygons*. arXiv:1203.4107v2. 2012.
- [7] Mossinghoff M. J. *Enumerating isodiametric and isoperimetric polygons* // Journal of Combinatorial theory. Ser. A. Vol. 118, no 6. 2011. P. 1801–1815.
- [8] Rédei L. *Über das Kreisteilungspolynom* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. Vol. 5. 1954. P. 27–28. MR 0062760 (16,13h).
- [9] Reinhardt K. *Extremal Polygone gegebenen Durchmessers* // Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 31. 1922. S. 251–270.
- [10] Schoenberg I. J. *A note on the cyclotomic polynomial* // Mathematika. Vol. 11. 1964. P. 131–136.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Email: sbgashkov@gmail.com