

Семинар

16 сентября 2026

Совершенные формы
и решетки.

$$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$$

$$(1) \operatorname{Sym}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$$

$$\Lambda_{\min}$$

$$(2) (v \otimes v)_{v \in \Lambda_{\min}}$$

Λ называется совершенной если

(2) порождает (1)

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j \quad \underline{q_{ij} = q_{ji}}$$

показ. $\hookrightarrow$ квадратичная форма от n переменных $x_1 \dots x_n$

опр. Γ эквивалентная форма L $n \times n$ - матрица с действит. коэф.

$$Q' \sim Q'' \quad Q''(x) = Q'(Lx)$$

арифметический минимум

$$m_Q = \min_{x \in \mathbb{Z}^n} Q(x)$$

представление минимума:

$$\Sigma_Q = \{x \in \mathbb{Z}^n : Q(x) = m_Q\}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ коэф.}$$

Ор. Воровина:

Q - совершенна.

$$Q(x) = m$$

число решений

$$mQ \sim \sum Q \quad \text{— обозначение}$$

$$\phi \text{ функция}$$

$$\text{Квадратичная} \quad x_i^T x_j \quad i, j$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \leadsto \mathbb{Q}^N$$

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q: V_{ij}^c = x_i^T x_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

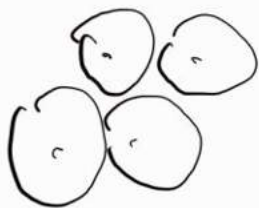
$$Q \in \mathbb{Q}^N$$

Теор. Вопрос: Q -предельная $\Rightarrow Q$ совершенная

Опр. Q как экстремальная (предельная)

$\forall$ некоторая возмущенная Q_{ϵ}
сохраняющая $\det Q$ уменьшающаяся
арифм. минимум

Теор. $\forall n$ как-то классический
совершенный форм



g - мерная плотность упаковки

van Woerden.

P_n - минимальное количество точек в $\mathbb{R}^n$

E_n - минимальное количество точек

$$E_n \leq P_n$$

$$P_n = E_n \quad n \leq 6$$

$$n=6 \quad E_6 = 6 \quad P_6 = 7$$

Barnes

$$P_8 = 10916$$

P_9, E_9 - неизвестно

$$E_8 = 2408$$

Kohärenz Approximation

R. Becher (2018):

$$P_n \gg \exp(n^{1-\varepsilon})$$

$\forall \varepsilon > 0$

van Woerden (2020)

3

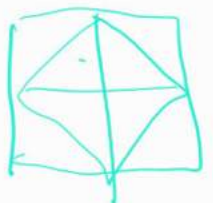
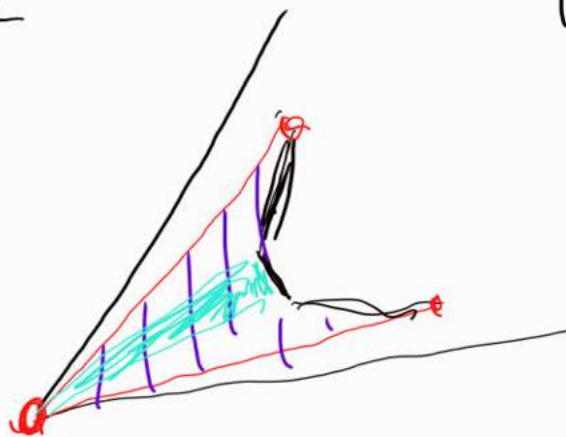
$$P_n \ll \exp(O(n^2 \log n))$$

$$n^{1-\varepsilon} \ll \lg P_n \ll n^2 \log n \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2} \text{ GPT} \\ \rightarrow \frac{9}{4} \end{array} \right.$$

Teor $P_n \geq E_n \gg \exp\left(\frac{1}{2} n^2 \log n (1+\delta)\right)$

M: A_n
W

$\mathbb{R}^N$



срезка

тогда

Нужно было - Таблицы

$$> \frac{c}{2^n} \quad \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{2^n}$$

Первая ^{исполнительная} форма-
совершенная 1 - 1 0 - 0

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n x_j x_{j+1} = x^T G x$$

$$\varphi_0(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

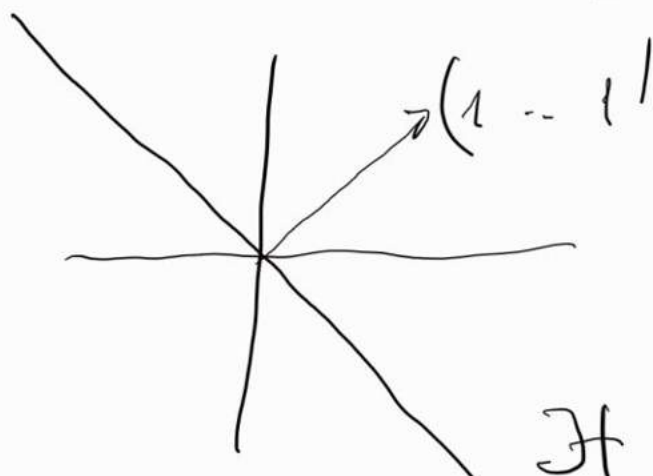
$$\varphi(x) = \varphi_0(2x)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \left(2^{-n/2}\right)$$

321

$$21^T 21 = G$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} 21 \quad \mathbb{R}^{n+1}$$



$H \cap 21^{n+1}$

H

Рассмотрим момент 1

$$w_n = |\{g \in D_n : gA_n = A\}| =$$

$$= \underline{2(n+1)!}:$$

$$\log w_n \sim n \log n$$

Воткну́т геомет́ия 2

$$A_n^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{(x, y)} \in \mathcal{A} : \forall y \in A_n\}$$

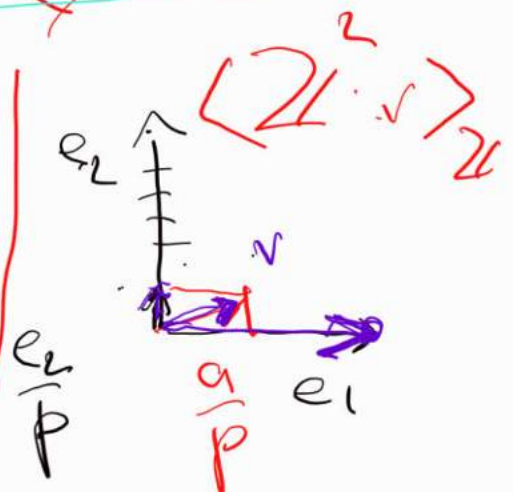
$$2A_n \subset A_n^*$$

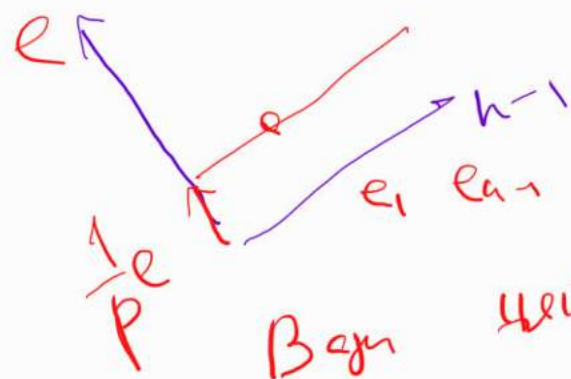
$$(n+1) A_n^* \subset A_n \subset \frac{1}{2} A_n^*$$

$$[A_n : (n+1)A_n^*] \mid (2(n+1))^n$$

Центрально A_n
p-норме

n-мерный параллелепипед





$$a \in \mathbb{Z}$$

$$v = \left(\frac{1}{p}, \frac{a}{p} \right)$$

p - число центрифуг
целое p

a_i - число

$$Z_a = \langle A_n, v \rangle$$

$$a = (1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}$$

$$v = \left(\frac{1}{p}, \frac{a_2}{p}, \dots, \frac{a_n}{p} \right)$$

$$\# Z_a = p^{n-1}$$

$a_i \in \mathbb{Z}$

узлы $\leq \exp(n^2 \log n)$

Ут ит. р. для доказательства
с помощью
то есть
индукцией

(E can

$$p \approx n^{\gamma_n}$$

Лемма

$$p \nmid 2(n+1)$$

также

$$\varphi = \sum x_i^2 - \sum x_i X_i$$

$$\varphi(a) \neq 0(p) \quad (a)$$

Тогда

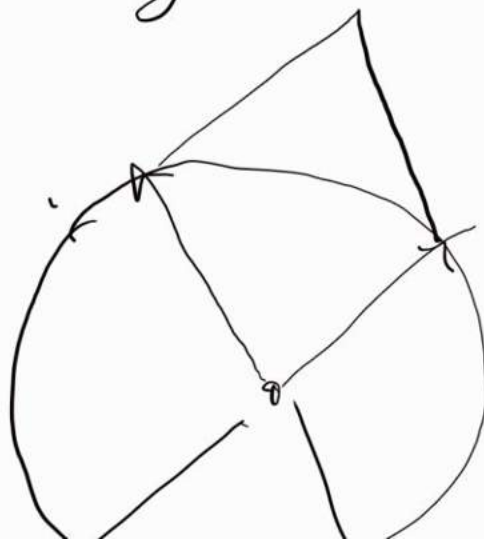
$$(n+1)Z_a^* \subset A \subset Z_a \Rightarrow$$

$$A = A_n$$

$\therefore X = Z_a / (n+1)Z_a^*$ — адель-
 группа
 $\forall X \exists!$ подгруппа индекс p
 $\in Z!$ по модулю p .



Кольцо гом. $\mathbb{Q}_p$

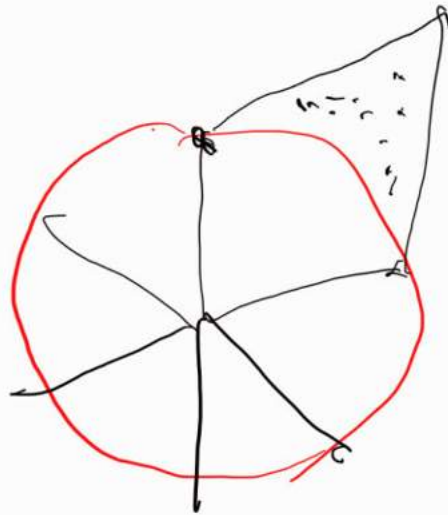


A_n



$\frac{1}{2}$

$$h \gamma_4(n-1) = e \gamma_4^2 h n$$



$$p \leq n^{\gamma}$$

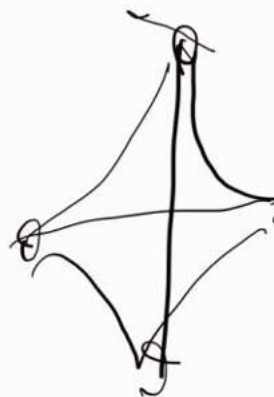
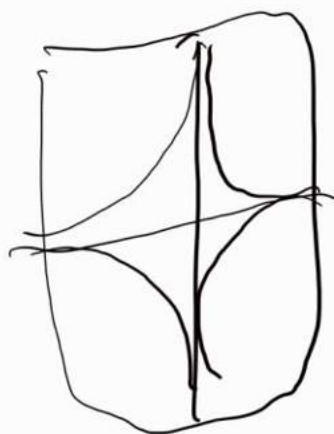
$$p \leq n^{\gamma n}$$

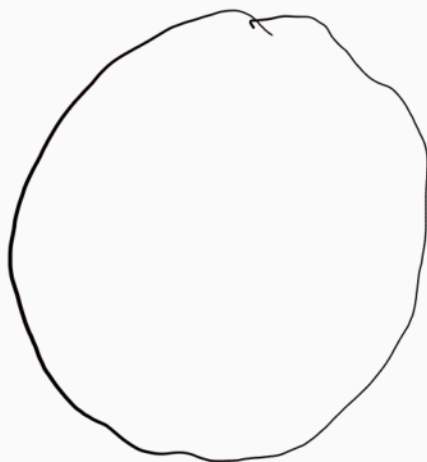
различные гиперплоскости n^2 $n^2 \log n$

$$p^{n-1} \approx n^0 = e$$

Now b/c we have
 unique to the p value

e^{n^2} - when





|

/