

1.

При рассмотрении различных вопросов о многогранниках в целом возникает проблема сведения многогранников данного рода к многогранникам более низкого рода для которых соответствующий результат уже известен. Как правило, предполагается что мы начинаем изучение многогранников данного рода с многогранников с наименьшим количеством вершин. Во многих случаях при этом помогает наличие диагоналей у рассматриваемых многогранников диагоналей. Но бывают случаи когда у многогранников с наименьшим количеством вершин нет диагоналей (например, у многогранников типа тора с 7 вершинами нет ни одной диагонали). Поэтому есть необходимость отдельного изучения классов многогранников без диагоналей.

Известна формула Эйлера

$$V - E + F = 2 - 2g, \quad (1)$$

где V, E, F - это количества соответственно вершин, рёбер и граней многогранника, а g - род ориентируемого многогранника. Пусть рассматриваемые многогранники имеют треугольные грани. Тогда

$$2E = 3F. \quad (2)$$

Значит,

$$3V - E = 6 - 6g \quad (3)$$

и

$$2V - F = 4 - 4g \quad (4)$$

2.

Как выделить многогранники без диагоналей? Известна формула Юнгера и Рингеля из [?] о минимальном числе граней при триангуляции ориентированной поверхности данного рода $g \neq 2$:

$$F_{min} = 2 \left\lceil \frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2} \right\rceil + 4(g - 1),$$

где через $\lceil a \rceil$ обозначено наименьшее целое n , такое, что $n \geq a$. Значит,

$$F_{min}(g) = 2 \left[\frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2} + \alpha(g) \right] + 4(g - 1), \quad (5)$$

где $0 \leq \alpha(g) < 1$ (за исключением случая $g = 2$). При $g = 2$ имеем $F_{min}(2) = 24$, а не 22, как было бы по (5)). Соответственно, по (4) минимальное число вершин

$$V_{min} = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} + \alpha(g) \quad (6)$$

при $g \neq 2$, и

$$V_{min} = 10 \quad (7)$$

при $g = 2$.

Для числа ребер имеем следующие равенства

$$E_{min} = 3\left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} + \alpha(g)\right] + 6g - 6, g \neq 2, \quad (8)$$

и

$$E_{min} = 36 \quad (9)$$

при $g = 2$.

Отметим, что для величины $\alpha(g)$ пока нет никаких исследований о возможных её значениях, например, как близко к 0 или к 1 они могут быть в зависимости от величины рода g .

3.

Изучим теперь вопрос о числе диагоналей. Пусть $D(g)$ обозначает число диагоналей в минимальном многограннике рода g .

Theorem

Минимальный по числу вершин многогранник рода $g \neq 2$ имеет

$$D(g) = \frac{1}{2}\alpha(g)[\alpha(g) + \sqrt{1 + 48g}], 0 \leq \alpha(g) < 1 \quad (10)$$

диагоналей.

Доказательство. По формулам (6) и (8) имеем

$$E = 6g + \frac{3}{2}\sqrt{1 + 48g} + \frac{9}{2} + 3\alpha(g). \quad (11)$$

А число попарных соединений вершин равно

$$C_{V_{min}}^2 = \frac{V(V-1)}{2} = \frac{1}{2}[12g + (3 + \alpha)\sqrt{1 + 48g} + 9 + 6\alpha(g) + \alpha^2(g)].$$

Вычтем из $C_{V_{min}}^2$ число ребер (11) и получим утверждаемое число диагоналей $D(g)$.

При $g = 2$ число вершин равно 10, число попарных соединений равно 45, число ребер равно 36, значит, число диагоналей равно 9. В итоге по (10) имеем, что бездиагональные многогранники бывают только при $\alpha(g) = 0$.

Значит, в формуле (5) число $\sqrt{1 + 48g}$ должно быть целым нечетным числом, скажем, вида $2m + 1$. Тогда

$$g = \frac{m(m+1)}{12}. \quad (12)$$

Число g из равенства (12) должно быть целым. Первым известным вариантам $g = 0$ (сфера в виде треугольной пирамиды) и $g = 1$ (тор в виде 7-вершинного многогранника) соответствуют значения $m = 0$ и $m = 3$. Следующие бездиагональные многогранники будут рода $g = 6$ (при $m = 8$ и 12 вершин), рода $g = 11$ (при $m = 11$ и 15 вершин), рода $g = 13$ (при $m = 12$ и 17 вершин), рода $g = 20$ (при $m = 15$ и 19 вершин) и т.д.

4.

Выделение таких многогранников важно по следующей причине : в доказательствах теорем о симплициальных многогранниках по индукции сведением случаев многогранников высокого рода к многогранникам низшего рода при невозможности использования диагоналей сначала доказывают существование трехзвенного цикла, не ограничивающего грань, и заклеивают этот цикл двумя совпадающими, но противоположно ориентированными гранями, и таким образом снижают род многогранника и тем самым сводят вопрос к изученному ранее случаю многогранника низшего рода (вполне возможно, что этот прием можно использовать и при наличии диагоналей).

5.

Покажем, как можно вычислять квадраты объёмов таких многогранников при известных значениях длин их ребер. Скажем, мы знаем образы вершин бездиагонального ориентированного минимального многогранника рода 6 с 12 вершинами. Рассмотрим обобщенный объём такого многогранника как сумму объёмов согласованно ориентированных тетраэдров с вершиной в одной из вершин многогранника и с основанием на каждой из граней многогранника. Граней многогранника 44, из них 23 грани являются боковыми гранями тетраэдров с выделенной вершиной, а оснований 21. Значит, имеем сумму объёмов 21 пирамиды

$Vol = Vol_1 + \dots + Vol_{21}$. Возьмем

$$(Vol)^2 = \sum_{i=1}^{21} (Vol_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 21} Vol_i Vol_j$$

Все $(Vol_i)^2$ вычисляются по известной формуле Кэли-Менгера через квадраты длин ребер многогранника в виде некоторого многочлена 6-й степени, а с произведениями $Vol_i Vol_j$ поступаем так.

Вспомним, что для квадратных матриц определитель матрицы и определитель транспонированной матрицы равны, т.е. $\det A = \det(A^T)$, а произведение их определителей равно определителю произведения матриц, т.е. в итоге $\det(AB) = \det A \det B = \det A \det(B^T)$.

Пусть начало координат O расположено в одной из вершин многогранника, а M_i, M_j, M_k – вершины основания многогранника. Тогда числа $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ и x_k, y_k, z_k будут соответственно координатами векторов $\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_j}$ и $\overrightarrow{OM_k}$, а их скалярные произведения помогут найти расстояния между этими точками.

Далее немного изменим обозначения Объем V многогранника рассматриваем как сумму ориентированных объемов V_m тетраэдров T_m с общей вершиной O и с основаниями на гранях многогранника, не инцидентных вершине O , т.е. положим.

$$V = \sum_m V_m. \quad (13)$$

Каждый объем V_m представится как одна шестая определителя (т.е. смешанного произведения трех векторов), строки которого состоят из координат вершин основания тетраэдра T_m , взятых в соответствующем порядке. Чтобы избавиться от присутствия координат вершин и выразить все только через расстояния, поступаем так. Пусть тетраэдр имеет вершины с номерами i, j, k . Тогда его объем

$$V_{ijk} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Сумма таких объемов по всем тройкам (т.е. по всем граням) формально уже дает объем многогранника через координаты его вершин, но не так, как хотелось бы – через длины его ребер.

Оказывается, если воспользоваться вторыми степенями объемов, то удастся найти представления только через квадраты длин ребер многогранника. Возведем сумму (13) в квадрат и получим новые выражения, которые условно назовем слагаемыми «скалярного произведения объемов»

$$V_{ijk} V_{pqs} = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} \quad (15)$$

(напоминаем, что нижние индексы соответствуют номерам вершин).
 Определитель квадратной матрицы равен определителю транспонированной матрицы. Назовем строки первой матрицы векторами $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k$, а столбцы второй транспонированной матрицы примем за векторы ρ_p, ρ_q, ρ_s .

Тогда произведение (15) примет вид

$$\frac{1}{36} \begin{vmatrix} (r_i \cdot \rho_p) & (r_i \cdot \rho_q) & (r_i \cdot \rho_s) \\ (r_j \cdot \rho_p) & (r_j \cdot \rho_q) & (r_j \cdot \rho_s) \\ (r_k \cdot \rho_p) & (r_k \cdot \rho_q) & (r_k \cdot \rho_s) \end{vmatrix}$$

Теорема косинусов поможет вычислить скалярное произведение в любой паре векторов, исходящих из точки O :

$$\overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_p} = \frac{|OM_i|^2 + |OM_p|^2 - d^2(M_i, M_p)}{2}. \quad (16)$$