Медиальные графы трёхмерных многогранников

Н.Ю. Ероховец

1 Введение

Мы рассмотрим понятие медиального графа плоского графа G и его применения в разных областях математики (теории многогранников, проблеме четырёх красок, гиперболической геометрии, теории узлов), а также в статистической физике.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – плоский граф. Его *медиальным* графом $M(\Gamma)$ называется граф, вершины которого взаимно однозначно соответствуют рёбрам графа Γ, а рёбра возникают при обходе каждой грани графа G вдоль её граничного цикла. Каждая вершина медиального графа имеет валентность 4. Медиальный граф можно нарисовать на плоскости, взяв в качестве вершин середины рёбер графа Γ и соединив середины последовательных рёбер каждой грани простой кривой.

Вообще говоря, медиальный граф зависит от плоской реализации графа, однако для кубического (то есть 3-валентного) графа Γ он совпадает с *рёберным графом* графа G, вершинами которого являются рёбра графа G, а рёбра соответствуют парам рёбер графа G, имеющим общую вершину.

2 Медиальный граф и проблема 4-красок

2.1 4-цветные раскраски граней многогранника и 3-цветные раскраски вершин медиального графа

Известен следующий результат, см. [O67, Theorem 9.4.3].

Теорема 2.1. *Грани 3-валентного планарного графа можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы смежные грани имели разные цвета тогда и только тогда, когда вершины его медиального графа можно раскрасить в 3 цвета так, что смежные вершины имеют разный цвет.*

Идея доказательства: пусть дана 4-цветной раскраска граней планарного 3-валентного графа. Тогда разобьём рёбра на три класса: если смежный грани имеют цвета: (1) (1 и 2) или (3 и 4); (2) (1 и 3) или (2 и 4); (3) (1 и 4) или (2 и 3). Эти три класса отвечают трём цветам вершин медиального графа. В каждой вершине исходного графа сходятся рёбра из трёх разных классов. Наоборот, если есть 3-цветная раскраска рёбер, такая что в каждой вершине сходятся рёбра разных цветов, то раскрасим одну грань многогранника P в цвет 1, а дальше будем раскрашивать соседние грани переходя через рёбра и сопоставив цветам рёбер классы, описанные выше. Можно показать, что раскраска грани не будет зависеть от пути через рёбра и определена корректно.

2.2 Вероятностная интерпретация теоремы о 4 красках

В работе [M03] был получен следующий результат, связывающий проблему 4 красок с теорией вероятностей. Пусть P – простой многогранник, а $M(P)$ – его медиальный граф. Определим вероятностное пространство, состоящее из всевозможных ориентаций графа $M(P)$. Каждая ориентация имеет одинаковую вероятность. Рассмотрим два события: (A) Две случайные ориентации *имеет одинаковую чётность*, то есть одна ориентация получается из другой изменением ориентации чётного количества рёбер. (B) Две случайные ориентации *сравнимы по модулю* 3, то есть для каждой вершины числа выходящих из неё ребер сравнимы по модулю 3.

Теорема 2.2. *Верна формула*

$$P(B|A) - P(B) = \left(\frac{27}{4096}\right)^{m-2} \frac{\chi(P)}{4},$$

где m – число гиперграней многогранника P, а $\chi(P)$ – количество его раскрасок в 4 цвета.

Следствие 2.1. *Теорема 4 красок эквивалентна утверждению о том, что для любого простого многогранника P события (A) и (B) не являются независимыми.*

3 Медиальный граф в теореме Штейница

Медиальный граф используется при доказательстве достаточности условий теоремы Штейница в книге [G03].

Теорема 3.1 (Теорема Штейница)**.** *Граф Γ комбинаторно эквивалентен графу выпуклого трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда он является простым (без кратных рёбер и петель), планарным (допускает реализацию на плоскости) и 3-связным (связный граф хотя бы с 4 рёбрами, удаление любых одной или двух вершин которого оставляет его связным).*

Условие 3-связности можно переформулировать ещё двумя эквивалентными способами.

Теорема 3.2. *Граф хотя бы с 4 вершинами является 3-связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами существует хотя бы три пути, пересекающиеся только по этим вершинам.*

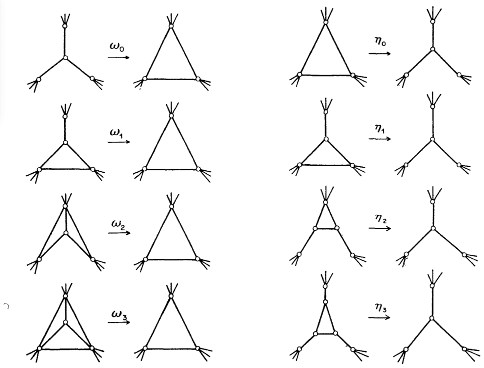

Рис. 1: Редукции

Теорема 3.3 (Другая версия теоремы Штейница). *Разбиение сферы на грани, задаваемое сферическим графом* Γ *более чем с одной вершиной, комбинаторно эквивалентно границе выпуклого трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда каждая грань ограничена простым циклом, и если два граничных цикла различных граней пересекаются, то это пересечение состоит из вершины или ребра.*

Для доказательства достаточности условий теоремы Штейница показывается, что всякий простой планарный 3-связный граф Γ может быть сведён к графу тетраэдра (полный граф K_4) последовательностью редукций (Рис. 1). При этом обратная операция к каждой редукции реализуется геометрической операцией, переводящей многогранник в многогранник.

Для $\Gamma \neq K_4$ показывается, что существует последовательность редукций вида ω_0 или η_0 (они не меняют число рёбер), переводящая Γ в простой планарный 3-связный граф Γ', у которого найдётся 3-угольная грань с вершиной валентости 3. К нему применима одна из операций ω_i или η_j, $i, j > 0$, уменьшающая число рёбер. Для этого вводится понятие *линзового подграфа* (коротко *линзы*) медиального графа $M(\Gamma)$. Он состоит из всех вершин и рёбер, лежащих внутри или на границе одной из двух компонент связности дополнения до простого цикла, состоящего из двух путей, таких что в каждой промежуточной вершине пути он проходит через два ребра, противолежащих друг другу в 4-валентной вершине графа $M(\Gamma)$, а конечные рёбра двух путей не являются противолежащими друг другу в их общей 4-валентной вершине, см. Рис. 2. Мы будем называть гранями линзы грани графа $M(\Gamma)$, лежащие в замыкании соответствующей компоненты связности.

Граф $M(\Gamma)$ всегда содержит *неприводимый* линзовый подграф, то есть подграф, не содержащий других линзовых подграфов.

Если неприводимая линза состоит из двух граней (см. Рис. 2 b), то эти две грани отвечают треугольной грани графа Γ, имеющей 3-валентную вершину. Если неприводимая линза имеет больше двух граней, то можно показать, что в ней найдётся треугольная грань, выходящая хотя бы одним ребром на границу линзы. Тогда редукцией

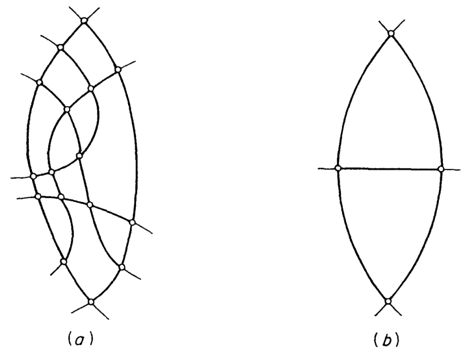

Рис. 2: Линзовый подграф

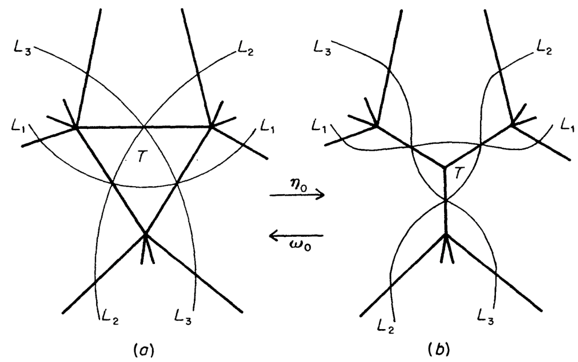

Рис. 3: Редукция

ω_0 или η_0 можно перевести граф Γ в новый граф, у которого неприводимая линза имеет меньше граней.

4 Медиальный граф и идеальные прямоугольные гиперболические многогранники

Мы будем рассматривать пространство Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в модели Кэли-Клейна (проективной модели). В этой модели пространство Лобачевского состоит из внутренних точек единичного шара. Прямыми и плоскостями являются пересечения обычных прямых и плоскостей с шаром. Граница шара состоит из так называемых бесконечно удалённых точек и называется *абсолютом*. Плоскость π_1 в этой модели *перпендикулярна* плоскости π_2 тогда и только тогда, когда либо π_1 содержит цент шара, а π_2 перпендикулярна ей в $\mathbb{R}^3$ в обычном смысле, либо π_1 не содержит цент шара, а π_2 проходит через вершину конуса, который касается границы шара по окружности, по которой её пересекает π_1.

(упражнение: проверить, что если π_1 перпендикулярная π_2, то π_2 перпендикулярная π_1. Это связано с тем, что вершина конуса *полярна* плоскости π_1 относительно сферы).

Многогранник P в пространстве Лобачевского является пересечением обычного многогранника с шаром. Этот многогранник имеет конечный объём в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда многогранник целиком лежит в замкнутом шаре. При этом некоторые его вершины могут лежать на абсолюте, то есть быть бесконечно удалёнными (или *идеальными*). Многогранник ограничен в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда все вершины являются внутренними точками пространства Лобачевского.

Многогранник в $\mathbb{L}^3$ называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте.

Из результатов Е.М. Андреева [A70a, A70b] о многогранниках конечного объёма вытекает следующий факт, который, видимо, впервые был замечен У.П.Тёрстоном (см. [T77]).

Теорема 4.1. *Граф G является медиальным графом некоторого трёхмерного многогранника P тогда и только тогда, когда он является графом идеального прямоугольного многогранника в $\mathbb{L}^3$. Более того, комбинаторный тип многогранника P определён однозначно с точностью до перехода к двойственному многограннику P^* (его вершины отвечают граням многогранника P, грани – вершинами, а рёбра этих многогранников взаимно однозначно соответствуют друг другу).*

Этот факт играет ключевую роль в доказательстве теоремы Кёбе-Андреева-Тёрстона (см. [Z14]):

Теорема 4.2. *Любой комбинаторный трёхмерный многогранник P можно так реализовать в $\mathbb{R}^3$, что все его рёбра касаются единичной сферы. Более того, если потребовать, чтобы центр тяжести точек касания совпадал с центром сферы, то такая реализация единственна, с точностью до изометрии пространства. Кроме того, для такой реализации одновременно имеется реализация двойственного многогранника, двойственные рёбра которого касаются сферы в тех же точках и пересекаются с рёбрами исходного многогранника под прямым углом.*

Назовём многогранник, граф которого совпадает с медиальным графом многогранника P медиальным многогранником (он существует по теореме Штейница). Грани медиального многогранника имеют два типа: они отвечают либо гранями многогранника P, либо его вершинам.

Реализация многогранников P и P^* так, чтобы рёбра касались сферы, получается, если реализовать медиальный многогранник в виде идеального прямоугольного многогранника в модели Кэли-Клейна и рассмотреть плоскости, отвечающие граням медиального многогранника только одного типа.

5 Медиальный граф в теории узлов

В работах Тэйта [T1876a, T1876b] медиальный граф возникает в следующем контексте. Диаграмма узла или зацепления называется *альтернированной*, если в ней проходы

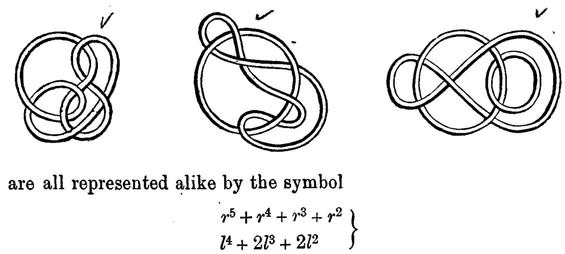

Рис. 4: Зацепления с одинаковым символом Листинга

чередуются с переходами. Каждой такой диаграмме соответствует 4-валентый граф, если все перекрёстки заменить на 4-валентные вершины. Грани этого графа могут быть раскрашены в два цвета: черный и белый, так что грани, смежные по ребру, имеют разный цвет. При этом на диаграмме во всех вершинах чёрной грани правое ребро идёт над левым (обозначим этот тип r), а во всех вершинах белой – левое на правым (тип l). Символ Листинга диаграммы задаётся как

$$\begin{cases} \sum p_k r^k; \\ \sum q_k l^k, \end{cases}$$

где p_k – число k-угольников типа r, а q_k – число k-угольников типа l. Пример приведён на рис. 4.

Тэйт обобщает символ Листинга следующим образом: альтернированной диаграмме узла сопоставляется граф, вершинами которого являются многоугольники только одного цвета, а рёбра соответствуют общие вершины двух многоугольников. Тогда диаграмма чёрных многоугольников однозначно определяет диаграмму белых многоугольников, при этом 4-валентный граф узла является медиальным графом любой из этих диаграмм (см. рис. 5).

Вопрос 1. *Охарактеризовать класс зацеплений, у которых 4-валентный граф диаграммы является медиальным графом 3-мерного многогранника.*

Из результатов У. Менаско [M84] можно вывести, что каждое такое зацепление является гиперболическим, то есть на его дополнении в S^3 можно ввести структуру гиперболического многообразия конечного объёма.

6 Медиальный граф в статистической механике

6.1 Модель Потса

Модель Потса (см. [B85]) на простом графе Γ в статистической механике задаётся следующим образом. Пусть простой граф Γ имеет N вершин. Каждой его вершине v сопоставляется величина σ_v, которая может принимать q значений: $1, 2, \ldots, q$. Эта величина

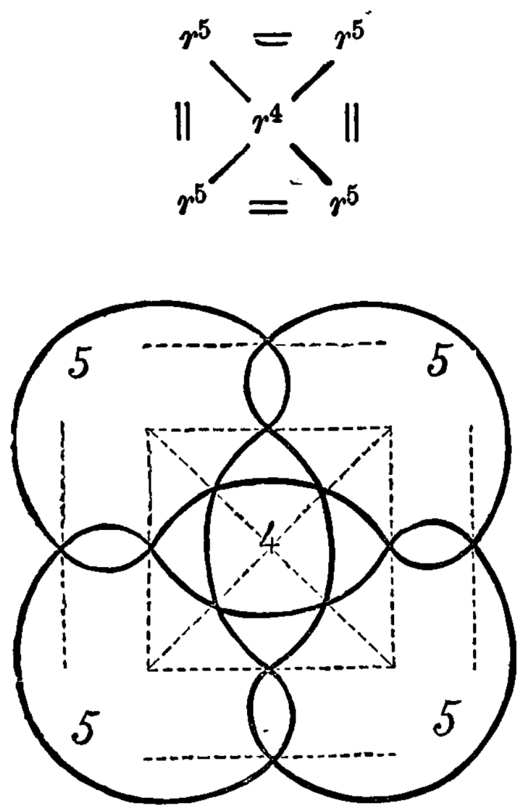

Рис. 5: Восстановление 4-валентого графа по диаграмме «правых» многоугольников.

рассматривается как «спин». Два соседних (то есть соединенных ребром) спина v и w взаимодействуют с энергией взаимодействия $-J\delta(\sigma_v, \sigma_w)$, где $\delta(x, y)$ – символ Кронекера. Тогда полная энергия равна

$$-J \sum_{(v,w)\in\Gamma} \delta(\sigma_v, \sigma_w).$$

При этом статистическая сумма имеет вид

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp\left(K \sum_{(v,w)\in\Gamma} \delta(\sigma_v, \sigma_w)\right),$$

где $K = \frac{J}{k_B T}$, k_B – константа Больцмана, T – температура. Здесь суммирование ведётся по всем значениям все спинов. Таким образом, всего имеется q^N слагаемых.

Если положить $v = e^K - 1$, то

$$Z_N = \sum_{\sigma} \prod_{(v,w)\in\Gamma} \left(1 + v\delta(\sigma_v, \sigma_w)\right).$$

Можно показать, что эта сумма равна

$$Z_N = \sum_{G} q^{C(G)} v^{l(G)},$$

где суммирование ведётся по всем простым графам G на том же множестве вершин, что и Γ, таким что каждое ребро графа G является ребром графа Γ. $C(G)$ – это количество связных компонент в G, а $l(G)$ – рёбер. Такое выражение называется *бихроматическим многочленом* графа G. Если K устремить к $-\infty$, то Z_N будет стремиться к величине, равной числу раскрасок вершин графа Γ в q цветов так, что соседние вершины имеют разные цвета. Эта величина получается подстановкой $v = -1$ в Z_N. Она является многочленом от q, который называется «хроматическим многочленом» графа Γ.

Можно обобщить эту модель, разбив все рёбра графа Γ на k классов. В каждом классе r величины J, K и v принимают одинаковое значение J_r, K_r и v_r. Тогда

$$Z_N = \sum_{G} q^{C(G)} v_1^{l_1(G)} v_2^{l_2(G)} \dots v_k^{l_k(G)},$$

где l_r – число рёбер графа G, принадлежащих классу r.

6.2 Модель льда

Модель типа льда описывает кристаллы с такой конфигурацией атомов водорода, что каждый атом имеет 4 соседних атома, а между каждыми двумя соседними атомами находится ион водорода. Каждый такой ион находится ближе к одному из концов связи, на которой он размещён. Ионы должны подчиняться «правилу льда»:

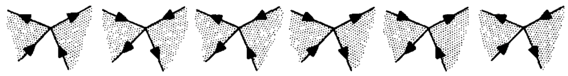

Рис. 6: Конфигурации стрелок

Из четырёх ионов, окружающих каждый атом, два расположены близко, а два удалены вдоль линий соответствующих связей.

В этом случае статистическая сумма равна

$$Z = \sum_{c} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}(c)}{k_B T}\right),$$

где суммирование выполняется по всем конфигурациям c водородных ионов, допускаемых правилом льда, а $\mathcal{E}(c)$ – энергия конфигурации. Связи между атомами водорода через водородные ионы образуют электрические диполи, так что их удобно представлять стрелками на линии связи, направленными к тому концу связи, который занят ионом. Тогда правило льда эквивалентно утверждению, что в каждой вершине графа Г, моделирующего атомы водорода и связи между ними, имеются две стрелки, направленные к ней, и две стрелки, направленные от неё. Всего имеется 6 таких конфигураций (поэтому модели типа льда иногда называют «шестивершинными»), см. рис. 6. Каждая из этих шести локальных конфигураций может характеризоваться своей энергией. Обозначим их $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6$ соотвественно. Тогда $\mathcal{E}(c) = n_1\varepsilon_1 + \cdots + n_6\varepsilon_6$, где n_j – число вершин типа j в графе. В модели самого льда все $\varepsilon_j = 0$.

6.3 Эквивалентность

Оказывается, обобщённая модель Потса на простом планарном графе Г эквивалентна некоторой модели типа Льда на подразделении $M'(\Gamma)$ медиального графа $M(\Gamma)$, обобщённой таким образом, что вершины одного типа могут иметь различную энергию, а также допускаются «внешние узлы» валентности два. Эти внешние узлы отвечают двухвалентным вершинам, добавленным на некоторых рёбрах медиального графа. Такие вершины нужны для того, чтобы граф $M'(\Gamma)$ можно было реализовать на плоскости прямолинейно, то есть так, чтобы каждое ребро было прямолинейными отрезком (согласно теореме Фари для этого достаточно, чтобы граф $M'(\Gamma)$ стал простым). Далее мы считаем, граф $M'(\Gamma)$ реализован на плоскости прямолинейно.

Можно показать, что

$$q^{-\frac{N}{2}} Z_N = \sum_{\text{ДО}} \prod_{m \text{ – вершина в } M'(\Gamma)} X(m)$$

где суммирование ведётся по всем допустимым ориентациям графа $M'(\Gamma)$: в каждую вершину должно входить столько же рёбер, сколько выходить. Определим z условием

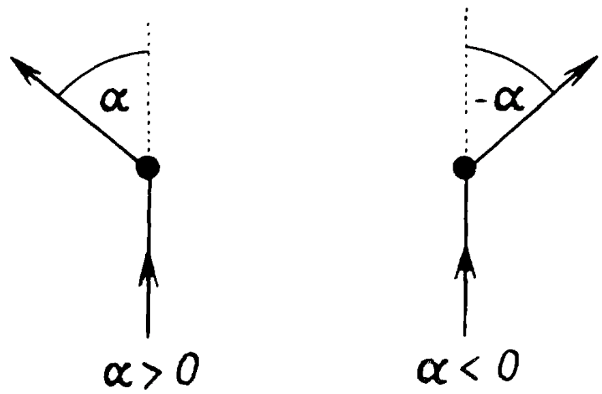

Рис. 7: Определение угла поворота при проходе через вершину

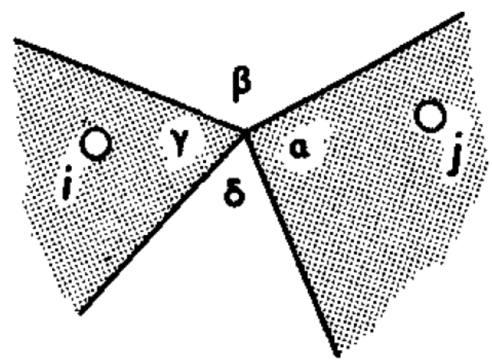

Рис. 8: Углы в вершине. Закрашены области, отвечающие вершинам исходного графа Γ.

$q^{\frac{1}{2}} = z^{2\pi} + z^{-2\pi}$. Тогда в каждой 2-валентной вершине m весовой множитель $X(m)$ равен z^{α}, где α – угол, на который поворачивается ребро графа, если проходить через вершину m по направлению стрелок, причём отсчёт ведётся против часовой стрелки (см. рис. 7). В каждой 4-валентной вершине $X(m) = \varepsilon_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, где вершина m имеет тип k (см. рис. 6), $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – углы в этой вершине, и

$$\varepsilon_1 = z^{\alpha-\gamma},\ \varepsilon_2 = z^{\gamma-\alpha},\ \varepsilon_3 = x_r z^{\beta-\delta},\ \varepsilon_4 = x_r z^{\delta-\beta},\ \varepsilon_5 = z^{-\beta-\delta} + x_r z^{\alpha+\gamma},\ \varepsilon_6 = z^{\beta+\delta} + x_r z^{-\alpha-\gamma}.$$

Здесь $x_r = q^{-\frac{1}{2}} v_r$, а углы в вершине определяются как показано на рис. 8. Легко видеть, что при повороте плоскости на π вокруг вершины типы расстановок стрелок 1 и 2 меняются местами, также как 3 и 4, а типы 5 и 6 переходят себя. При этом соответствующие углы меняются местами, а выражение ε_k переходит в соответствующее выражение $\varepsilon_{k'}$. Поэтому не важно, с какой стороны вершина графа Γ с номером i, а с какой – с номером j.

Вопрос 2. *Охарактеризовать класс систем Потса, отвечающих выпуклым трёхмерным многоганникам.*

Список литературы

[A70a] Е.М. Андреев. *О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского.* Матем. сб., 81(123):3 (1970), 445–478

[A70b] Е.М. Андреев. *О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского.* Матем. сб., 83(125):2(10) (1970), 256–260.

[B85] Р. Бэкстер. *Точно решаемые модели в статистической механике.* М., Мир, 1985.

[M03] Ю.В. Матиясевич. *Один вероятностный эквивалент гипотезы четырех красок.* Теория вероятн. и ее примен., 2003, том 48, выпуск 2, 411–416.

[G03] Branko Grünbaum. *Convex polytopes* (2nd Edition). Graduate texts in Mathematics, **221**, Springer-Verlag, New York, 2003.

[M84] W. Menasco. *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements.* Topology, Vol. 23. No. 1. pp. 37–44, 1984.

[O67] O. Ore. *The Four-Colour Problem.* Academic Press, New York, 1967.

[T1876a] P.G. Tait. *On links.* Proceedings of the Royal Society of Edinburg, Session 1876-77.

[T1876b] P.G. Tait. *On knots.* Transactions of the Royal Society of Edinburg, Vol XXVIII Part I (1876-1877), plates XV and XVI.

[T77] William P. Thurston. *Geometry and Topology of* 3*-Manifolds.* Lecture Notes, Princeton University, Princeton 1977–1978.

[Z14] Г. Циглер. *Теория многогранников.* МЦНМО. 2014.