От многогранника к развертке и обратно: теоремы и проблемы

Н.Долбилин

dolbilin@mi-ras.ru

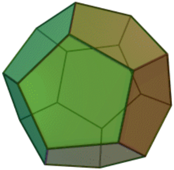
12 ноября 2025 г.

О содержании

- $3D$ выпуклые многогранники;
- “Фацетные” развертки, Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данной фацетной разверткой.
- Однолистные реберные (натуральные) развертки Гипотеза Дюрера и Анти-Дюрер гипотеза; Некоторые результаты
- Общие развертки. Изометричные развертки.
- Изометричные многогранники Теорема А.Д. Александрова о конгруэнтности изометричных выпуклых многогранников. Выпуклые и невыпуклые изометричные многогранники и их объемы.
- Теорема А.Д.Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой
- Проблема: определить комбинаторику многогранника по его развертке (внутренней геометрии).

$3D$-многогранники

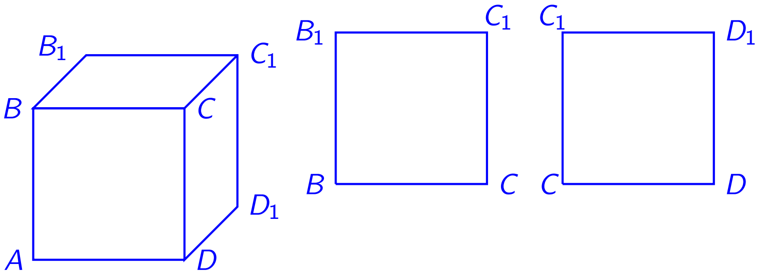
Под *выпуклым* $3D$ *многогранником* – понимается граница выпуклого (телесного) трехмерного многогранника в .



Совокупность M плоских выпуклых многоугольников (граней), т.ч.

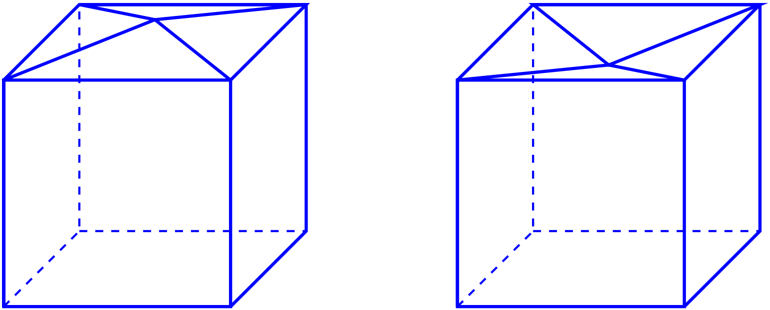
- $\forall$ сторона (ребро) $\forall$ многоугольника из M является стороной еще одного и только одного многоугольника из M (замкнутость);
- от $\forall$ многоугольника из M можно дойти до любого другого, переходя каждый раз от одного многоугольника к смежному с ним через общую сторону (связность);
- для $\forall$ многоугольника$F \in M$ все остальные расположены по одну сторону от плоскости $Aff(F)$ (выпуклость).

Итак, трехмерный выпуклый многогранник – это полиэдральная сфера. Разрежем многогранник вдоль всех ребер на отдельные грани, обозначив одинаковыми буквами общие вершины



Фацетная развертка выпуклого многогранника – это совокупность выпуклых многоугольников-граней, в которой каждая сторона одного многоугольника отождествляется в точности с одной стороной другого многоугольника той же длины.

Многогранники с одинаковой фацетной разверткой



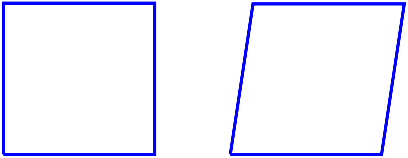
Многогранники с одинаковой фацетной разверткой; справа - невыпуклый

Теорема Коши, 1813

Theorem

Выпуклый многогранник с данной фацетной разверткой определяется однозначно с точностью до конгруэнтности.

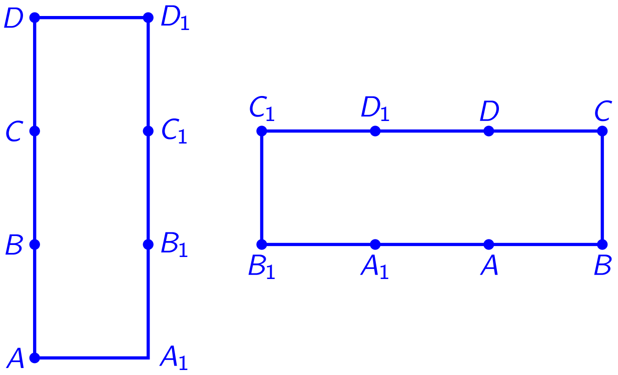
Многогранник *неизгибаем* если непрерывная деформация многогранника, которая является движением на каждой грани, есть движение многогранника в целом.
Из теоремы Коши следует неизгибаемость выпуклых многогранников(в отличие от многоугольников с более чем 3 сторонами)



Реберные развертки

Фацетная развертка состоит из F "листов" – самонепересекающихся многоугольников – граней, где F – число граней в M.

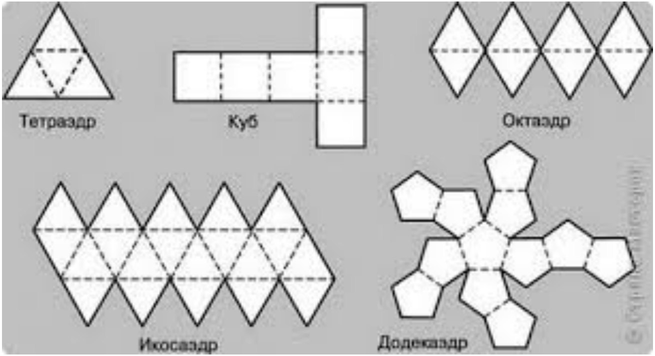
Реберная развертка многогранника это развертка, которая состоит из нескольких плоских простых многоугольников, у которых каждая сторона соответствует ребру многогранника.



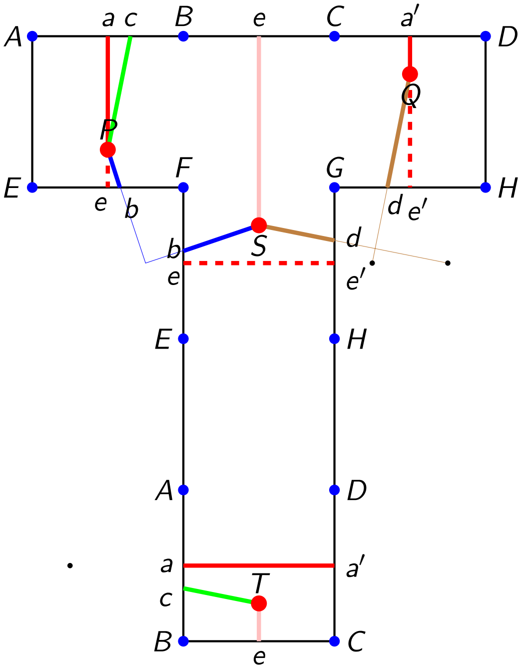
Двулистная развертка куба

Однолистные реберные развертки

Однолистная развертка (polyhedron's net) – это реберная развертка многогранника, состоящая из одного самонепересекающегося многоугольника.



Однолистные реберные развертки правильных многогранников


A
a
c
B
e
C
a′
D
Q
P
E
F
G
H
e
b
d
e′
b
S
d
e
e′
E
H
A
D
a
a′
T
c
B
C
e

Гипотеза Дюрера

Великий немецкий художник Альбрехт Дюрер.
Шедевры "Оплакивание Христа", "Адам", "Ева"
Теоретические исследования оформлены в книге “Наставления в искусстве измерений с помощью циркуля и линейки, плоские и пространственные тела” 1525(!)
Там же много разверток

Гипотеза Дюрера.

Обозначим через $K(P)$ минимальное число многоугольников, которое достигается во множестве всех реберных разверток многогранника P.
Гипотеза А.Дюрера. [Shephard, 1970?] *Для любого выпуклого многогранника P существует однолистная реберная развертка, то есть $K(P) = 1$.*

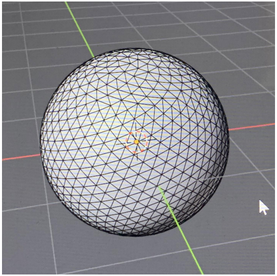
Гипотеза Дюрера не доказана и не опровергнута.
Наиболее общий (из полученных) результат

Theorem (M.Ghomi, 2014)

Для всякого выпуклого P найдется аффинно эквивалентный P' с $K(P') = 1$

Гипотеза Дюрера

Возможно, что она не верна.
Выпуклая оболочка равномерно распределенного на сфере множества X из N точек, $N >> 1$.
Верно ли, что симплициальный многогранник $M(X) = convX$ допускает однолистную реберную развертку?



Анти-Дюрер гипотеза

- Итак, “Гипотеза Дюрера неверна” означает:

$$\exists P : K(P) > 1.$$

- Есть аргументы в пользу следующего утверждения:
  если $\exists P$ с $K(P) > 1$, то $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists P'$ с $K(P') > k$.

- **Анти-Дюрер Гипотеза** (Анти-Дюринг). На классе $\mathcal{P}$ выпуклых многогранников верна альтернатива

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} K(P) = \begin{cases} 1 \\ \text{или} \\ \infty \end{cases}$$

Анти-Дюрер $\Rightarrow$ Дюрер ?

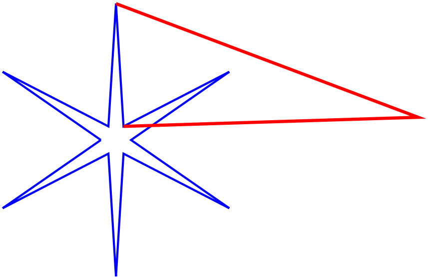
- Анти-Дюрер подсказывает возможный план док-ва Дюрер-гипотезы
- I шаг. Доказать Анти-Дюрера:
  если $\exists$ выпуклый P с $K(P) > 1$, то $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists P'$ с $K(P') > k$.
- II шаг. Достаточно доказать, что для $\forall P$ $N(P) < k$, где $k >> 1$

- На классе $\mathcal{S}$ вложенных полиэдральных сфер S с выпуклыми гранями Дюрер – НЕ ВЕРЕН, но Анти-Дюрер – ВЕРЕН

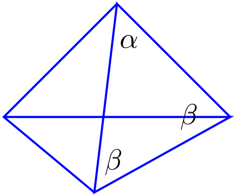
$$\sup_{S \in \mathcal{S}} K(S) = \infty.$$

(Глазырин, Тарасов, УМН, 2007)

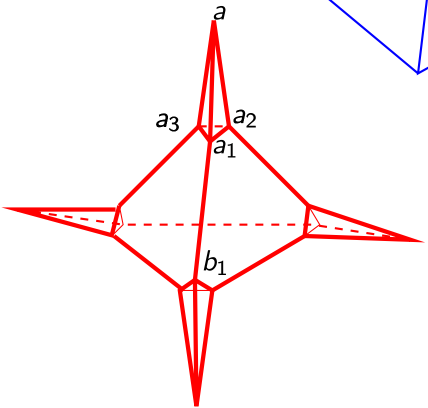
Гипотеза Дюрера для невыпуклых многогранников не верна.
Легко привести многогранник с невыпуклыми гранями, для которого не существует однолистных разверток.
Пример: ‘Высокая’ пирамида со звездчатым основанием.

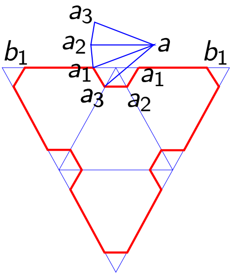


Вопрос: Верен ли аналог гипотезы Дюрера на классе многогранников с выпуклыми гранями?
Контрпример: шипованный тетраэдр



Правильная пирамида
с углом α при вершине

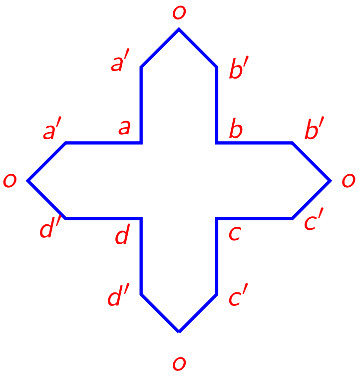




- $\alpha > 60^\circ$, высокий шип $\Rightarrow$ не сущ. однолистной развертки
- $\alpha \leq 60^\circ$, при $\forall$ шипе $\exists$ однолистная развертка

Развертка

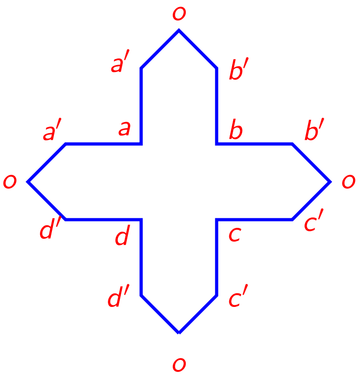
Развертка– это совокупность нескольких простых многоугольников с попарным отождествлением их сторон.
Отождествление сторон осуществляется посредством изометрии.

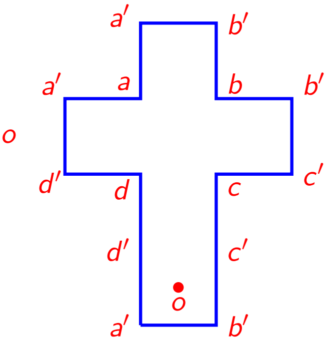


Одна из разверток куба

NB. Вершины и ребра многоугольников развертки не обязательно вершины и ребра многогранника.

Метрика на развертке R: $\forall x, y \in R$ расстояние $d(x, y)$ определяется как длина кратчайшей, соединяющей x и y.
Развертки *изометричны*, если они изоморфны как метрические пространства

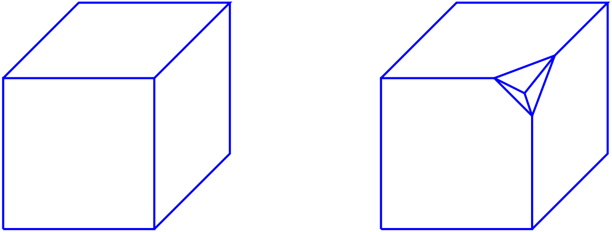




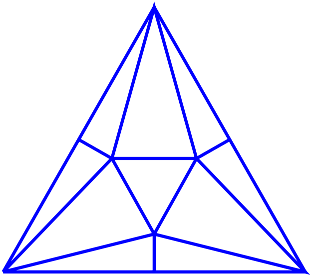
Теорема Александрова о ‘единственности’

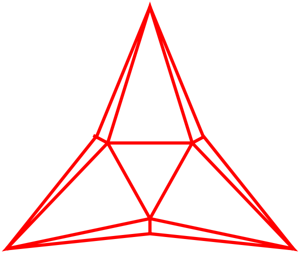
Theorem

Изометричные выпуклые многогранники конгруэнтны



Изометричные многогранники: выпуклый, невыпуклый.
Какой объем больше? Выпуклого или невыпуклого?





T – правильный тетраэдр, склеенный из 4 прав. тр-ков (слева), каждый тр-к 'сломан' вдоль отрезков в невыпуклую фигуру (справа), Q – невыпуклый многогранник, склеенный их 4 фигур

$$V_Q \approx 1.377 V_T$$

Объемы изометричных многогранников: результаты и вопросы

Theorem (Бликер, 1997)

Для всякого симплициального многогранника существует изометричный многогранник большего объема

Theorem (Г.Самарин, 1999)

Для всякого многогранника существует изометричный многогранник большего объема

Проблемы Пусть $\mathcal{T}$ семейство всех изометричных вложений правильного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$

1) Найти разумные оценки для $\sup_{P \in \mathcal{T}} V(P)$:

2) что есть экстремум в $\mathcal{T}$?

3) есть ли локальные экстремумы?

Александр Данилович .Александров (1912-1999)

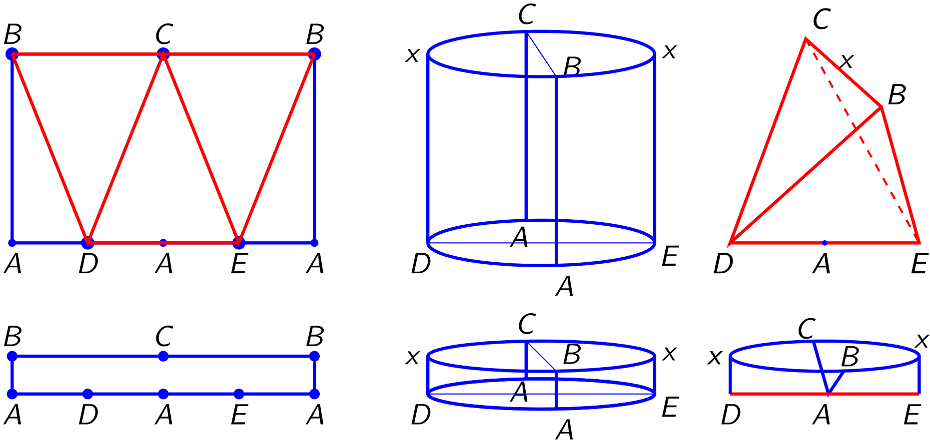
Теорема А.Д.Александрова “о существовании”

Theorem

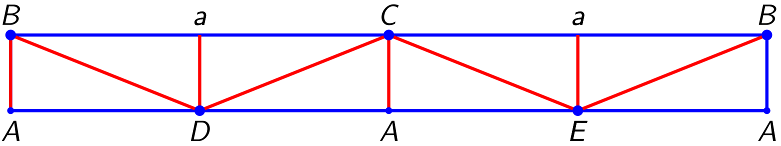
Дана развертка $\mathcal{R}$, такая что
1) $\mathcal{R}$ гомеоморфна сфере;
2) кривизна во всех точках развертки неотрицательна.
Тогда существует выпуклый многогранник $P = P(\mathcal{R})$, включая дважды покрытый многоугольник, с такой разверткой

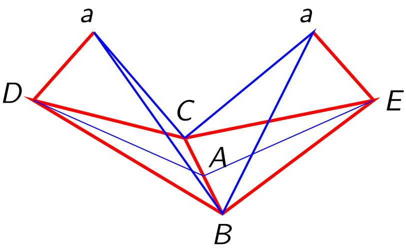
- "Дважды покрытый выпуклый многоугольник” – вырожденный трехмерный многогранник. Он соответствует развертке, состоящей из двух конгруэнтных выпуклых многоугольников, границы которых отождествлены друг с другом посредством наложения.
- Многогранник P определяется однозначно (с точностью до конгруэнтности). Теорема А.Д. о единственности.

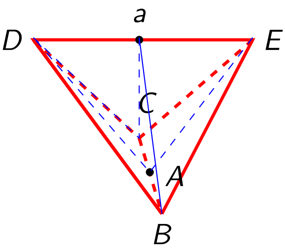
Теорема контринтуитивна

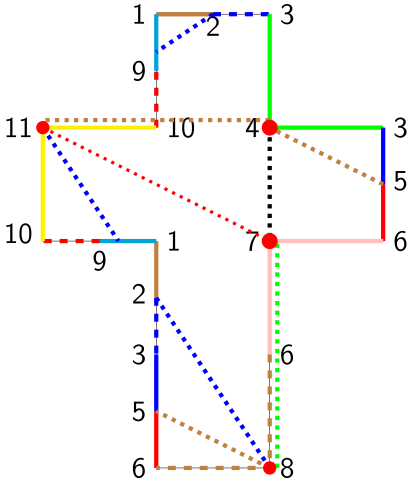


У полученной лодочки "стянуть вместе" противоположные точки, корму x и нос x, кажется невозможным...


B
a
C
a
B
A
D
A
E
A


a
a
D
C
E
A
B


a
D
E
C
A
B



(1) В=11, Р=10, Г=1, В–Р+Г=2 сфера. (2) Кривизна ≥ 9 Вершин положит. кривизны 4 $\Rightarrow$ тетраэдр $\Rightarrow$ кратчайшая, соединяющая $\forall$ пару вершин, является ребром многогранника.

Основная проблема

- С одной стороны, развертка, удовлетворяющая условия теоремы Александрова однозначно определяет выпуклый многогранник.
- Основная проблема: как по внутренней геометрии развертки/многогранника восстановить его структуру: описать множество вершин, ребер, граней.

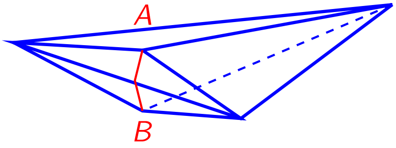
Дана развертка. Что можно сказать о многограннике?

- 1) Истинные вершины многогранника $\Leftrightarrow$ вершины развертки положительной кривизны.
- 2) Для каждой пары истинных вершин находятся все кратчайшие. Для данной пары их может быть несколько.
- *Граф* Γ_R *развертки* $\mathcal{R}$ – множество всех вершин (положительной кривизны) и кратчайших, связывающих пары аершин
- 3) **Критерий развертки дважды покрытого многоугольника:**
- Развертка является разверткой дважды покрытого многоугольника тогда и только тогда, когда в графе развертки имеется биссекторный гамильтонов цикл (БГЦ).
  Гамильтонов цикл биссекторный, если в каждой вершине подходящий угол делит пополам.
  Наличие/отсутствие БГЦ в графе развертки решается в терминах внутренней геометрии.

От развертки к многограннику, первые наблюдения

- Если граф развертки Γ_R не содержит биссекторного гамильтонова цикла, то многогранник P – невырожденный трехмерный многогранник.
- Каждое ребро многогранника является кратчайшей на развертке соединяющей пару соотв. вершин, причем у этой пары вершин, связанных ребром, кратчайшая единственна/примитивна
- Если две вершины на $\mathcal{R}$ имеют более одной кратчайшей, то на P они не имеют общего ребра.
- Однако примитивная кратчайшая не обязана быть я ребром многогранника. Даже самая короткая из примитивных кратчайших не обязана быть ребром
- Таким образом, реберный граф Γ_P многогранника есть планарный подграф графа Γ_R, состоящий лишь из примитивных ребер, вообще говоря, не из всех.

Не всякая кратчайшая – ребро многогранника



$\Gamma_P \subset \Gamma_R$

Пример бипирамиды P, в которой кратчайшая, соединяющая противоположные вершины A и B, является самой короткой среди кратчайших при этом не является ребром.

Вписанные многогранники и их развертки

- $X \subset \mathbb{S}^2$, $P = conv(X) \Rightarrow P$ вписан в сферу.
- P наз. сильно вписанным в сферу, если центр $O \in Int(P)$
- Проекция мн-ка P на $\mathbb{S}^2$ есть разбиение Делоне сферы $\mathbb{S}^2$.

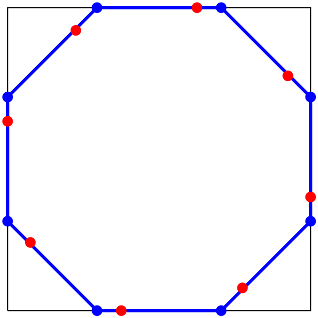
Theorem

Пусть $\mathcal{R}$ – развертка выпуклого сильно вписанного мн-ка P. Множество вершин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (положительной кривизны) развертки $\mathcal{R}$ соответствует набору вершин грани многогранника P, если
– 1) кратчайшие A_iA_{i+1} образуют простую замкнутую ломаную;
– 2) кривизна одного из двух геодезических многоугольников равна 0;
– 3) существует точка $x \in \mathcal{R}$ такая, что $|xA_1| = |xA_2| = \cdots = |xA_m| = r$ и $|xA| > r$ для всех остальных вершин $A \neq A_i$ положительной кривизны развертки .

Строение сильно вписанного многогранника описывается в терминах внутренней геометрии.

Приложение

- Обозначим через $Aut(\mathcal{R})$ группы изометрических автоморфизмов развертки. В силу теоремы единственности $Aut(\mathcal{R}) \sim Sym(P) \subset O(3)$.
- Пример: два правильных n-угольника с отождествленными границами с 'поворотом'.



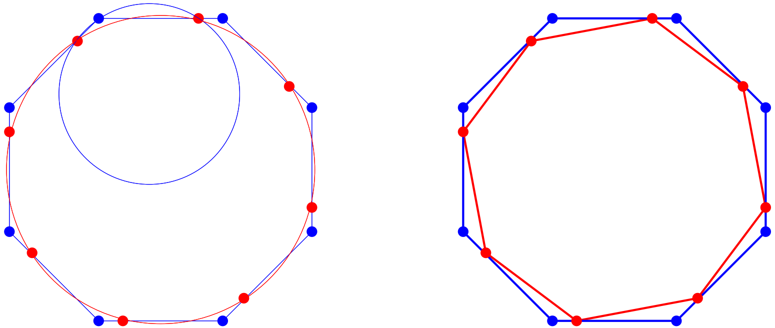
$Aut(\mathcal{R}) \sim D_n \subset O(3)$

$Aut(\mathcal{R})$ действует тразитивно на множестве вершин развертки

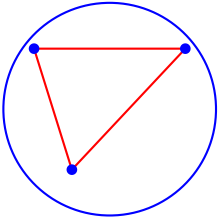
Следовательно, конечная группа D_n транзитивно действует на мн-ве вершин многогранника P

Следовательно, многогранник P сильно вписан в сферу и метод пустого шара применим к его развертке.

Приложение-II



- $n = 3$.
- A, B, C вершины положительной кривизны.
- Геодезический $\triangle ABC$ разрезает сферу на два конгруэнтных развертывающихся треугольника.



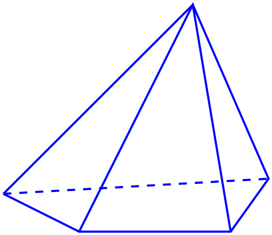
Дважды покрытый треугольник ABC.

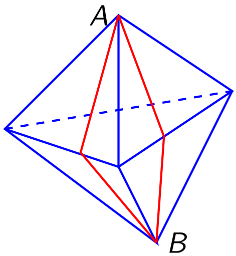
n=4

- Вырожденный случай = гамильтонов биссекторный граф случай: дважды покрытый четырехугольник
- Невырожденный $n = 4$, тетраэдр, тривиален: каждая кратчайшая – ребро.

$n = 5$

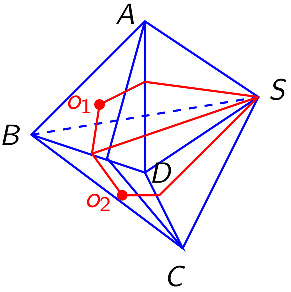
- Вырожденный случай: дважды покрытый выпуклый пятиугольник
- Невырожденный случай. 2 комбинаторных типа: 4-угольная пирамида, 3-угольная бипирамида





- Так как в пирамиде $\forall$ пара вершин принадлежит некоторой одной грани, то их кратчайшая есть (единственный) отрезок, лежащий в этой грани, и непримитивных кратчайших нет.
- Наличие непримитивных кратчайших влечет $\exists$ пара вершин A, B, которые не соединяются ребром, след-но, P есть пирамида и вершины этой пары антиподальны. Структура

От развертки к многограннику $n = 5$



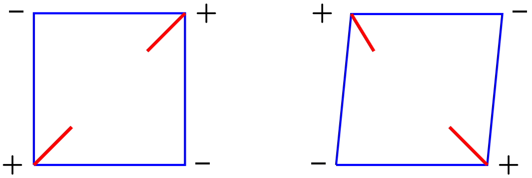
Итак, предполагаем все кратчайшие на развертке примитивны. При этом найдутся две пересекающиеся кратчайшие, , скажем AC и BD

4-угольник $ABCD$ может быть а) плоским или б) пространственным, с ребром AC или BD

- В случае а) имеем 4-угольную пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$. В случае б) 3-угольную бипирамиду с антиподальными вершинами либо A и C либо B и D. Эти случаи определяются внутренней метрикой развертки
- Опустим в пирамидах $SABD$ и $SCBD$ высоты из вершины S. Если $o_1 = o_2$, то $ABCD$ - плоский 4-угольник. Если $o_1 \neq o_2$, то $ABCD$ разламывается по одной из диагоналей в зависимости от положения o_1 и o_2. Все определяется внутренней метрикой!!!

- Пусть M_1 и M_2 – выпуклые изопериметричные многоугольники и $\varphi : \partial M_1 \to \partial M_2$ – изометрическое отображение. Развертка $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M_1, M_2, \varphi)$ удовл. обоим условиям теоремы А.Д.. Определить комбинаторику многогранника $P(\mathcal{R})$ – killer-problem
- Упростим. Пусть $M_1 = A_1 \dots A_n$ и $M_2 = A'_1 \dots A'_n$ с соответственно равными сторонами $A_iA_{i+1} = A'_iA'_{i+1}$ и $\varphi(A_iA_i) = A'_i$, $i = 1, \dots, n$ Пусть $M_1 \not\cong M_2$ и $\mathcal{R}(M_1, M_2, \varphi)$. Что такое $P(\mathcal{R})$?
- Упростим еще раз. Пусть $|\angle A_i - \angle A'_i| < \varepsilon$, $\forall i$; $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – (1,-1-0)-последовательность, т.ч. $\sigma_i = \pm 1$, если $\angle A_i >$ или $< \angle A'_i$ и $\sigma_i = 0$, если $\angle A_i = \angle A'_i$.
  Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M_1, \varphi, \Sigma)$. Как устроен $P(\mathcal{R})$? Открытый вопрос.

$\mathcal{R} = \mathcal{R}(M, \varphi, \Sigma)$. Как устроен $P(\mathcal{R})$?



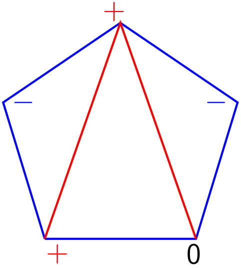
Первые наблюдения.

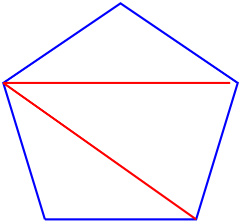
- Количество вершин в P равно n.
- Все ребра $A_i A_{i+1}$ сохраняются в P при дост малом ε
- в $+$-угле появляется хотя бы одно ребро, в каждом 0-угле ($\angle A_i = \angle A_i'$) появляется хотя бы одно ребро.
- Достаточно ли этого, чтобы восстановить P при $n = 5$?
- Для $n > 5$ – открытый вопрос.

Производная правильного многоугольника

M – правильный многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$. $|A_i A_{i+1}| = 1$.
Выпуклый многогранник $P = P(\mathcal{R})$, где
Q – n-угольник $B_1 B_2 \dots B_n$, $|B_i B_{i+1}| = 1$ $\angle B_i = \angle A_i + n_i \cdot a_i$.
Производная по направлени Σ: $P' = P(\mathcal{R}(M, \varphi, \Sigma))$

Пример: $n = 5$, $\Sigma = (1, -1, 0, 1, -1)$. (Не менее 4 перемен знака)





Пример: $n = 5$, $\Sigma = (1, -1, 1, 1, -1)$