О втором спектре Лагранжа

Дмитрий Гайфулин

TU Graz

16 апреля 2023

Пусть α – произвольное иррациональное число. Рассмотрим его разложение в цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (1)$$

Пусть α – произвольное иррациональное число. Рассмотрим его разложение в цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (1)$$

Обозначим через

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

подходящую дробь. Определим также функцию меры иррациональности

$$\psi_\alpha(t) := \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{N}} \|q\alpha\|$$

Пусть α – произвольное иррациональное число. Рассмотрим его разложение в цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots . \qquad (1)$$

Обозначим через

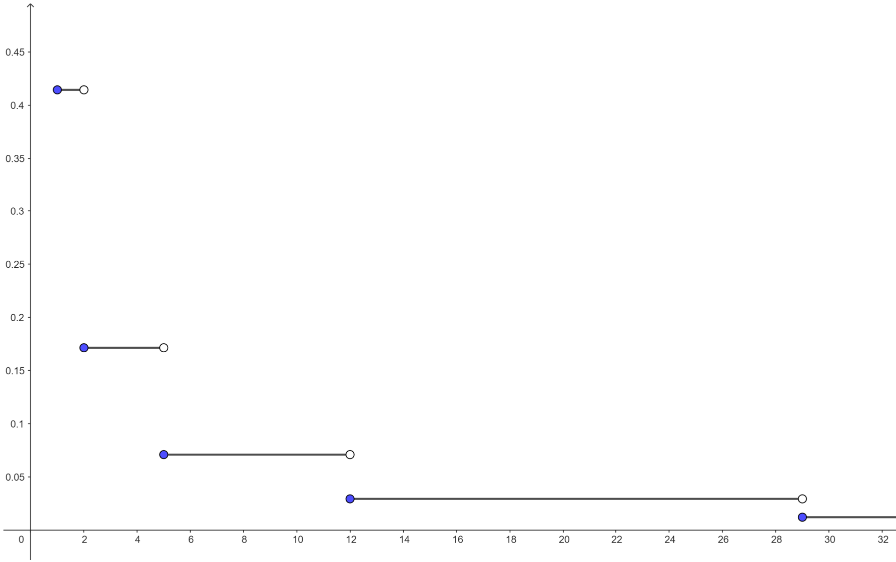
$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

подходящую дробь. Определим также функцию меры иррациональности

$$\psi_\alpha(t) := \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{N}} \|q\alpha\|$$

Легко видеть, что эта функция монотонно убывающая со скачками в точках q_i.

График $\psi_{\sqrt{2}}(t)$



Постоянная Лагранжа

Интересно посмотреть, с какой скоростью убывает $\psi_\alpha(t)$. По теореме Дирихле, для бесконечно многих натуральных t выполнено

$$\psi_\alpha(t) \leqslant \|\alpha t\| < \frac{1}{t}.$$

Интересно посмотреть, с какой скоростью убывает $\psi_\alpha(t)$. По теореме Дирихле, для бесконечно многих натуральных t выполнено

$$\psi_\alpha(t) \leqslant \|\alpha t\| < \frac{1}{t}.$$

Её усилением является теорема Гурвица, утверждающая, что при любом $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ неравенство

$$\|\alpha t\| < \frac{1}{\sqrt{5}t}$$

выполнено для бесконечно многих t.

Интересно посмотреть, с какой скоростью убывает $\psi_\alpha(t)$. По теореме Дирихле, для бесконечно многих натуральных t выполнено

$$\psi_\alpha(t) \leqslant \|\alpha t\| < \frac{1}{t}.$$

Её усилением является теорема Гурвица, утверждающая, что при любом $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ неравенство

$$\|\alpha t\| < \frac{1}{\sqrt{5}t}$$

выполнено для бесконечно многих t.

Назовём число α плохо приближаемым, если существует $c = c(\alpha)$ такое, что неравенство

$$\|\alpha t\| < \frac{1}{ct}$$

имеет не более конечного числа целочисленных решений. Инфимум по таким c, для которых выполнено данное свойство, называется постоянной Лагранжа $\lambda(\alpha)$.

Интересно посмотреть, с какой скоростью убывает $\psi_\alpha(t)$. По теореме Дирихле, для бесконечно многих натуральных t выполнено

$$\psi_\alpha(t) \leqslant \|\alpha t\| < \frac{1}{t}.$$

Её усилением является теорема Гурвица, утверждающая, что при любом $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ неравенство

$$\|\alpha t\| < \frac{1}{\sqrt{5}t}$$

выполнено для бесконечно многих t.

Назовём число α плохо приближаемым, если существует $c = c(\alpha)$ такое, что неравенство

$$\|\alpha t\| < \frac{1}{ct}$$

имеет не более конечного числа целочисленных решений. Инфимум по таким c, для которых выполнено данное свойство, называется постоянной Лагранжа $\lambda(\alpha)$. Нетрудно видеть, что

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{t\to\infty}(t \cdot \psi_\alpha(t))^{-1}.$$

Введём обозначения

$$\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \dots], \quad \alpha_n^* := [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1].$$

Известная формула Перрона говорит, что

$$\psi_\alpha(q_n) = \|\alpha q_n\| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}.$$

Введём обозначения

$$\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \ldots], \quad \alpha_n^* := [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

Известная формула Перрона говорит, что

$$\psi_\alpha(q_n) = \|\alpha q_n\| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}.$$

Следовательно,

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{t\to\infty}(\alpha_{t+1} + \alpha_t^*).$$

Введём обозначения

$$\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \ldots], \quad \alpha_n^* := [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

Известная формула Перрона говорит, что

$$\psi_\alpha(q_n) = \|\alpha q_n\| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}.$$

Следовательно,

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{t\to\infty}(\alpha_{t+1} + \alpha_t^*).$$

Множество всех значений $\lambda(\alpha)$, где α пробегает по множеству иррациональных чисел, называется спектром Лагранжа $\mathbb{L}$. Его наименьшие значения это $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \ldots$ и 3 – минимальная точка накопления. Известно также, что $\mathbb{L}$ содержит луч $(\mu, +\infty)$. Точное значение $\mu \approx 4.5278$ нашёл в 1975 Фрейман.

Введём обозначения

$$\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \dots], \quad \alpha_n^* := [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1].$$

Известная формула Перрона говорит, что

$$\psi_\alpha(q_n) = \|\alpha q_n\| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}.$$

Следовательно,

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{t\to\infty}(\alpha_{t+1} + \alpha_t^*).$$

Множество всех значений $\lambda(\alpha)$, где α пробегает по множеству иррациональных чисел, называется спектром Лагранжа $\mathbb{L}$. Его наименьшие значения это $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \dots$ и 3 – минимальная точка накопления. Известно также, что $\mathbb{L}$ содержит луч $(\mu, +\infty)$. Точное значение $\mu \approx 4.5278$ нашёл в 1975 Фрейман.

Теорема 1 (Кан, Мощевитин, 2010)

Если иррациональные числа α и β таковы, что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то разность

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$$

бесконечно много раз меняет знак.

Пусть $\mathcal{Q}_\alpha := \{q_1, q_2, \ldots\}$ – множество знаменателей подходящих дробей к α. Рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) := \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{Z}, q \notin \mathcal{Q}_\alpha} \|q\alpha\|.$$

Очевидно, что она тоже монотонно убывает и кусочно постоянна, из определения видно, что точки q_i не могут быть точками разрыва $\psi_\alpha^{[2]}(t)$.

Пусть $\mathcal{Q}_\alpha := \{q_1, q_2, \dots\}$ – множество знаменателей подходящих дробей к α. Рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) := \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{Z}, q \notin \mathcal{Q}_\alpha} \|q\alpha\|.$$

Очевидно, что она тоже монотонно убывает и кусочно постоянна, из определения видно, что точки q_i не могут быть точками разрыва $\psi_\alpha^{[2]}(t)$.

Лемма 1 (Мощевитин, 2017)

Если t – точка разрыва $\psi_\alpha^{[2]}(t)$, то она равна одному из чисел

$$q_{n-1} + q_n, 2q_n, q_n - q_{n-1}, q_{n-2} + q_n$$

при некотором n.

Пусть $\mathcal{Q}_\alpha := \{q_1, q_2, \ldots\}$ – множество знаменателей подходящих дробей к α. Рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) := \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{Z}, q \notin \mathcal{Q}_\alpha} \|q\alpha\|.$$

Очевидно, что она тоже монотонно убывает и кусочно постоянна, из определения видно, что точки q_i не могут быть точками разрыва $\psi_\alpha^{[2]}(t)$.

Лемма 1 (Мощевитин, 2017)

Если t – точка разрыва $\psi_\alpha^{[2]}(t)$, то она равна одному из чисел

$$q_{n-1} + q_n, 2q_n, q_n - q_{n-1}, q_{n-2} + q_n$$

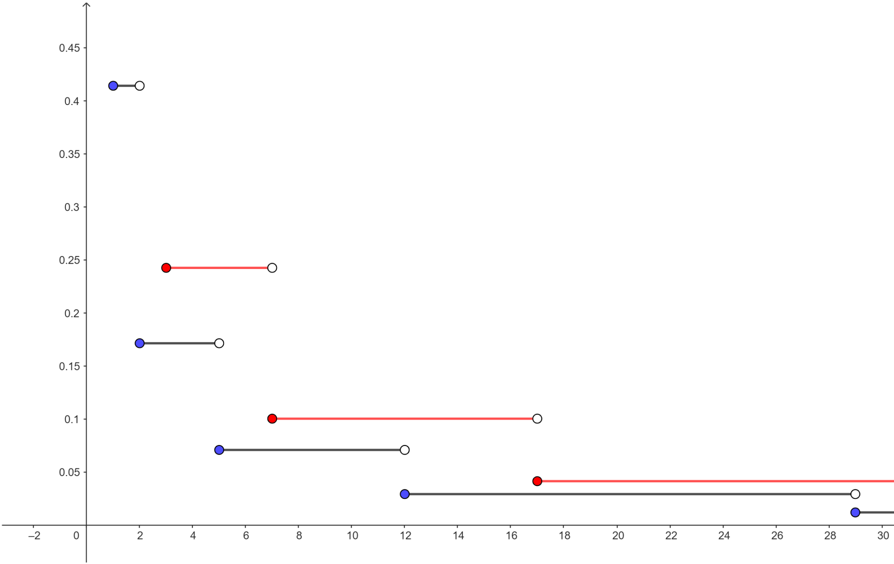
при некотором n.

Обозначим

$$\lambda^{[2]}(\alpha) := \limsup_{t \to \infty} (t \cdot \psi_\alpha^{[2]}(t))^{-1}.$$

Множество всех значений $\lambda^{[2]}(\alpha)$, где α пробегает по множеству иррациональных чисел, называется вторым спектром Лагранжа $\mathbb{L}_2$.

График $\psi_{\sqrt{2}}(t)$ и $\psi^{[2]}_{\sqrt{2}}(t)$



Мы будем говорить, что $\alpha \sim \beta$, если у цепных дробей совпадают хвосты: $\alpha_n = \beta_m$ при каких-то m и n.

Теорема 2 (Мощевитин, 2017; Семенюк, 2023)

1. *Наименьший элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_1 := \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0.559016$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_1$, *то* $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}]$.
2. *Второй по величине элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_2 := \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1.030776$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_2$, *то* $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{17}}{2} = [2; \overline{1, 1, 3}]$.
3. *Третий по величине элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_3 := \frac{13\sqrt{173}}{164} \approx 1.042611$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_3$, *то* $\alpha \sim \frac{39+13\sqrt{173}}{82} = [2; \overline{1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 3}]$.

Мы будем говорить, что $\alpha \sim \beta$, если у цепных дробей совпадают хвосты: $\alpha_n = \beta_m$ при каких-то m и n.

Теорема 2 (Мощевитин, 2017; Семенюк, 2023)

1. *Наименьший элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_1 := \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0.559016$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_1$, *то* $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}]$.
2. *Второй по величине элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_2 := \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1.030776$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_2$, *то* $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{17}}{2} = [2; \overline{1, 1, 3}]$.
3. *Третий по величине элемент* $\mathbb{L}_2$ *равен* $\lambda_3 := \frac{13\sqrt{173}}{164} \approx 1.042611$. *Кроме того, если* $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_3$, *то* $\alpha \sim \frac{39+13\sqrt{173}}{82} = [2; \overline{1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 3}]$.

Для доказательства этой теоремы, а также наших результатов, нам будет полезна лемма, которую мы сформулируем ниже.

Лемма 2 (Мощевитин, 2017)

Пусть иррациональное α не эквивалентно $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\overline{1}]$. *Рассмотрим три величины:*

$$\varkappa_n^1(\alpha) = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}{(1+\alpha_{n-1}^*)(\alpha_n - 1)},$$
$$\varkappa_n^2(\alpha) = \frac{\alpha_{n+1} + \alpha_n^*}{(1-\alpha_n^*)(\alpha_{n+1} + 1)}, \qquad (2)$$
$$\varkappa_n^4(\alpha) = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}{4}.$$

Тогда

$$\lambda^{[2]}(\alpha) = \limsup_{n\to\infty:\ a_n\geqslant 2} \max(\varkappa_n^1(\alpha), \varkappa_n^2(\alpha), \varkappa_n^4(\alpha)). \qquad (3)$$

Для каждого $n \geqslant 3$ положим $\xi_n = [0; \overline{1, 1, 1, 1, 3, (1, 1, 3)_{2n-5}}]$ и

$$\lambda_n := \frac{[3; \overline{(1, 1, 3)_{2n-5}, 1, 1, 1, 1, 3}] + [0; \overline{1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2n-5}}]}{4}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что λ_3 определённое (4) такое же, как в пункте 3) предыдущей теоремы. Зададим также величину λ_∞ как предел

$$\lambda_\infty := \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{[3; \overline{1, 1, 3}] + [0; 1, 1, 1, 1, \overline{3, 1, 1}]}{4} = \frac{3\sqrt{17} + 21}{32} \approx 1.042791.$$

Для каждого $n \geqslant 3$ положим $\xi_n = [0; \overline{1, 1, 1, 1, 3, (1, 1, 3)_{2n-5}}]$ и

$$\lambda_n := \frac{[3; \overline{(1, 1, 3)_{2n-5}, 1, 1, 1, 1, 3}] + [0; \overline{1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2n-5}}]}{4}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что λ_3 определённое (4) такое же, как в пункте 3) предыдущей теоремы. Зададим также величину λ_∞ как предел

$$\lambda_\infty := \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{[3; \overline{1, 1, 3}] + [0; 1, 1, 1, 1, \overline{3, 1, 1}]}{4} = \frac{3\sqrt{17} + 21}{32} \approx 1.042791.$$

Теорема 3

1. *Спектр $\mathbb{L}_2$ в пересечении с $(-\infty, \lambda_\infty)$ образует дискретное множество*

   $$(-\infty, \lambda_\infty) \cap \mathbb{L}_2 = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots\}.$$

   Кроме того, $\lambda_\infty \in \mathbb{L}_2$.
2. *Для всех $n \geqslant 3$ если α таково, что $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_n$, то $\alpha \sim \xi_n$.*

Лемма 3 (Мощевитин, 2017; Семенюк, 2023)

Пусть в последовательности неполных частных $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ *содержится бесконечно много элементов, больших* 3, *или же бесконечно много участков* 2, 33, 313, 31113, 311111, 1113111. *Тогда* $\lambda^{[2]}(\alpha) > \lambda_\infty$.

Доказательство в таблице. Важно иметь в виду, что $\varkappa_n^1(\alpha_n, \alpha_{n-1}^*)$ убывает по обоим аргументам в то время как $\varkappa_n^2(\alpha_{n+1}, \alpha_n^*)$ и $\varkappa_n^4(\alpha_n, \alpha_{n-1}^*)$ – возрастают. Последовательности, для которых верна лемма, мы будем называть запрещёнными.

Pattern	$\varkappa_n^i$ used	Lower estimate	Numerical value
$a_n \geqslant 5$	$\varkappa_n^4$	$([5]+[0])/4$	1.25
4	$\varkappa_n^4$	$[4;\overline{4,1}] + [0;\overline{4,1}]$	1.103553
2	$\varkappa_n^2$	$\alpha_{n+1} \geqslant [1;\overline{3,1}];\quad \alpha_n^* \geqslant [0;2,\overline{1,3}]$	1.116515
33	$\varkappa_n^1$	$\alpha_n \leqslant [3;\overline{1,3}];\quad \alpha_{n-1}^* \leqslant [0;3,\overline{3,1}]$	1.123722
3**1**3	$\varkappa_n^4$	$([3;1,3,\overline{3,1}] + [0;1,\overline{1,3}])/4$	1.080930
3**1**113	$\varkappa_n^4$	$([3;1,1,1,3,1,1,\overline{3,1,1,1}] + [0;1,1,\overline{3,1,1,1}])/4$	1.050188
3**1**1111	$\varkappa_n^4$	$([3;1,1,1,1,1,1,\overline{3,1,1,1}] + [0;1,1,\overline{3,1,1,1}])/4$	1.044287
111**3**111	$\varkappa_n^4$	$([3;1,1,1,1,\overline{3,1,1,1}] + [0;1,1,1,1,\overline{3,1,1,1}])/4$	1.054716

Следствие 1

Пусть α *таково, что* $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) \leqslant \lambda_\infty$. *Тогда с некоторого момента последовательность* $(a_1, a_2, \dots)$ *имеет вид* $(31111(311)_{n_1}31111(311)_{n_2}31111\dots)$, *где все* $n_i \geqslant 1$.

Следствие 1

Пусть α *таково, что* $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) \leqslant \lambda_\infty$. *Тогда с некоторого момента последовательность* $(a_1, a_2, \ldots)$ *имеет вид* $(31111(311)_{n_1}31111(311)_{n_2}31111\ldots)$, *где все* $n_i \geqslant 1$.

Лемма 4

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ *и* $\beta = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \beta_{n+1}]$ *– две цепные дроби. Тогда*

$$\beta - \alpha = (-1)^{n+1} \frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)(\beta_{n+1} + \alpha_n^*)}, \tag{5}$$

Следствие 1

Пусть α *таково, что* $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) \leqslant \lambda_\infty$. *Тогда с некоторого момента последовательность* $(a_1, a_2, \ldots)$ *имеет вид* $(31111(311)_{n_1}31111(311)_{n_2}31111\ldots)$, *где все* $n_i \geqslant 1$.

Лемма 4

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ *и* $\beta = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \beta_{n+1}]$ *– две цепные дроби. Тогда*

$$\beta - \alpha = (-1)^{n+1} \frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)(\beta_{n+1} + \alpha_n^*)}, \qquad (5)$$

Нам будет удобно представить q_n в виде *континуанта* от последовательности $(a_1, \ldots, a_t)$. Определим его так: континуант пустой последовательности $\langle \cdot \rangle$ равен 1, $\langle a_1 \rangle = a_1$, если же $t \geqslant 2$, то

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle = a_t \langle a_1, a_2, \ldots, a_{t-1} \rangle + \langle a_1, a_2, \ldots, a_{t-2} \rangle. \qquad (6)$$

Легко видеть, что

$$[a_0; a_1, \ldots, a_t] = \frac{\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle}{\langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle} = \frac{p_t}{q_t}. \qquad (7)$$

Обозначим $\alpha_\infty := [3; \overline{1, 1, 3}]$, $\alpha_\infty^* := [0; 1, 1, 1, 1, \overline{3, 1, 1}]$. Тогда $\lambda_\infty = \frac{\alpha_\infty + \alpha_\infty^*}{4}$.

Лемма 5

При любом $m \geqslant 0$ *последовательность*

$$111(311)_{2m}3111 \tag{8}$$

является запрещённой.

Обозначим $\alpha_\infty := [3; \overline{1,1,3}]$, $\alpha_\infty^* := [0; 1,1,1,1,\overline{3,1,1}]$. Тогда $\lambda_\infty = \frac{\alpha_\infty + \alpha_\infty^*}{4}$.

Лемма 5

При любом $m \geqslant 0$ *последовательность*

$$111(311)_{2m}3111 \tag{8}$$

является запрещённой.

Доказательство.

Докажем по индукции, случай $m = 0$ уже разобран в таблице выше. Пусть утверждение доказано для всех $m \leqslant k$. Обозначим через n индекс первой тройки в $111(311)_{2m}3111$. Покажем, что $\varkappa_n^4(\alpha) > \lambda_\infty$. Это эквивалентно

$$\alpha_n - \alpha_\infty > \alpha_\infty^* - \alpha_{n-1}^*. \tag{9}$$

Обозначим $\alpha_\infty := [3; \overline{1, 1, 3}]$, $\alpha^*_\infty := [0; 1, 1, 1, 1, \overline{3, 1, 1}]$. Тогда $\lambda_\infty = \frac{\alpha_\infty + \alpha^*_\infty}{4}$.

Лемма 5

При любом $m \geqslant 0$ последовательность

$$111(311)_{2m}3111 \tag{8}$$

является запрещённой.

Доказательство.

Докажем по индукции, случай $m = 0$ уже разобран в таблице выше. Пусть утверждение доказано для всех $m \leqslant k$. Обозначим через n индекс первой тройки в $111(311)_{2m}3111$. Покажем, что $\varkappa^4_n(\alpha) > \lambda_\infty$. Это эквивалентно

$$\alpha_n - \alpha_\infty > \alpha^*_\infty - \alpha^*_{n-1}. \tag{9}$$

Оценим снизу разность $\alpha_n - \alpha_\infty$

$$\alpha_n - \alpha_\infty = [\underbrace{(3; 1, 1)_{2k+2}, 3, 1, 1}_{\text{совпадающая часть}}, 1, 1, \ldots] - [\underbrace{(3; 1, 1)_{2k+2}, 3, 1, 1}_{\text{совпадающая часть}}, 3, 1, 1, \ldots]. \tag{10}$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+9$, отсюда

$$\alpha_n - \alpha_\infty = \frac{[3;1,1,\ldots]-[1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} > \frac{[3;1,1]-[1;1]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1]+[1;1])([1;1]+[1;1])} = \frac{1}{16\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2}. \tag{11}$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+9$, отсюда

$$\alpha_n - \alpha_\infty = \frac{[3;1,1,\ldots]-[1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} > \frac{[3;1,1]-[1;1]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1]+[1;1])([1;1]+[1;1])} = \frac{1}{16\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2}. \tag{11}$$

Оценим теперь снизу $\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,3,\ldots]$. Так как последовательности 33, 313, и 1113111 запрещены, дробь продолжается как

$$\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,\ldots].$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+9$, отсюда

$$\alpha_n - \alpha_\infty = \frac{[3;1,1,\ldots]-[1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} > \frac{[3;1,1]-[1;1]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1]+[1;1])([1;1]+[1;1])} = \frac{1}{16\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2}. \tag{11}$$

Оценим теперь снизу $\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,3,\ldots]$. Так как последовательности 33, 313, и 1113111 запрещены, дробь продолжается как

$$\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,\ldots].$$

Так как мы оцениваем α^*_{n-1} снизу, имеем

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,3,\ldots].$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+9$, отсюда

$$\alpha_n - \alpha_\infty = \frac{[3;1,1,\ldots] - [1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} > \frac{[3;1,1]-[1;1]}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2([3;1]+[1;1])([1;1]+[1;1])} = \frac{1}{16\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle^2}. \tag{11}$$

Оценим теперь снизу $\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,3,\ldots]$. Так как последовательности 33, 313, и 1113111 запрещены, дробь продолжается как

$$\alpha^*_{n-1} = [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,\ldots].$$

Так как мы оцениваем α^*_{n-1} снизу, имеем

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,3,\ldots].$$

Что продолжается как

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_2,3,1,1,\ldots].$$

По предположению индукции, последовательность $111(311)_2 3111$ запрещена, а значит

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0; 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_3, 3, 1, 1, \ldots] = [0; 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_4, \ldots].$$

По предположению индукции, последовательность $111(311)_2 3111$ запрещена, а значит

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_3,3,1,1,\ldots] = [0;1,1,1,1,(3,1,1)_4,\ldots].$$

Повторяя рассуждение k раз, получаем в итоге

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+2},3,1,1,1,1,\ldots].$$

По предположению индукции, последовательность $111(311)_2 3111$ запрещена, а значит

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_3,3,1,1,\ldots] = [0;1,1,1,1,(3,1,1)_4,\ldots].$$

Повторяя рассуждение k раз, получаем в итоге

$$\alpha^*_{n-1} \geqslant [0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+2},3,1,1,1,1,\ldots].$$

Получим теперь верхнюю оценку $\alpha^*_\infty - \alpha^*_{n-1}$.

$$\alpha^*_\infty - \alpha^*_{n-1} = [\underbrace{0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+2},3,1,1}_{\text{общая часть}},3,1,1,\ldots] - \\ [\underbrace{0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+2},3,1,1}_{\text{общая часть}},1,1,\ldots]. \quad (12)$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+14$, отсюда

$$\alpha^*_\infty - \alpha^*_{n-1} =$$

$$\frac{[3;1,1,\ldots] - [1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} <$$

$$\frac{[3;1] - [1;1,1]}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2([3;1,1]+[1;1,1])([1;1,1]+[1;1,1])} =$$

$$= \frac{1}{6\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2}. \tag{13}$$

$$\alpha^*_\infty - \alpha^*_{n-1} =$$
$$\frac{[3;1,1,\ldots]-[1;1,1,\ldots]}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2([3;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])([1;1,1,\ldots]+[1;1,3,\ldots])} <$$
$$\frac{[3;1]-[1;1,1]}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2([3;1,1]+[1;1,1])([1;1,1]+[1;1,1])} =$$
$$= \frac{1}{6\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle^2}. \quad (13)$$

Сравнивая оценки (11) и (13), получим, что для завершения доказательства леммы достаточно показать выполнение неравенства

$$\frac{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2k+3}\rangle}{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+2}\rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

А это уже совсем просто. Лемма доказана!

Лемма 6

Последовательность

$$31111(311)_{2m+1}31111(311)_{2k+1}31111, \tag{14}$$

где $k > m \geqslant 0$ *является запрещённой.*

Лемма 6

Последовательность

$$31111(311)_{2m+1}31111(311)_{2k+1}31111, \tag{14}$$

где $k > m \geqslant 0$ является запрещённой.

Доказательство.

Аналогично предыдущей лемме, достаточно показать, что если n – индекс первой "3" в группе $(311)_{2k+1}$, то

$$\alpha_\infty - \alpha_n < \alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty. \tag{15}$$

Оценим сверху величину $\alpha_\infty - \alpha_n$.

$$\alpha_\infty - \alpha_n = [\underbrace{(3;1,1)_{2k+1},3,1,1}_{\text{общая часть}},3,1,1,3,1,1,\ldots]- \\ [\underbrace{(3;1,1)_{2k+1},3,1,1}_{\text{общая часть}},1,1,3,1,1,\ldots]. \tag{16}$$

□

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+6$. Рассуждая аналогично предыдущей лемме, имеем

$$\alpha_\infty - \alpha_n < \frac{1}{6\langle 1, 1, (3, 1, 1)_{2k+1}\rangle^2}. \tag{17}$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+6$. Рассуждая аналогично предыдущей лемме, имеем

$$\alpha_\infty - \alpha_n < \frac{1}{6\langle 1, 1, (3, 1, 1)_{2k+1}\rangle^2}. \tag{17}$$

Теперь оценим снизу $\alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty$.

$$\begin{aligned}\alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty = &[\underbrace{0; 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+1}, 3, 1, 1}_{\text{общая часть}}, 1, 1, \ldots]- \\ &[\underbrace{0; 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+1}, 3, 1, 1}_{\text{общая часть}}, 3, 1, 1, \ldots].\end{aligned} \tag{18}$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6k+6$. Рассуждая аналогично предыдущей лемме, имеем

$$\alpha_\infty - \alpha_n < \frac{1}{6\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+1}\rangle^2}. \tag{17}$$

Теперь оценим снизу $\alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty$.

$$\alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty = [\underbrace{0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+1},3,1,1}_{\text{общая часть}},1,1,\ldots]- \\ [\underbrace{0;1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+1},3,1,1}_{\text{общая часть}},3,1,1,\ldots]. \tag{18}$$

Первое отличающееся неполное частное имеет индекс $6m+11$. Аналогично предыдущей лемме,

$$\alpha^*_{n-1} - \alpha^*_\infty > \frac{1}{16\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle^2}. \tag{19}$$

Окончание доказательства.

Аналогично предыдущей лемме, для окончания доказательства нам достаточно показать, что

$$\frac{\langle 1, 1, (3, 1, 1)_{2k+1} \rangle}{\langle 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+2} \rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Окончание доказательства.

Аналогично предыдущей лемме, для окончания доказательства нам достаточно показать, что

$$\frac{\langle 1, 1, (3, 1, 1)_{2k+1} \rangle}{\langle 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+2} \rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Поскольку $k \geqslant m + 1$, достаточно проверить, что

$$\frac{\langle 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+3} \rangle}{\langle 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2m+2} \rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}} \tag{20}$$

при всех $m \geqslant 0$.

Аналогично предыдущей лемме, для окончания доказательства нам достаточно показать, что

$$\frac{\langle 1,1,(3,1,1)_{2k+1}\rangle}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Поскольку $k \geqslant m+1$, достаточно проверить, что

$$\frac{\langle 1,1,(3,1,1)_{2m+3}\rangle}{\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle} > \sqrt{\frac{8}{3}} \tag{20}$$

при всех $m \geqslant 0$. Это легко следует из цепочки неравенств

$$\langle 1,1,(3,1,1)_{2m+3}\rangle \geqslant \langle 1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle\langle 3,1,1\rangle = 7\langle 1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle$$

и

$$\langle 1,1,1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle \leqslant 3\langle 1,1,(3,1,1)_{2m+2}\rangle.$$

Лемма доказана.

Из доказанных лемм сразу следует, что

Следствие 2

Пусть для некоторого α *выполнено* $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) < \lambda_\infty$. *Тогда* $\alpha \sim \xi_n$ *для какого-то* $n \geqslant 3$.

Из доказанных лемм сразу следует, что

Следствие 2

Пусть для некоторого α выполнено $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) < \lambda_\infty$. Тогда $\alpha \sim \xi_n$ для какого-то $n \geqslant 3$.

Для завершения доказательства теоремы нам нужно показать, что $\lambda^{[2]}(\xi_i) = \lambda_i$. Напомним, что $\xi_n = [0; \overline{1, 1, 1, 1, 3, (1, 1, 3)_{2n-5}}]$. Этот результат будет следовать из двух технических лемм.

Из доказанных лемм сразу следует, что

Следствие 2

Пусть для некоторого α выполнено $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) < \lambda_\infty$. Тогда $\alpha \sim \xi_n$ для какого-то $n \geqslant 3$.

Для завершения доказательства теоремы нам нужно показать, что $\lambda^{[2]}(\xi_i) = \lambda_i$. Напомним, что $\xi_n = [0; \overline{1, 1, 1, 1, 3, (1, 1, 3)_{2n-5}}]$. Этот результат будет следовать из двух технических лемм.

Лемма 7

*Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ – производное иррациональное число. Если a_n – средняя "3" на участке 311**3**113, то*

$$\max(\varkappa_n^1(\alpha), \varkappa_n^2(\alpha), \varkappa_n^4(\alpha)) < 1.04.$$

Доказательство основного утверждения

Из доказанных лемм сразу следует, что

Следствие 2

Пусть для некоторого α *выполнено* $\lambda_2 < \lambda^{[2]}(\alpha) < \lambda_\infty$. *Тогда* $\alpha \sim \xi_n$ *для какого-то* $n \geqslant 3$.

Для завершения доказательства теоремы нам нужно показать, что $\lambda^{[2]}(\xi_i) = \lambda_i$. Напомним, что $\xi_n = [0; \overline{1,1,1,1,3,(1,1,3)_{2n-5}}]$. Этот результат будет следовать из двух технических лемм.

Лемма 7

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ *– производное иррациональное число. Если* a_n *– средняя "3" на участке* 311**3**113, *то*

$$\max(\varkappa_n^1(\alpha), \varkappa_n^2(\alpha), \varkappa_n^4(\alpha)) < 1.04.$$

Лемма 8

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ *– производное иррациональное число. Если* a_n *– средняя "3" на участке* 31111**3**113 *или* 311**3**11113, *то*

$$\varkappa_n^4(\alpha) > \max(\varkappa_n^1(\alpha), \varkappa_n^2(\alpha)).$$

Покажем, что в условиях Леммы 7 выполнено $\varkappa_n^1(\alpha) < 1.04$. Напомним, что

$$\varkappa_n^1(\alpha) = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}{(1 + \alpha_{n-1}^*)(\alpha_n - 1)}.$$

Покажем, что в условиях Леммы 7 выполнено $\varkappa_n^1(\alpha) < 1.04$. Напомним, что

$$\varkappa_n^1(\alpha) = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}{(1+\alpha_{n-1}^*)(\alpha_n - 1)}.$$

Так как функция $\varkappa_n^1(\alpha_n, \alpha_{n-1}^*)$ убывает по обоим аргументам, из того что

$$\alpha_n \geqslant [3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}], \qquad \alpha_{n-1}^* \geqslant [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}],$$

имеем

$$\varkappa_n^1(\alpha) \leqslant \frac{[3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}] + [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}]}{(1 + [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}])([3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}] - 1)} \approx 1.031440. \qquad (21)$$

Остальное доказывается аналогично.

Покажем, что в условиях Леммы 7 выполнено $\varkappa_n^1(\alpha) < 1.04$. Напомним, что

$$\varkappa_n^1(\alpha) = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}{(1+\alpha_{n-1}^*)(\alpha_n - 1)}.$$

Так как функция $\varkappa_n^1(\alpha_n, \alpha_{n-1}^*)$ убывает по обоим аргументам, из того что

$$\alpha_n \geqslant [3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}], \qquad \alpha_{n-1}^* \geqslant [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}],$$

имеем

$$\varkappa_n^1(\alpha) \leqslant \frac{[3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}] + [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}]}{(1 + [0; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}])([3; 1, 1, \overline{3, 1, 1, 1}] - 1)} \approx 1.031440. \tag{21}$$

Остальное доказывается аналогично.

Следствие 3

$\lambda_\infty \in \mathbb{L}_2$.

Доказательство.

Рассмотрим число

$$\alpha = [0; (3, 1, 1)_{2n_1+1}, 3, 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2n_2+1}, 3, 1, 1, 1, 1, (3, 1, 1)_{2n_3+1}, \ldots], \tag{22}$$

где $n_i \to \infty$. Из вышедоказанного сразу следует, что $\lambda^{[2]}(\alpha) = \lambda_\infty$. □

Спасибо за внимание!