

Семинар по Дискретной геометрии и геометрии чисел под научным руководством

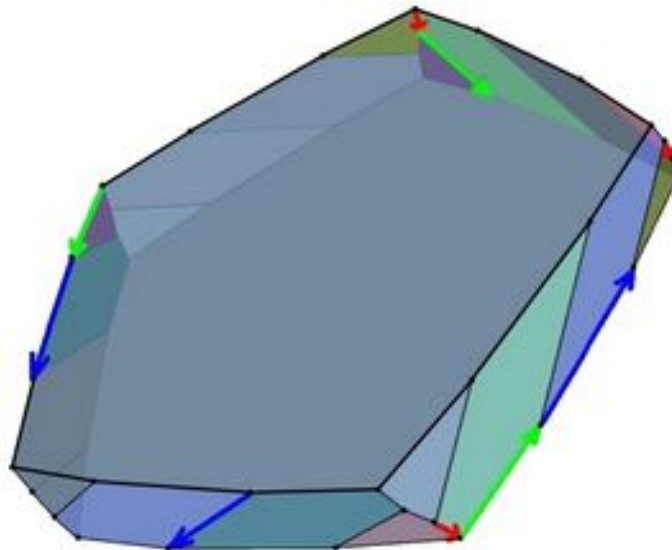
Н.П. Долбилина, Н.Г. Мощевитина, М.Д. Ковалева и И.Х. Сабитова

Вторник 7-го ноября 2023, 16:45

***Ярослав Викторович Кучериненко***

*(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, геологический факультет)*

## **К задаче М. М. Постникова о трёхмерных сферических многообразиях**



УДК 515.162+514.13+514.17

М. М. ПОСТНИКОВ  
ТРЕХМЕРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Сферической формой размерности  $n \geq 2$  называется фактор-многообразие  $S^n/\Gamma$  сферы  $S^n$  по необходимо конечной подгруппе  $\Gamma$  группы  $O(n+1)$ , действующей на  $S^n$  без неподвижных точек (т.е. такой, что все характеристические корни каждого элемента  $A \neq E$  из  $\Gamma$  отличны от 1). При  $\Gamma = \{E\}$  это сама сфера  $S^n$ , а при  $\Gamma = \{\pm E\}$  проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$ . Легко видеть, что при  $n$  четном никаких других сферических форм нет, а при  $n$  нечетном группа  $\Gamma$  состоит только из вращений (является подгруппой группы  $SO(n+1)$ ).

Полное описание с точностью до сопряженности всех групп  $\Gamma$  и, значит, с точностью до изометричности всех сферических форм  $S^n/\Gamma$  было получено в 1972 г. Вольфом (см. [1]). Геометрически наиболее интересный случай  $n=3$  был в 1930 г. исследован Зейфертом и Трельфаллем [2, 3] (и значительно ранее, но лишь в теоретико-групповом отношении в полузабытой работе юного Гурса [4]). В 1961 г. результаты Зейферта и Трельфалля были переформулированы Хаттори с помощью кватернионов (см. [5]). С тех пор эти результаты неоднократно излагались в литературе (см., например, [6]). Тем не менее ряд элементарных вопросов о

### 3. Пространства октаэдра, усеченного куба и додекаэдра

Фактор-пространства  $S^3/\Gamma^R$ ,  $S^3/O^R$  и  $S^3/I^R$  описываются аналогичным образом.

3.1. Так как (см. п. 2.5 гл. 1) группа  $T^*$  покрывается четырьмя группами  $C_2$  с образующими  $\frac{1+(i\pm j\pm k)}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{i\pm j\pm k}{\sqrt{3}}$  и тремя подгруппами  $C_4$  с образующими

$i, j, k$ , то область Дирихле  $D$  группы  $T^R=(T^*)^R$  является пересечением четырех линз

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(X\pm Y\pm Z) \leq 1, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + 2(X\pm Y\pm Z) \leq 1 \quad (13)$$

и трех линз

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2A \leq 1, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + 2A \leq 1, \quad (14)$$

где  $A=X, Y, Z$ .

Поскольку каждое из неравенств (14) является, очевидно, полусуммой двух из неравенств (13) (и, значит, их следствием), область (14) содержит область (13) и потому в построении области Дирихле  $D$  фактически не участвует. Таким образом, область Дирихле группы  $T^R$  задается неравенствами (13).

Наглядно, эта область представляет собой сфероидальный октаэдр, получающийся из обычного октаэдра заменой его граней конгруэнтными сферическими равно-сторонними треугольниками. На этом основании фактор-пространство  $S^3/\Gamma^R$  называется пространством октаэдра (хотя оно и является пространством орбит бинарной

3.4. Описание областей Дирихле других групп, действующих на  $S^3$  без неподвижных точек, наталкивается на пока еще не преодоленные вычислительные трудности.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wolf Y.A. Spaces of constant curvature: Thesis. Berkley: Univ. Calif., 1972. Рус. пер.: Вольф Дж. А., Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
2. Seifert H., Threlfall W. Topologische Untersuchung der Diskontinuitatsbereich endlicher Bewegungsgruppen des drei dimensional enspharischen Raumes// Math. Ann. 1930. Bd.104. S.1070.
3. Seifert H., Threlfall W. Topologische Untersuchung der Diskontinuitatsbereich endlicher Bewegungsgruppen des drei dimensional enspharischen Raumes (Schluss)// Math. Ann. 1932. Bd.107. S.543-586.
4. Goursat M.E. Sur les substitutions ortogonales et les divizioni regulieres de le space// Ann. Ecole Norm. Super. 3-me ser. 1889. T.6, P.9-102.
5. Хаттори А. О трехмерных эллиптических пространственных формах (на англ. яз.)// Сугаку. 1961. Т. 12. С.164-167.
6. Scott P. The geometries of 3-manifolds// Bull. London Math. Soc. 1983. Vol.15, N 56. P.401-487. Рус. пер.: Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях// Математика. Новое в зарубежной науке. 1986. № 39.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
8. Постников М.М. Аналитическая геометрия: Лекции по геометрии. Семестр 1. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
9. Кирбли Р., Шарлкман М. Восемь ликов гомологической трехмерной сферы Пуанкаре// УМН. 1982. Т.37, № 5. С.139-159.

## Трёхмерные сферические группы без неподвижных точек

|   |                           |                           |                          |                             |
|---|---------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 1. $C_n \times C_m$   | 2. $D_n^* \times C_m$     | 3. $T^* \times C_m$       | 4. $O^* \times C_m$      | 5. $I^* \times C_m$         |
| <b>Геометрия ячеек Дирихле-Вороного описана у Постникова:</b> |                           |                           |                          |                             |
| $C_n \times C_m$ линзы  | $D_n^* \times C_m$ призмы | $T^* \times C_1$ октаэдры | $O^* \times C_1$ ус.кубы | $I^* \times C_1$ додекаэдры |

### Некоторые из рассмотренных нами примеров

| Группы                  |                                      | Разбиения сферы $S^3$   |
|-------------------------|--------------------------------------|---|
| $C_6^* \times C_1^*$    | $C_3^* \times C_2^*$ , $2  3$        | 12 линз толщиной $\pi/6$  |
| $D_3^* \times C_1^*$    | $C_3^* \times C_2^*$ , $2\perp 3$    | 12 гексагональных призм толщиной $\pi/3$ и шириной $\pi/2$                            |
| $D_6^* \times C_1^*$    | $D_2^* \times C_3^*$ , $2  3$        | 24 12-угольных призмы толщиной $\pi/6$ и шириной $\pi/2$                              |
| $T^* \times C_1^*$      | $D_2^* \times C_3^*$ , 3 как в кубе  | 24 октаэдра {3,4,3}   |
| $D_{12}^* \times C_1^*$ | $D_4^* \times C_3^*$ , $4  3$        | 48 24-угольных призм толщиной $\pi/12$ и шириной $\pi/2$                              |
| $O^* \times C_1^*$      | $D_4^* \times C_3^*$ , 3 как в кубе  | 48 усечённых кубов высотой $\pi/4$  |
| $I^* \times C_1^*$      | $T^* \times C_5^*$ , $5    [01\tau]$ | 120 додекаэдров {5,3,3}   |
|                         | $I^* \times C_7^*$ , $7  5$          | $120 \cdot 14/2 = 840$ "пятиугольных призм" толщиной $2\pi/70$ в 12 стопках           |
|                         | $I^* \times C_{11}^*$ , $11  5$      | $120 \cdot 22/2 = 1320$ "пятиугольных призм" толщиной $2\pi/110$ в 12 стопках         |
|                         | $I^* \times C_{77}^*$ , $77  5$      | $120 \cdot 77 \cdot 2/2 = 9240$ "пятиугольных призм" толщиной $2\pi/770$ в 12 стопках |

# Кватернионы и повороты

- Поворот в трёхмерного пространства  $X' = QXQ^{-1}$  (Cayley, 1845)
- Движение в общего вида в  $S^3$ :  $X' = Q_1 X Q_2^{-1}$  (Cayley, 1854)
- Вывод дискретных групп, действующих на трёхмерной сфере (Gourgsat, 1889)

## Трёхмерные сферические группы без неподвижных точек (по теореме Зейферта-Трельфала, 1930-1932)

1.  $C_n \times C_m$

2.  $D_n^* \times C_m$

3.  $T^* \times C_m$

4.  $O^* \times C_m$

5.  $I^* \times C_m$

## Геометрия ячеек Дирихле-Вороного описана у Постникова:

$C_n \times C_m$  линзы

$D_n^* \times C_m$  призмы

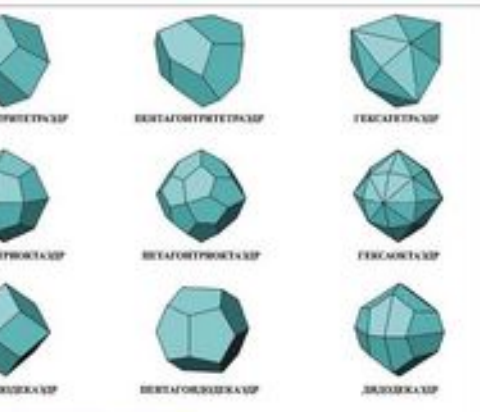
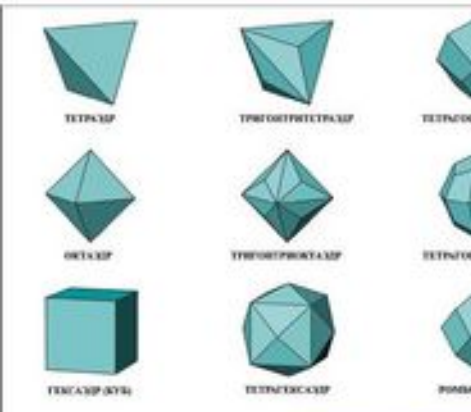
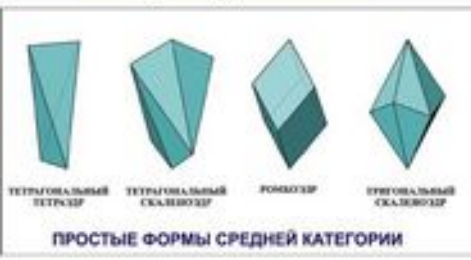
$T^* \times C_1$  октаэдры

$O^* \times C_1$  ус.кубы

$I^* \times C_1$  додекаэдры

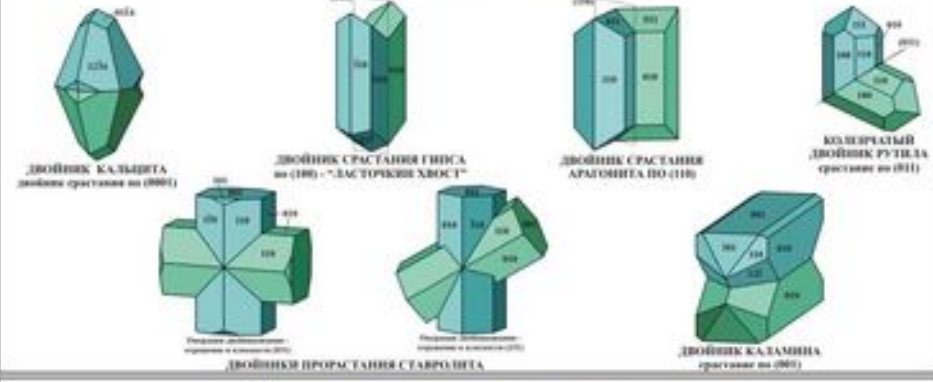
М. М. Постников, Трёхмерные сферические формы, Тр. МИАН СССР, 1991, том 196, 114–146

# 47 ПРОСТЫХ ФОРМ КРИСТАЛЛОВ

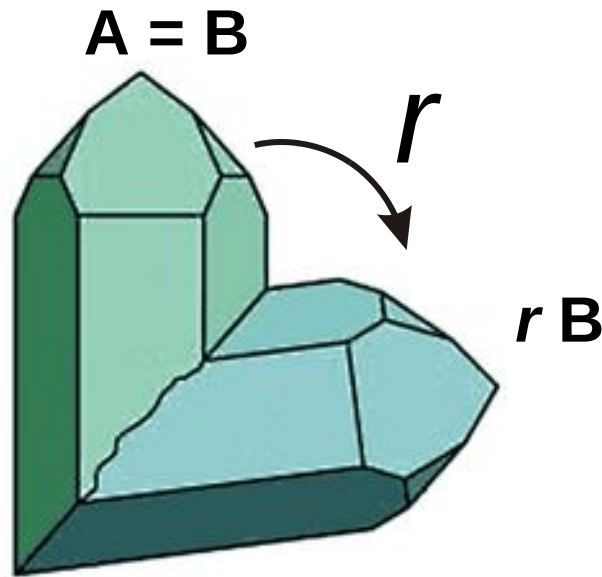


# ДВОЙНИКИ КРИСТАЛЛОВ

## ДВОЙНИКИ КРИСТАЛЛОВ НИЗШЕЙ И СРЕДНЕЙ КАТЕГОРИИ



# Описания взаимных расположений индивидов в двойниках и сростках кристаллов



$(A, B)$  – кристаллы, совпадающие в исходном положении

$(A, r B)$  – движение  $r$  определяет положение кристалла  $B$  относительно кристалла  $A$

Но в паре  $(A, ar b B)$ ,  
где  $a$  – симметрия кристалла  $A$ ,  
 $b$  – симметрия кристалла  $B$ ,  
кристаллы разориентированы  
точно также!

Значит все множество  $\{a_i r b_j\}$  задаёт одинаковые взаимные расположения кристаллов



Зафиксируем фигуру  $A$  и фигуру  $B$  некоторым образом относительно системы координат пространства  $X^d$  и назовём такое расположение фигур  $A$  и  $B$  *начальным*. Подействуем на фигуру  $B$  некоторым движением  $r: B \rightarrow B_1$ . Движение  $r$  характеризует положение фигуры  $B_1$  относительно фигуры  $A$ . Тожественное движение характеризует начальное положение фигуры  $B$ .

**Теорема** (см. рис.2). Пусть имеются четыре фигуры  $A, B_0, B_1, B_2 \in X^d$ ; фигуры  $B_0, B_1$  и  $B_2$  равны; фигуры  $A$  и  $B_0$  заданы в их начальном положении; движения  $r_1$  и  $r_2$  характеризуют положения фигур  $B_1$  и  $B_2$  относительно фигуры  $A$ :  $(A, B_1) = (A, r_1 B_0)$ ,  $(A, B_2) = (A, r_2 B_0)$ . Эти положения будут равными тогда и только тогда, когда найдутся такие два движения  $a \in \text{Symm}(A)$  и  $b \in \text{Symm}(B_0)$ , отображающие фигуры  $A$  и  $B_0$  в себя ( $A = aA, B_0 = bB_0$ ), что выполняется формула:

$$r_2 = ar_1 b \quad (1)$$

**Другая аналогичная формулировка:** взаимные расположения фигур в парах  $(A, B_1) = (A, r_1 B_0)$  и  $(A, B_2) = (A, r_2 B_0)$  характеризуются равенством первого типа тогда и только тогда, когда найдутся такие два движения  $a \in \text{Symm}(A)$  и  $b \in \text{Symm}(B_0)$  ( $A = aA, B_0 = bB_0$ ), что выполняется формула (1).

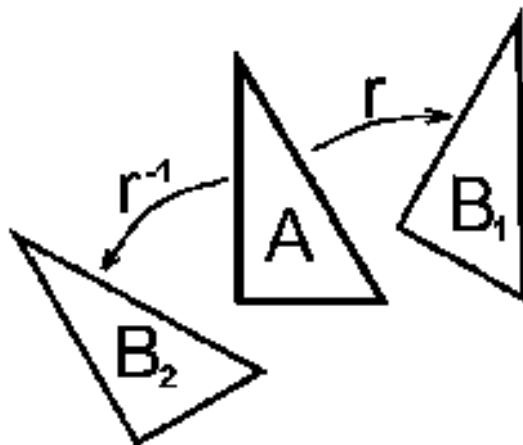


Рисунок 1. Взаимные расположения фигур в парах  $(A, B_1)$  и  $(A, B_2)$  равны. При этом  $B_1 \equiv A$  и  $A \equiv B_2$ , где  $\equiv$  — гомеоморфизм.

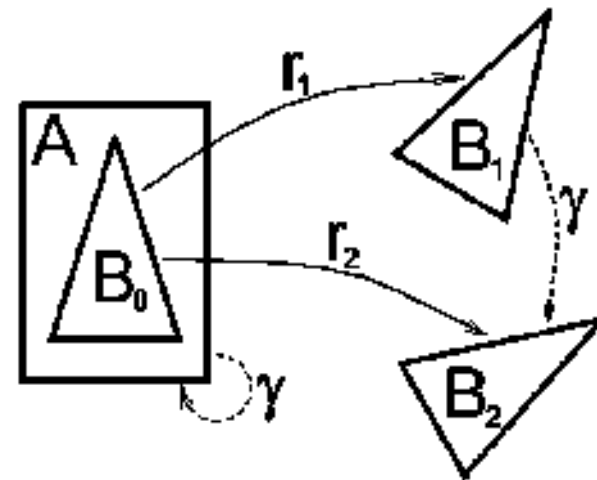
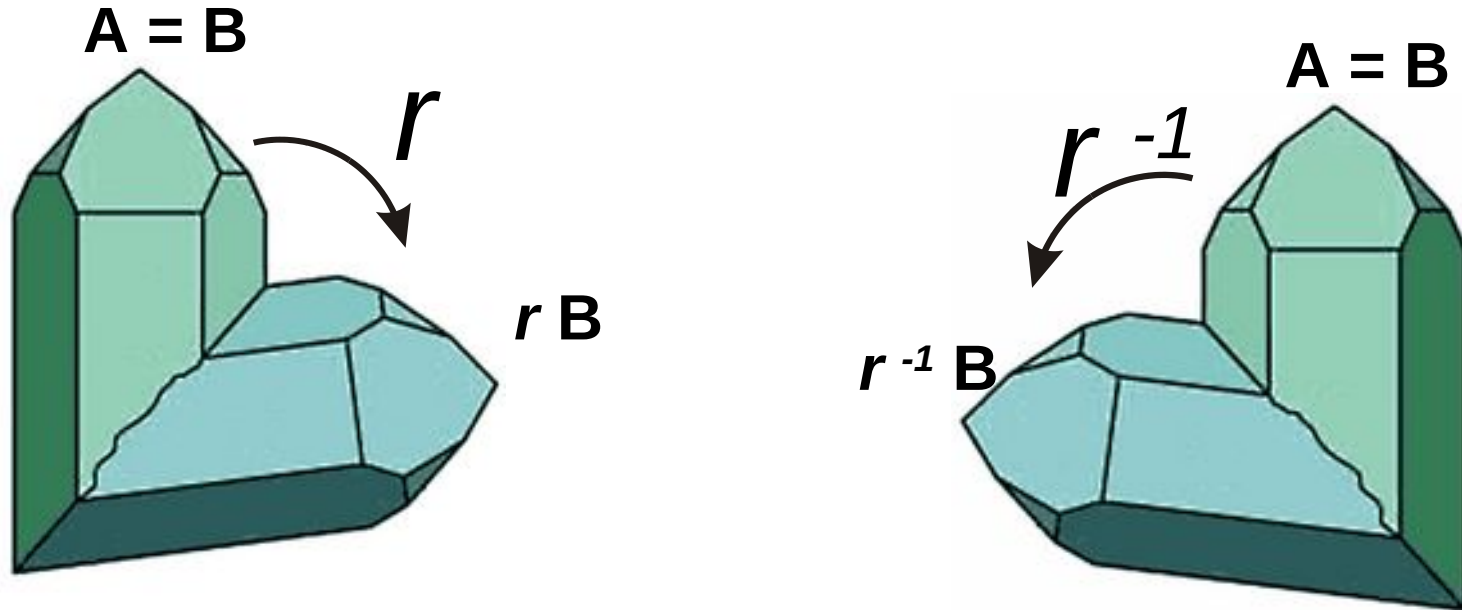


Рисунок 2.

**Определение.** Движения  $r_1$  и  $r_2$  будем считать эквивалентными, если они характеризуют равные положения фигур  $B_1$  и  $B_2$  относительно фигуры  $A$ .

**Следствие.** Множество всех движений эквивалентных с  $r$ , задающих равные положения фигуры  $B$  относительно  $A$  в паре  $(A, rB)$  образуют множество  $\{a_i r b_j\}$  с независимым перечислением всех  $a_i \in \text{Symm}(A)$  и  $b_j \in \text{Symm}(B)$ . Всё множество пар с равными положениями фигуры  $B$  относительно зафиксированной фигуры  $A$ , можно записать в виде  $\{(A, a_i r b_j B)\}$ . Если группы  $\text{Symm}(A)$  и  $\text{Symm}(B)$  конечны, то общее число таких пар равно произведению порядков групп при условии, что  $\text{Symm}(A) \cap \text{Symm}(B)$  за исключением тождественного движения  $I$ , не содержит других операций, коммутирующих с  $r$ . В противном случае число пар будет меньше в соответствующее число раз.

Равенство кристаллов **A** и **B** приводит к эквивалентности движений  $r$  и  $r^{-1}$



$$r(A, r^{-1}B) = (rA, r r^{-1}B) = (rA, B) = (B, rA, B) = (A, rB)$$

Значит множество  $\{a_i r a_j\} \cup \{(a_i r a_j)^{-1}\}$

**всё множество** одинаковых взаимных расположений кристаллов

**Теорема** Пусть в пространстве  $X^d$  имеется три равные фигуры  $A \equiv B_0, B_1$  и  $B_2$  и пусть имеется такое движение  $r$ , что  $(A, B_1) = (A, rA)$  и  $(A, B_2) = (A, r^{-1}A)$ . Тогда взаимные расположения фигур в парах  $(A, B_1)$  и  $(A, B_2)$  равны, т.е.  $\exists \gamma: (A, B_1) \rightarrow (A, B_2)$ .

**Доказательство.** Подействуем на пару  $(A, B_1)$  фигур движением  $\gamma = r^{-1}$ :  $r^{-1}(A, B_1) = r^{-1}(A, rA) = (r^{-1}A, A) = (A, r^{-1}A) = (A, B_2)$ . Таким образом, движение  $\gamma$ , совмещающее пару фигур  $(A, B_1)$  с парой  $(A, B_2)$  найдено и теорема доказана.

**Замечание.** Поскольку при совмещении пар фигур, фигура  $A$  совместилась с фигурой  $B_2$ , а фигура  $B_1$  - с  $A$ , то в доказанной теореме имело место равенство второго типа для взаимных расположений фигур в парах  $(A, B_1)$  и  $(A, B_2)$ .

**Следствие.** Множество всех эквивалентных движений, задающих равные взаимные расположения двух равных фигур  $A$  и  $B$ , можно записать следующим способом:  $\{a_i r a_j\} \cup \{(a_i r a_j)^{-1}\}$ , где  $a_i, a_j \in \text{Symm}(A)$ , элементы группы симметрии фигуры  $A$ , независимо перечисляются слева и справа от  $r$ . Если группа  $\text{Symm}(A)$  конечна, то общее число таких движений равно  $2 \# \text{Symm}(A)^2$ , при условии, что  $\text{Symm}(A)$  не содержит других движений, коммутирующих с  $r$ , помимо тождественного движения  $I$ . В противном случае число движений, эквивалентных с  $r$ , будет в соответствующее число раз меньше.

Множество движений  $\{r\}$ , действующих на фигуру  $B$  в паре  $(A, rB)$ , характеризующих одно и тоже взаимное расположение фигур в этой паре

$\{a_i r b_j\}$ , если фигуры  $A$  и  $B$  разные\*

$\{a_i r a_j\} \cup \{(a_i r a_j)^{-1}\}$ , если фигуры  $A$  и  $B$  равны\*

\* Здесь  $a_i \in \text{Symm}(A)$ ;  $b_j \in \text{Symm}(B)$

**Операторы  $P, P', R, E$ :  $ab = P_a b = P'_b a$**

$P_a$  - оператор, умножающий слева (левый сдвиг)

$P'_b$  - оператор, умножающий справа (правый сдвиг)

$R: a \rightarrow a^{-1}$  – обращающий оператор

$E: a \rightarrow a$  – единичный (сохраняющий) оператор

Для умножения операторов (их последовательного применения) справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} P_a E = E P_a = P_a & \ ; \quad P'_a E = E P'_a = P'_a & \ ; \quad R E = E R = R & \ ; \\ E^2 = R^2 = E & \ ; \quad P_{ab} = P_a P_b & \ ; \quad P'_{ab} = P'_b P'_a & \ ; \\ P_a P'_b = P'_b P_a & \ ; \quad R P_a = P'^{-1}_a R & \ ; \quad R P'_a = P_a^{-1} R & \ ; \\ P_e = P'_e = P_e P'_e = E & \ ; \quad (P_a)^{-1} = P_a^{-1} & \ ; \quad (P'_a)^{-1} = P'_a & \end{aligned}$$

Для умножения операторов справедливы следующие свойства:

$$P_a E = EP_a = P_a, \quad P'_a E = EP'_a = P'_a, \quad RE = ER = R, \quad E^2 = R^2 = E \quad \blacktriangleright \square .$$

Если умножение элементов множества  $S$  подчиняется условию ассоциативности, то для умножающих операторов выполняются следующие свойства:

$$P_{ab} = P_a P_b \quad \blacktriangleright \quad \forall a, b, c \in S, \quad abc = (ab)c = P_{ab} c, \quad abc = a(bc) = P_a bc = P_a P_b c \quad \square$$

$$P'_{ab} = P'_b P'_a \quad \blacktriangleright \quad \forall a, b, c \in S, \quad cab = c(ab) = P'_{ab} c, \quad cab = (ca)b = P'_b ca = P'_b P'_a c \quad \square$$

$$P_a P'_b = P'_b P_a \quad \blacktriangleright \quad \forall a, b, c \in S, \quad acb = a(cb) = P_a cb = P_a P'_b c, \quad acb = (ac)b = P'_b ac = P'_b P_a c \quad \square$$

Если дополнительно потребовать существование единичного элемента  $e \in S$ , а также элементов  $a^{-1}$  и  $b^{-1}$ , обратных к  $a$  и  $b$ , где  $a, b, a^{-1}, b^{-1} \in S$ , то справедливы следующие свойства:

$$R P_a = P'_a{}^{-1} R \quad \blacktriangleright \quad (ab)^{-1} = Rab = R P_a b, \quad (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = P'_a{}^{-1} b^{-1} = P'_a{}^{-1} R b \quad \square$$

$$R P'_a = P_a{}^{-1} R \quad \blacktriangleright \quad (ba)^{-1} = Rba = R P'_a b, \quad (ba)^{-1} = a^{-1} b^{-1} = P_a{}^{-1} b^{-1} = P_a{}^{-1} R b \quad \square$$

$$P_e = P'_e = P_e P'_e = E \quad \blacktriangleright \quad \forall a \in S, \quad P_e a = ea = a, \quad P'_e a = ae = a, \quad P_e P'_e a = eae = a \quad \square$$

$$(P_a)^{-1} = P_a{}^{-1} \quad \blacktriangleright \quad P_a{}^{-1} P_a = P_a{}^{-1} a = P_e = E, \quad P_a P_a{}^{-1} = P_{aa}{}^{-1} = P_e = E \quad \square$$

$$(P'_a)^{-1} = P'_a{}^{-1} \quad \blacktriangleright \quad P'_a{}^{-1} P'_a = P'_{aa}{}^{-1} = P'_e = E, \quad P'_a P'_a{}^{-1} = P'_a{}^{-1} a = P'_e = E \quad \square$$

# Теорема о группах операторов

Если множества  $\{a_j\}$  и  $\{b_j\}$  – группы с общим единичным элементом, то и множества операторов вида

$$\{P_{a_j} P_{b_j}\} \text{ и } \{P_{a_j} P_{a_j}^{-1}\} \cup \{R P_{a_j} P_{a_j}^{-1}\}$$

также являются группами

Тогда множество движений  $\{r\}$ , действующих на фигуру  $B$  в паре  $(A, rB)$ , характеризующих одно и тоже взаимное расположение фигур в этой паре

$$\{a_j r b_j\} = \{P_{a_j} P_{b_j}^{-1} r\}, \text{ либо}$$

$$\{a_j r a_j\} \cup \{(a_j r a_j)^{-1}\} = \{P_{a_j} P_{a_j}^{-1} r\} \cup \{R P_{a_j} P_{a_j}^{-1} r\}$$

является орбитой одной из этих групп



**Вопрос:** как изменится множество эквивалентных движений, если фигуру  $B$  оставить в покое в её начальном положении и рассматривать движения, действующие уже на фигуру  $A$ ?

**Ответ:** все движения заменятся обратными

**Теорема.** Пусть имеются фигуры  $A_0$  и  $B_0$  в их начальном положении. Каково бы ни было движение  $r$ , действующее на фигуру  $B_0$  и характеризующее взаимное расположение фигур в паре  $(A_0, rB_0)$ , движение  $r^{-1}$ , действующее на фигуру  $A_0$ , характеризует равное расположение фигур в паре  $(r^{-1}A_0, B_0)$ .

► Для доказательства подействуем на пару  $(A_0, rB_0)$  движением  $r^{-1}$ :  $r^{-1}(A_0, rB_0) = (r^{-1}A_0, r^{-1}rB_0) = (r^{-1}A_0, B_0)$  □

**Следствие.** Орбита эквивалентных движений, связанных группой  $M$ , умножится на оператор  $R$ . При этом группа  $M$  изменится с  $\{Pa_i P b_j\}$  на  $\{P \acute{a}_i P b_j\}$ , если фигуры  $A_0$  и  $B_0$  различны, или не изменится (ни группа  $M$ , ни орбита  $Mr$ ) при тождественном равенстве фигур  $A_0 \equiv B_0$  в их начальном положении.

**Замечание.** Очевидно, группы  $\{Pa_i P b_j\}$  и  $\{P \acute{a}_i P b_j\}$  изоморфны, поскольку они сопряжены с помощью оператора  $R=R^{-1}$ :

$$\forall Pa_i P b_j \in \{Pa_i P b_j\}, R Pa_i P b_j R^{-1} = R Pa_i P b_j R = R^2 P \acute{a}_i^{-1} P b_j^{-1} = P \acute{a}_i^{-1} P b_j^{-1} \in \{P \acute{a}_i P b_j\}.$$

**Вопрос:** как изменится орбита  $Mr$  при выборе новых начальных положений фигур  $A'_0 = \alpha A_0$  и  $B'_0 = \beta B_0$  вместо  $A_0$  и  $B_0$ ?

**Ответ:** все элементы орбиты (как и всю орбиту целиком) следует преобразовать оператором вида  $P_\alpha P_\beta^{-1}$ .

**Теорема.** При замене фигур  $A_0$  и  $B_0$  в их начальном положении на  $A'_0 = \alpha A_0$  и  $B'_0 = \beta B_0$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – движения пространства  $\mathbf{X}^d$ , на орбиту  $Mr$  действует оператор  $P_\alpha P_\beta^{-1}$ .

**Замечание.** Показав способ пересчёта движений орбиты  $Mr$  при выборе новых начальных положений фигур, доказанная теорема делает менее важным первоначальный выбор начальных положений фигур  $A_0$  и  $B_0$ .

**Рекомендация:** Если нужно рассмотреть разные орбиты для заданной группы на трёхмерной сфере, необязательно перечислять разные исходные точки орбиты. Можно ограничиться одной и той же точкой 1. Но рассматривать перемножаемые группы в разных ориентациях относительно координатной системы в  $\mathbb{R}^3$

*Симметрия пары фигур*  $Symm(A, B)$  – это множество всех движений  $\{\gamma_i\}$  пространства  $X^d$ , совмещающих пару  $(A, B)$  с собой:

$$\gamma_i : (A, B) \rightarrow (A, B)$$

**Теорема.** Пусть имеется пара фигур  $(A, B) \in X^d$ . Если фигуры  $A$  и  $B$  различны, т.е. не существует совмещающего их движения  $\nexists \gamma: A \rightarrow B$ , то  $Symm(A, B) = Symm(A) \cap Symm(B)$ .

**Теорема.** Пусть имеется пара фигур  $(A, B) \in X^d$ , причём фигуры  $A$  и  $B$  равны, т.е. существует хотя бы одно совмещающее их движение  $\exists r: A \rightarrow B$ .

Если найдется движение  $r$ , отвечающее двум условиям:

(1) Движение  $r$  не принадлежит к  $G$ :  $r \notin G = Symm(A) \cap Symm(B)$ .

(2) Движение  $r$ , повторенное дважды, принадлежит группе  $G$ :  $r^2 \in G$ ,

то множество симметрий пары  $(A, B)$  образует группу

$$Symm(A, B) = G \cup rG,$$

в противном случае – группу  $Symm(A, B) = G$ .

Стабильные подгруппы<sup>[1]</sup> группы  $M$  и симметрия пары  $Symm(A, B)$

**Теорема.** Пусть имеются фигуры  $A_0$  и  $B_0$ , заданные в их начальном положении. Пусть имеется движение  $r$ , характеризующее положение фигуры  $B=rB_0$  относительно фигуры  $A=A_0$  в паре  $(A,B)=(A_0, rB_0)$ . Группа стабилизатора  $Mr$  для элемента  $r$  орбиты  $Mr$  (а следовательно и любого другого элемента) изоморфна группе симметрии пары  $Symm(A_0, rB_0)$ .

[1] Подгруппа  $Mr \subset M$ , сохраняющая точку  $r$  орбиты  $Mr$ :  $Mr = \{mi \in M: mir = r\}$ ; синонимы – стабилизатор, стационарная группа, симметрия позиции правильной системы точек; англ. син. – stability subgroup, stable subgroup, stabilizer, isotropy group, site symmetry; в случае невозможности представления орбиты  $Mr$  в виде геометрической правильной системы точек, имеет только теоретико-групповой смысл.

**Вывод:** если нужно рассмотреть трёхмерные сферические многообразия без особенностей, то нужно взять трёхмерные сферические группы без неподвижных точек, а они получаются перемножением двух трёхмерных точечных групп, не имеющих общих элементов, (кроме тождественного)

# Interfaces in Crystalline Materials

---

A. P. SUTTON

University Lecturer, Department of Materials, University of Oxford  
and Fellow of Lincoln College, Oxford

and

R. W. BALLUFFI

Professor, Department of Materials Science and Engineering,  
Massachusetts Institute of Technology

CLARENDON PRESS · OXFORD

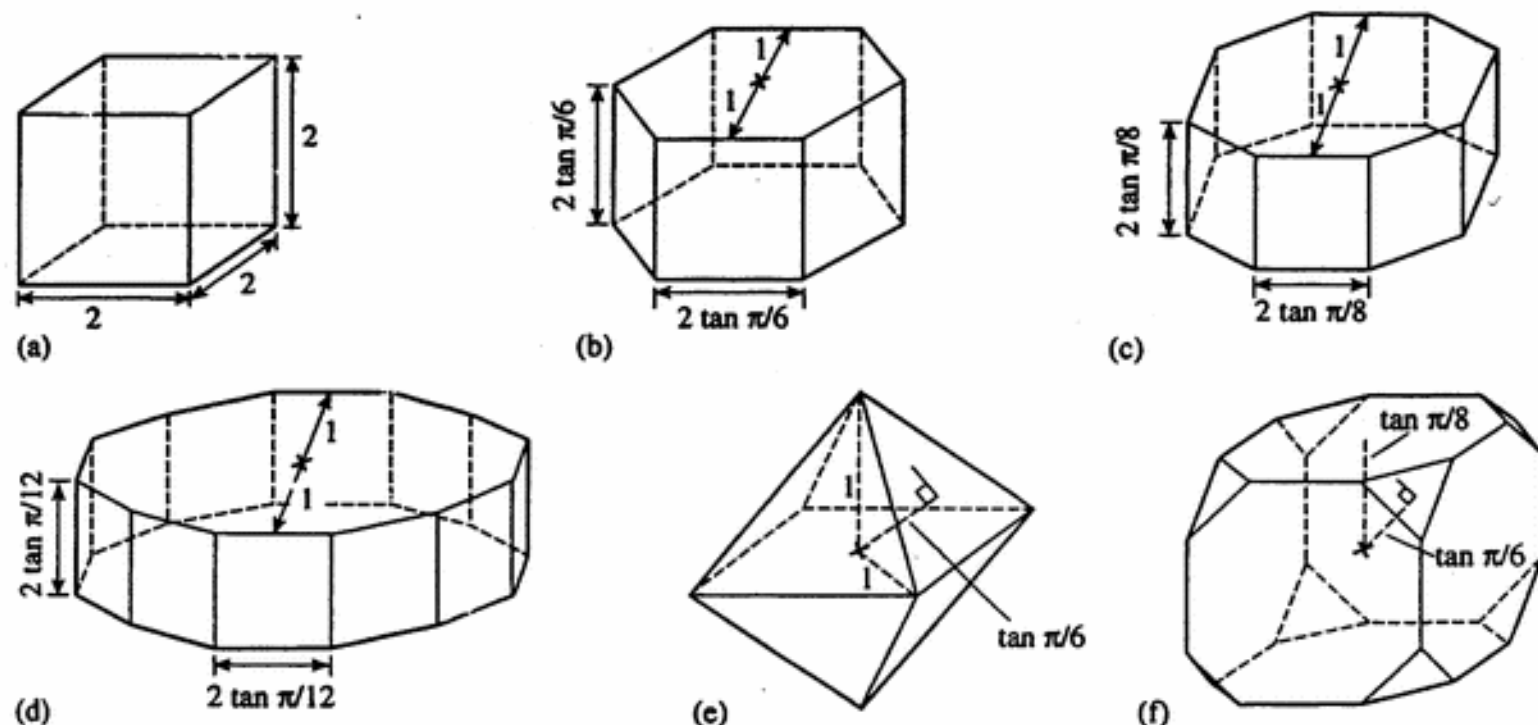


Fig. 1.5 The fundamental zones of the forms of closed polyhedra: (a) cube for the point groups  $222$ ,  $2mm$ ,  $mmm$  of the orthorhombic system; (b) hexagonal prism for  $32$ ,  $\bar{3}m$ ,  $3m$  of the trigonal system; (c) octagonal prism for  $422$ ,  $4/m\bar{3}m$ ,  $4mm$ , and  $\bar{4}2m$  of the tetragonal system; (d) dodecahedral prism for  $622$ ,  $6/m\bar{3}m$ ,  $6mm$ , and  $\bar{6}m2$  of the hexagonal system; (e) octahedron for  $23$  and  $m\bar{3}$  of the cubic system; (f) semiregular truncated cube for  $432$ ,  $m\bar{3}m$ , and  $\bar{4}3m$  of the cubic system.

lies on the face  $x = -1$ .  $\rho_A^R$  is equivalent to a point on the  $x = 1$  face which is equal to  $(\rho_A^R, [1, 0, 0] \tan \omega/2)$  where we shall take the limit  $\omega \rightarrow \pi$ . Using eqn (1.15) we find

$$(\rho_A^R, [1, 0, 0] \tan \omega/2) = \frac{[-1, y, z] + [1, 0, 0] \tan \omega/2 - [0, z, -y] \tan \omega/2}{1 + \tan \omega/2}$$



УДК 515.162+514.13+514.17

М. М. ПОСТНИКОВ  
ТРЕХМЕРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Сферической формой размерности  $n \geq 2$  называется фактор-многообразие  $S^n/\Gamma$  сферы  $S^n$  по необходимо конечной подгруппе  $\Gamma$  группы  $O(n+1)$ , действующей на  $S^n$  без неподвижных точек (т.е. такой, что все характеристические корни каждого элемента  $A \neq E$  из  $\Gamma$  отличны от 1). При  $\Gamma = \{E\}$  это сама сфера  $S^n$ , а при  $\Gamma = \{\pm E\}$  проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$ . Легко видеть, что при  $n$  четном никаких других сферических форм нет, а при  $n$  нечетном группа  $\Gamma$  состоит только из вращений (является подгруппой группы  $SO(n+1)$ ).

Полное описание с точностью до сопряженности всех групп  $\Gamma$  и, значит, с точностью до изометричности всех сферических форм  $S^n/\Gamma$  было получено в 1972 г. Вольфом (см. [1]). Геометрически наиболее интересный случай  $n=3$  был в 1930 г. исследован Зейфертом и Трельфаллем [2, 3] (и значительно ранее, но лишь в теоретико-групповом отношении в полузабытой работе юного Гурса [4]). В 1961 г. результаты Зейферта и Трельфалля были переформулированы Хаттори с помощью кватернионов (см. [5]). С тех пор эти результаты неоднократно излагались в литературе (см., например, [6]). Тем не менее ряд элементарных вопросов о

# Кватернионы и повороты

- Поворот в трёхмерного пространства  $X' = QXQ^{-1}$  (Cayley, 1845)
- Движение в общего вида в  $S^3$ :  $X' = Q_1 X Q_2^{-1}$  (Cayley, 1854)
- Вывод дискретных групп, действующих на трёхмерной сфере (Gourgsat, 1889)

## Трёхмерные сферические группы без неподвижных точек (по теореме Зейферта-Трельфала, 1930-1932)

1.  $C_n \times C_m$

2.  $D_n^* \times C_m$

3.  $T^* \times C_m$

4.  $O^* \times C_m$

5.  $I^* \times C_m$

## Геометрия ячеек Дирихле-Вороного описана у Постникова:

$C_n \times C_m$  линзы

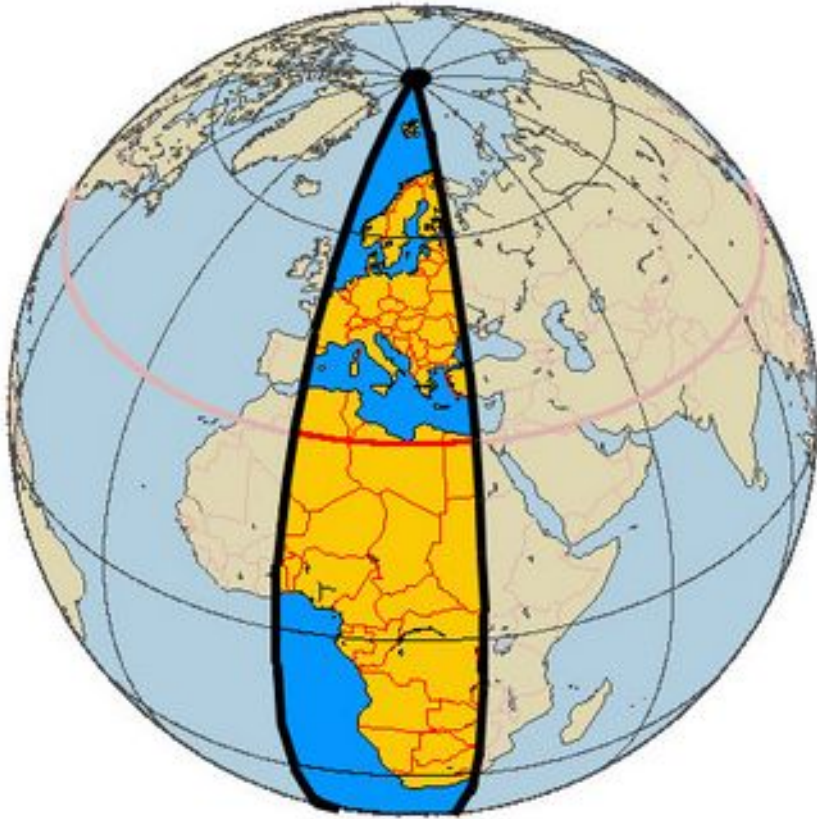
$D_n^* \times C_m$  призмы

$T^* \times C_1$  октаэдры

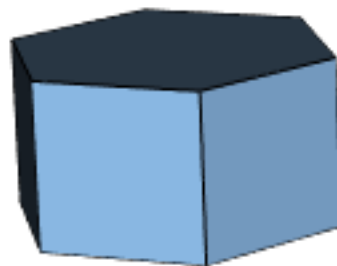
$O^* \times C_1$  ус.кубы

$I^* \times C_1$  додекаэдры

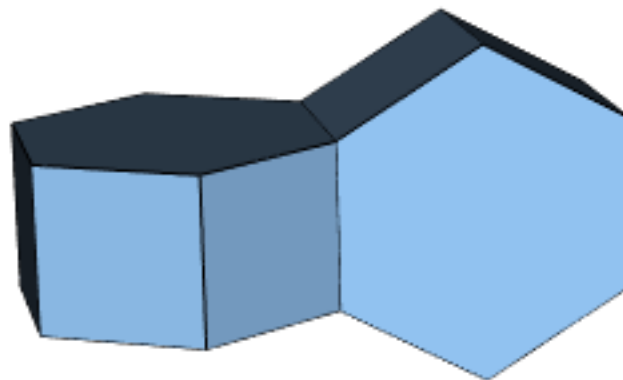
О линзах...



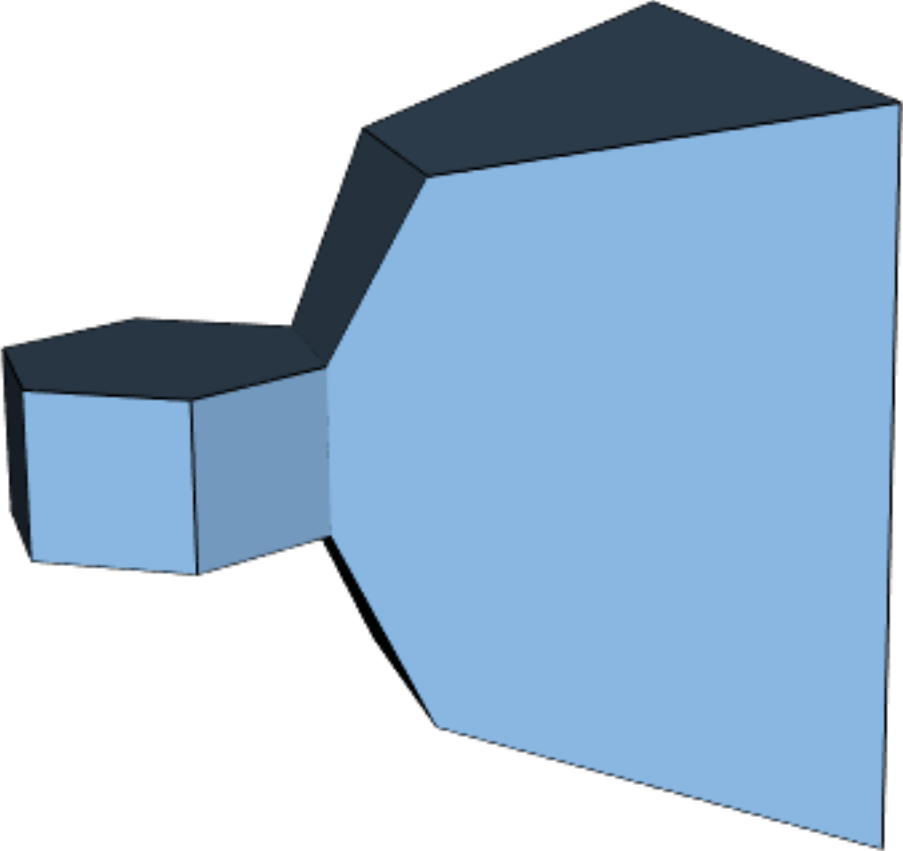
# Изоэдральное разбиение сферы $S^3$ на шестиугольные призмы



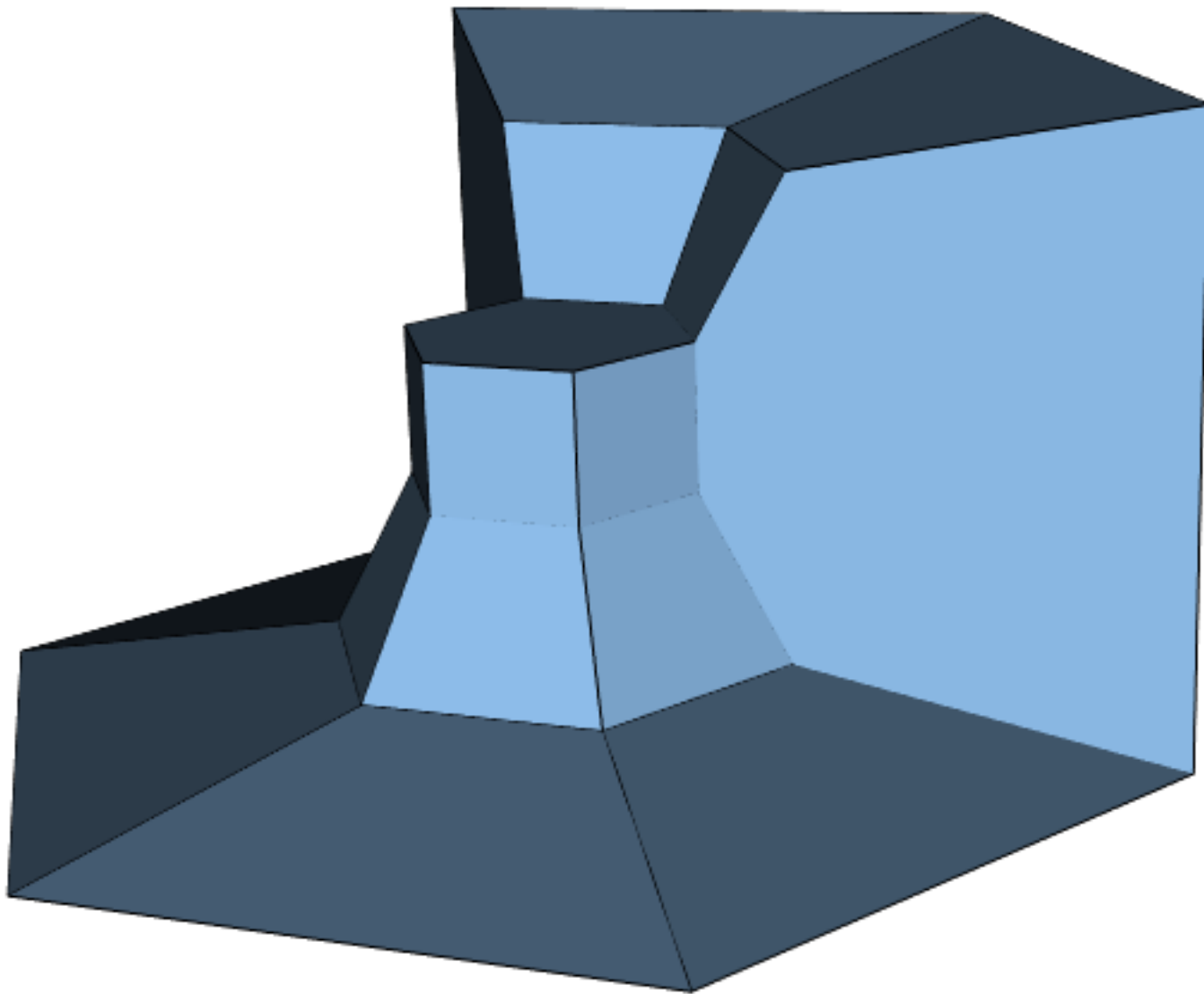
# Изоэдральное разбиение сферы $S^3$ на шестиугольные призмы



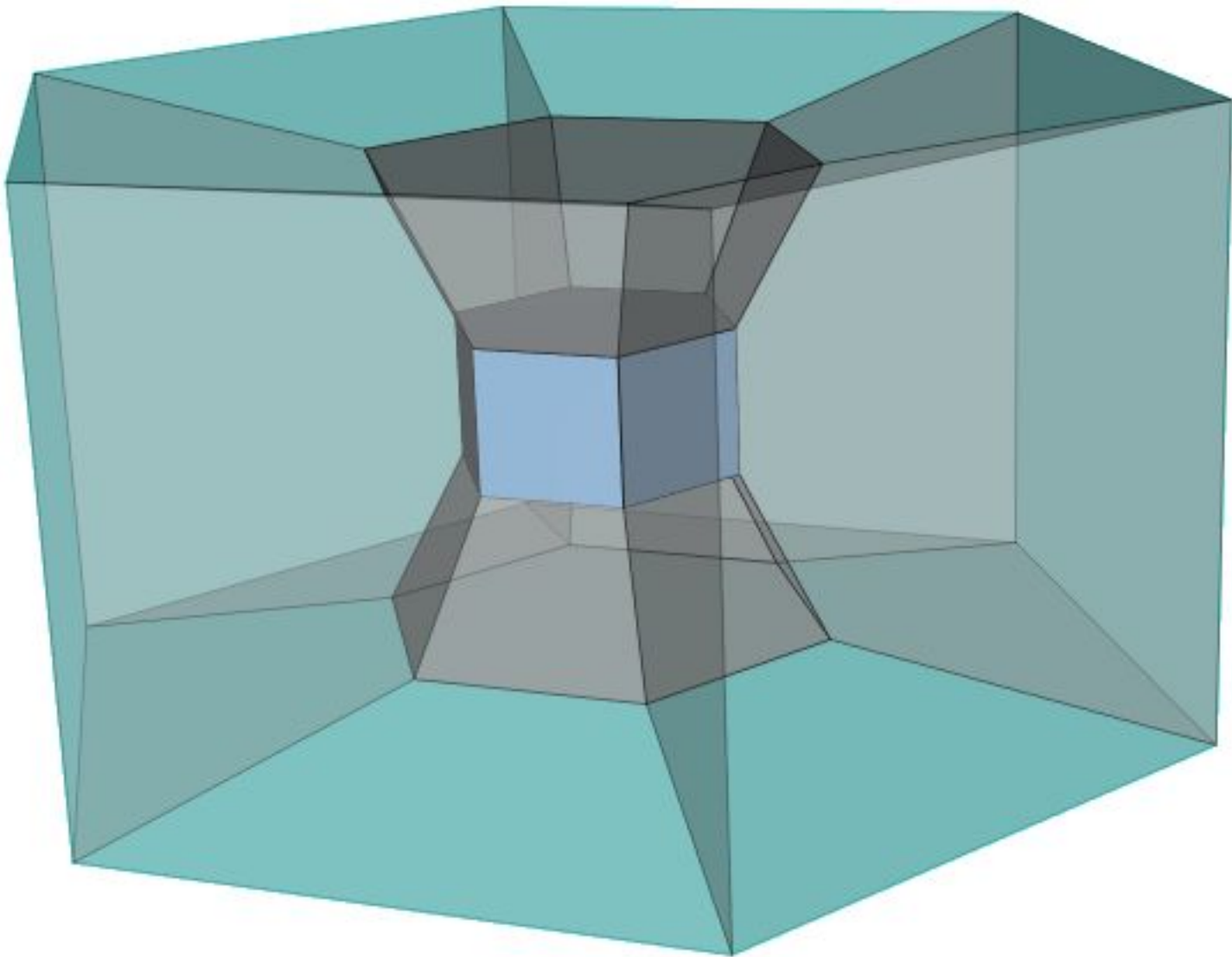
**Изоэдральное разбиение сферы  $S^3$  на шестиугольные призмы**



Изоэдральное разбиение сферы  $S^3$  на шестиугольные призмы

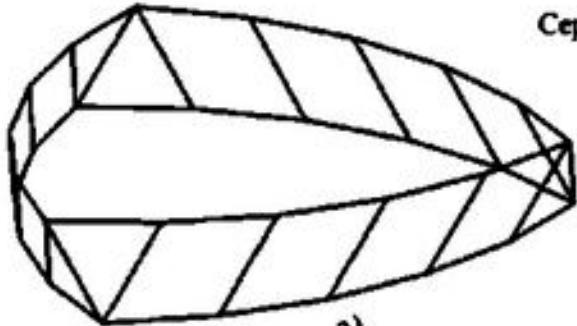


**Изоэдральное разбиение сферы  $S^3$  на шестиугольные призмы**

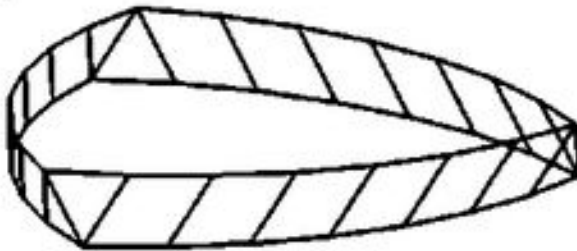
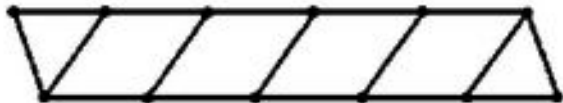




Серия 1



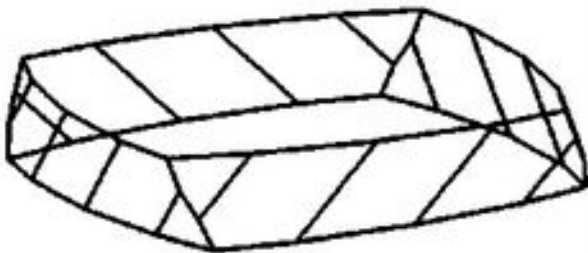
a)



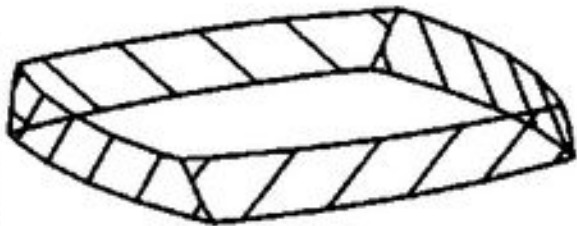
б)



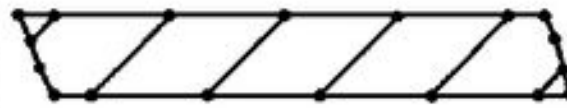
$$1) T^* \times C_m^*$$



Серия 2a)



Серия 2б)



$$2a) O^* \times C_m^*$$

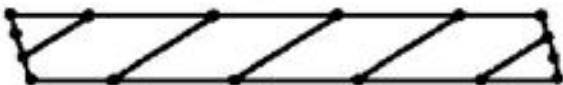
$$m=6k-1, k=1, 2, 3, \dots$$

$$2b) O^* \times C_m^*$$

$$m=6k+1, k=1, 2, 3, \dots$$



Серия 3a)



Серия 3б)



$$3a) I^* \times C_m^*$$

$$m=6k+1, k=1, 2, 3, \cancel{4}, 5, \dots$$

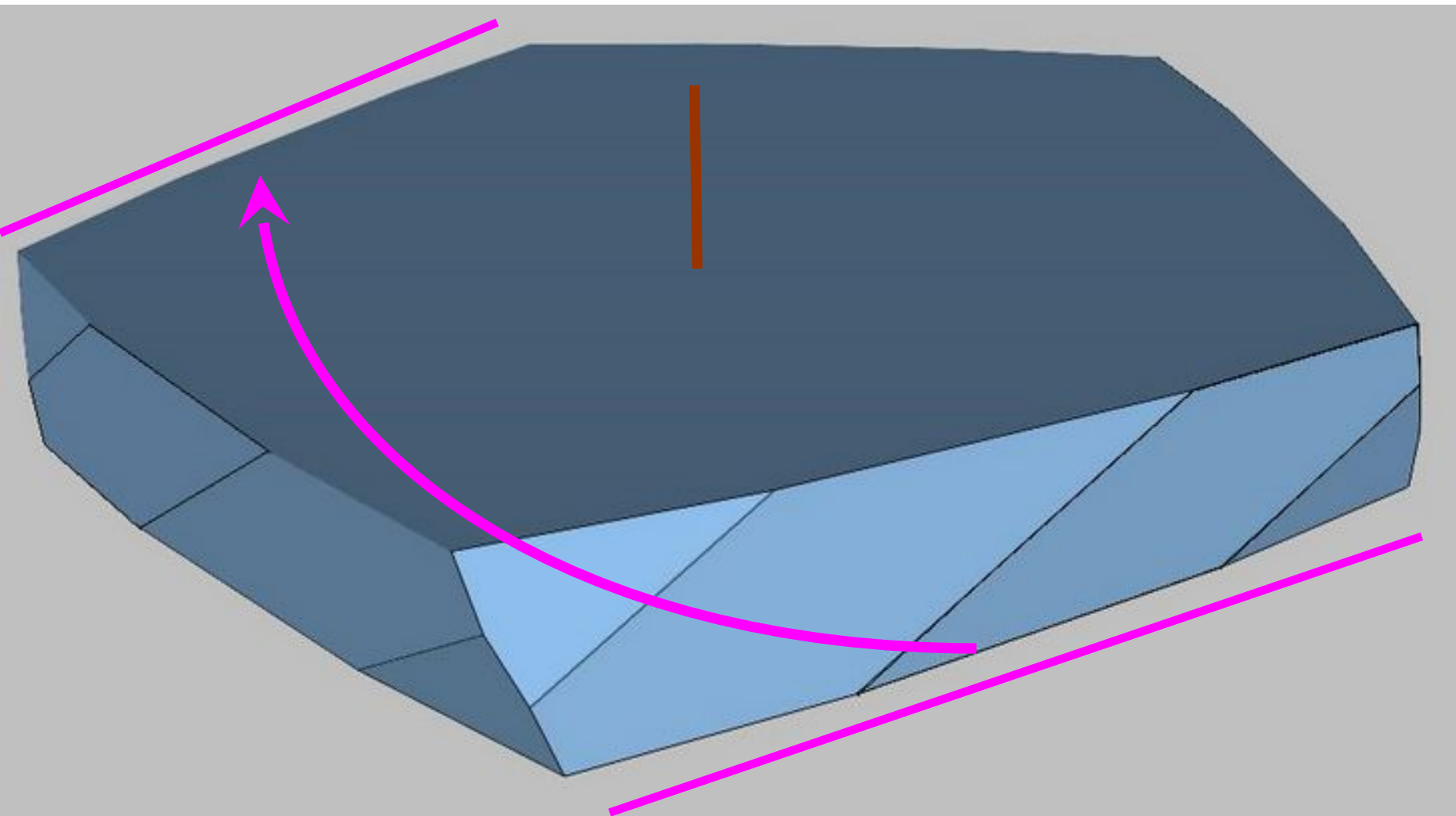
$$3b) I^* \times C_m^*$$

$$m=6k-1, k=\cancel{1}, 2, 3, 4, 5, \dots$$

| Группа  | $T^* \times C_m^*$ | $O^* \times C_m^*$ | $O^* \times C_m^*$ | $I^* \times C_m^*$ | $I^* \times C_m^*$ |
|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Серия   | 1                  | 2a                 | 2b                 | 3a                 | 3b                 |
| $m \in$ | $2i+3$             | $6i-1$             | $6i+1$             | $6i+1$             | $6i-1$             |
| n       | $3m$               | $8(m+1)/3$         | $8(m+2)/3$         | $5(m+2)/3$         | $5(m+4)/3$         |
| B       | $6m$               | $(16m+40)/3$       | $(16m+56)/3$       | $(10m+50)/3$       | $(10m+70)/3$       |
| P       | $9m+3$             | $8m+20$            | $8m+28$            | $5m+25$            | $5m+35$            |
| Г       | $3m+5$             | $(8m+26)/3$        | $(8m+34)/3$        | $(5m+31)/3$        | $(5m+35)/3$        |
| p       | $3m-3$             | $(8m-28)/3$        | $(8m-20)/3$        | $(5m-35)/3$        | $(5m-25)/3$        |

Пять серий комбинаторных типов стереоэдров Дирихле точки  $I$  в группах  $T^* \times C_m^*$ ,  $O^* \times C_m^*$  и  $I^* \times C_m^*$ , не имеющих неподвижных точек.  $i$  – натуральное число;  $m$  – порядок оси в 3-мерной точечной группе евклидовой  $C_m$ , ориентированной вдоль одной из максимальных осей группы  $T$ ,  $O$  или  $I$  – группы поворотов тетраэдра, куба или икосаэдра,  $m$  выбирается так, чтобы  $C_m$  не имела одинаковых поворотов с  $T$ ,  $O$  или  $I$  для каждой из серий (для серии 1 игнорируются  $m$ , кратные 3, для  $3a$  и  $3b$  – кратные 5);  $n$  – число вершин основания стереоэдра;  $B$ ,  $P$  и  $\Gamma$  – числа вершин, рёбер и граней стереоэдра;  $p$  – число боковых 4-угольных граней, похожих на ромбы – растёт до  $\infty$ , число других постоянно.

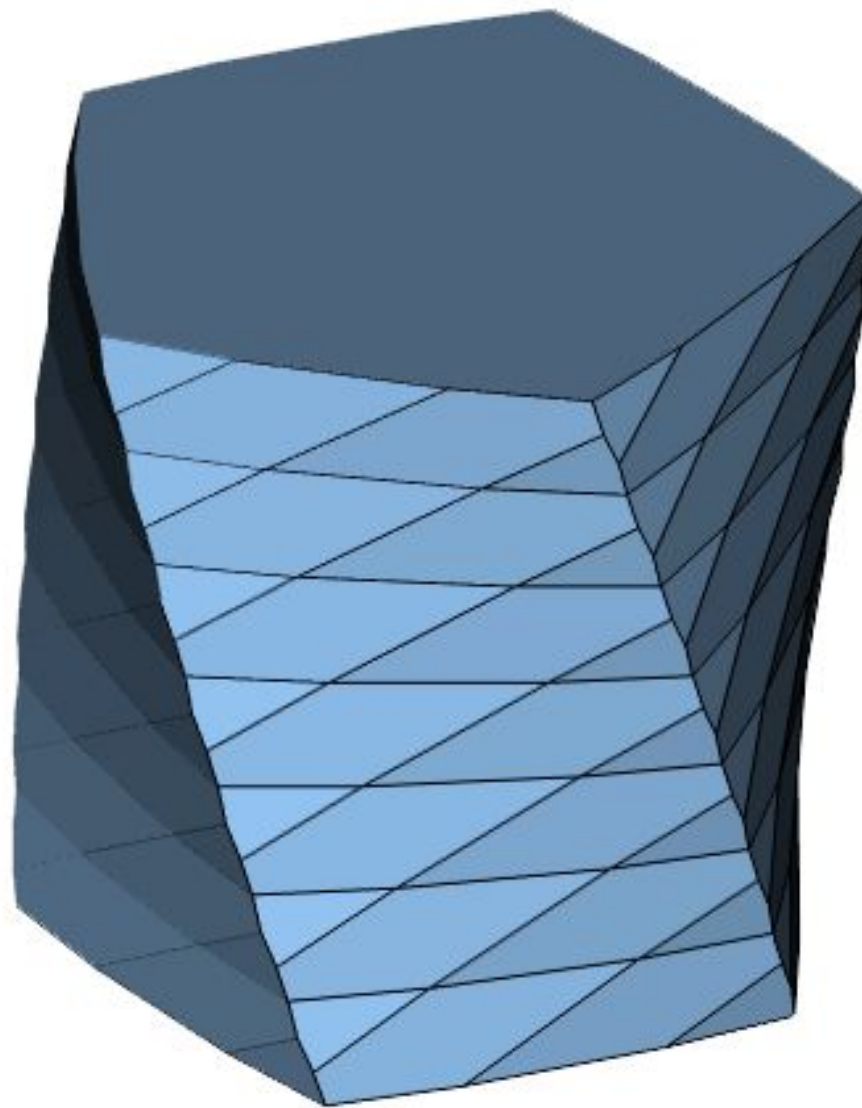
$I^* \times C_7^*$ ,  $7 \parallel [01\tau]$     840 «призм»



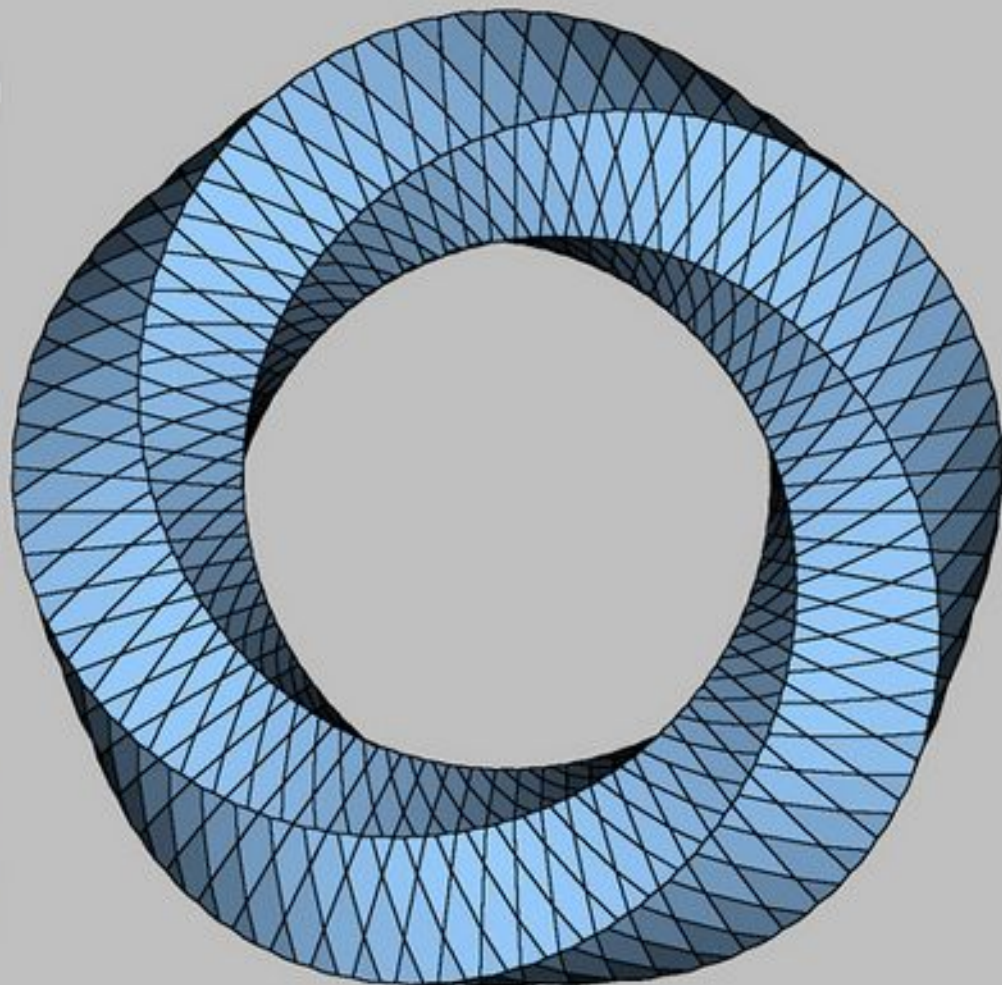
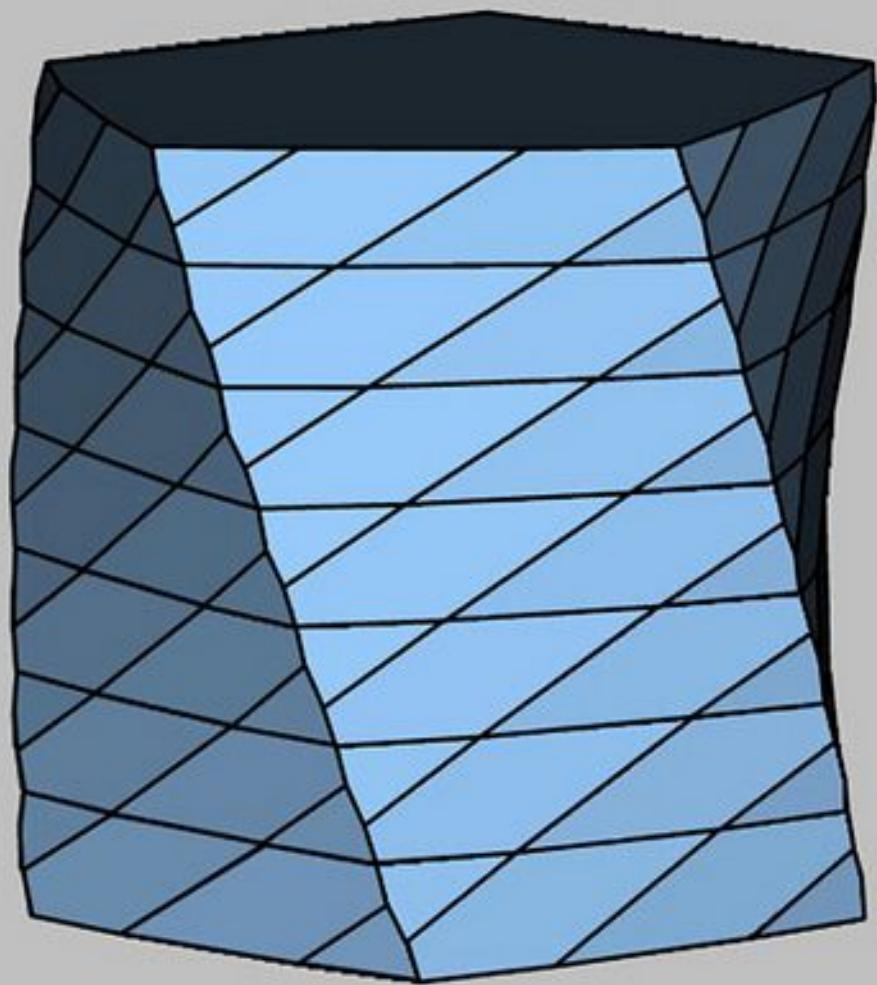
$$\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) \cdot 3 - \left(\frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}\right) \cdot 4 = \left(\frac{\pi}{35}, \frac{41\pi}{35}\right) = \left(\frac{\pi}{35}, \frac{41\pi - 70\pi}{35}\right) = \left(\frac{\pi}{35}, -\frac{29\pi}{35}\right) \sim -70/29$$

(5.14°, -149.14 °)

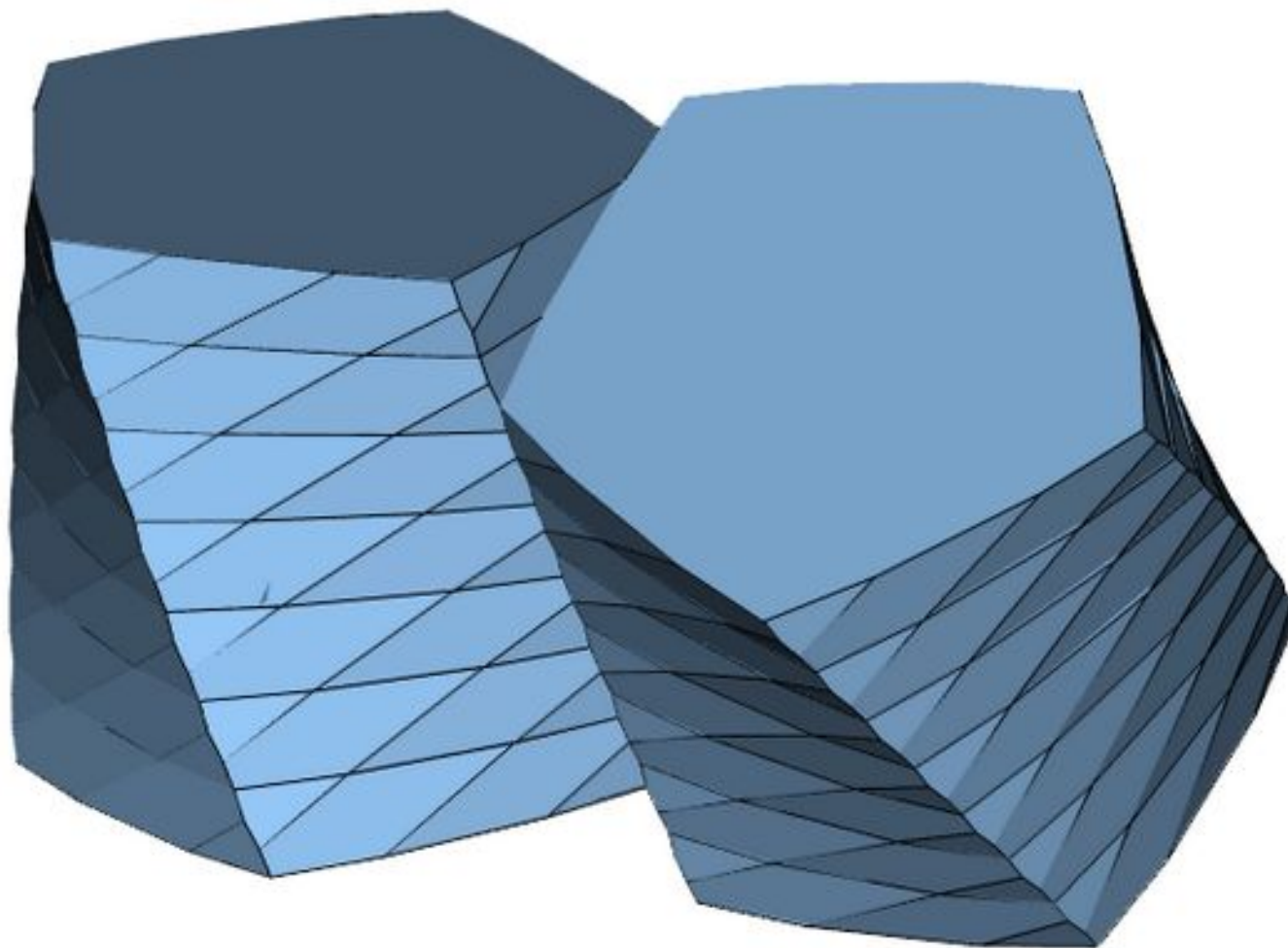
$I^* \times C_7^*$  фрагмент разбиения 3-сферы на 840 скошенных «призм»



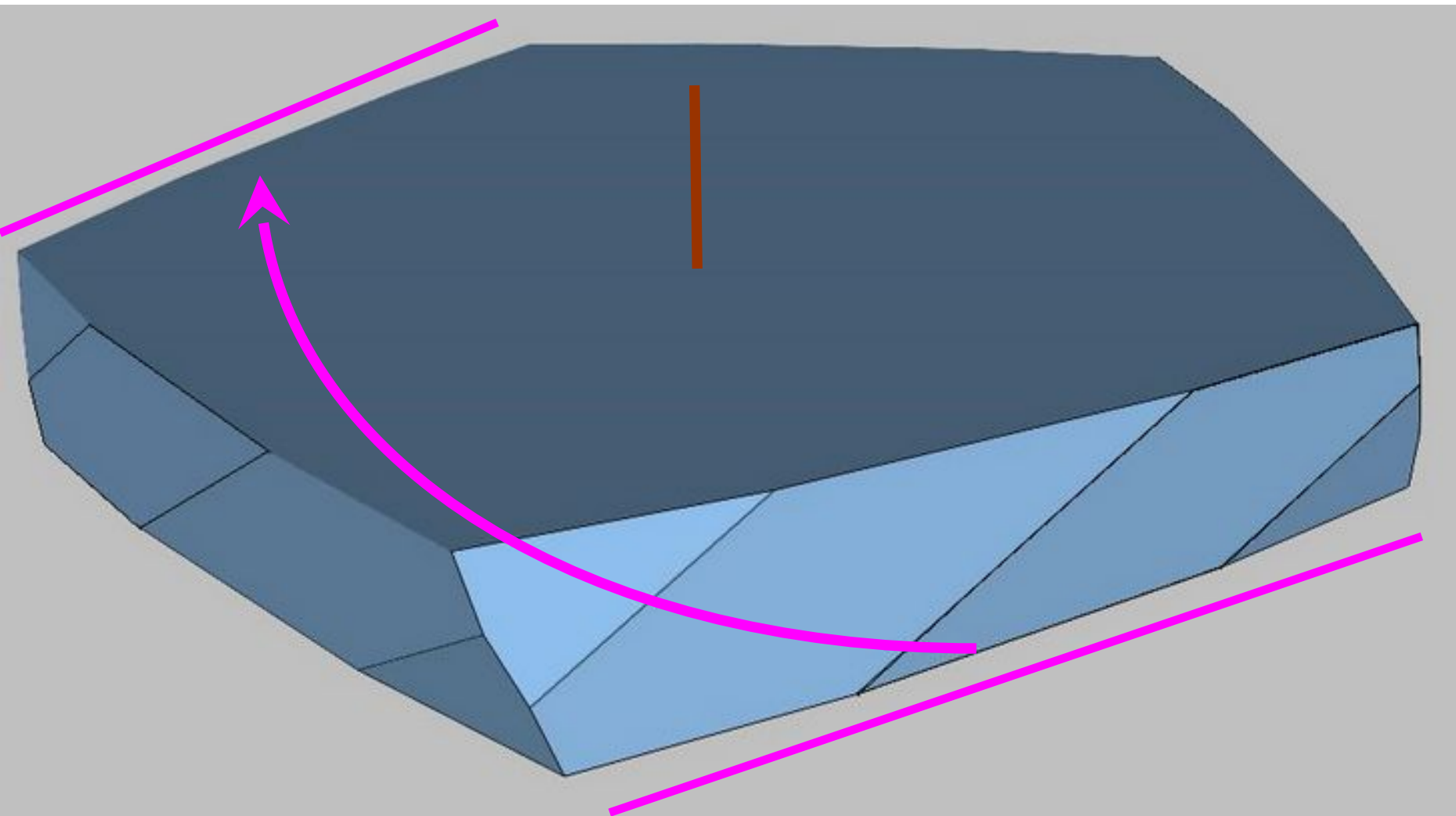
$I^* \times C_7^*$  фрагменты разбиения 3-сферы на 840 скошенных «призм»



$I^* \times C_7^*$  фрагмент разбиения 3-сферы на 840 скошенных «призм»



$I^* \times C_7^*$ ,  $7 \parallel [01\tau]$     840 «призм»

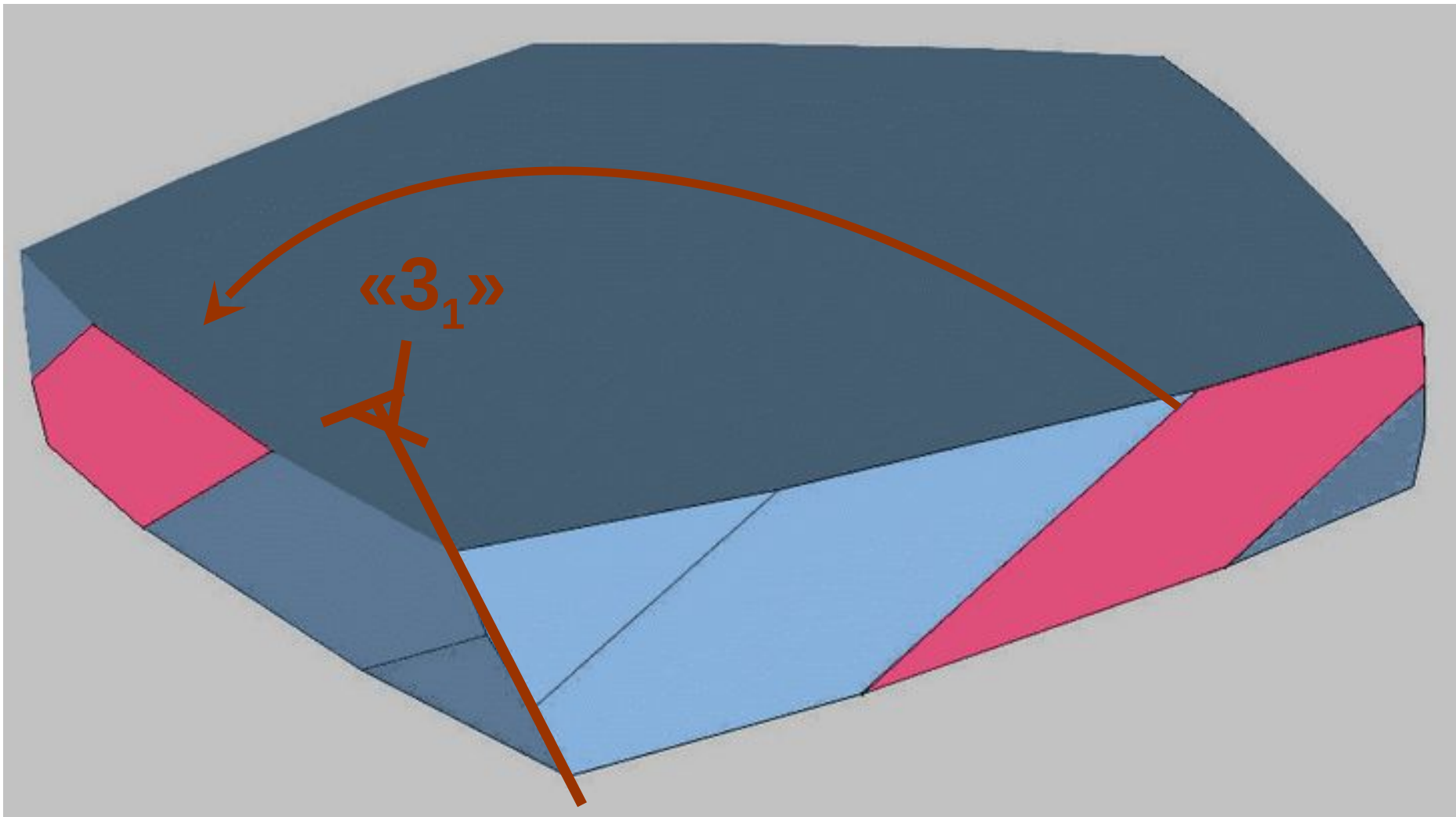


$$\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) \cdot 3 - \left(\frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}\right) \cdot 4 = \left(\frac{\pi}{35}, \frac{41\pi}{35}\right) = \left(\frac{\pi}{35}, \frac{41\pi - 70\pi}{35}\right) = \left(\frac{\pi}{35}, -\frac{29\pi}{35}\right) \sim -70/29$$

(5.14°, -149.14 °)

$I^* \times C_7^*$ ,  $7 \parallel [01\tau]$

840 «призм»

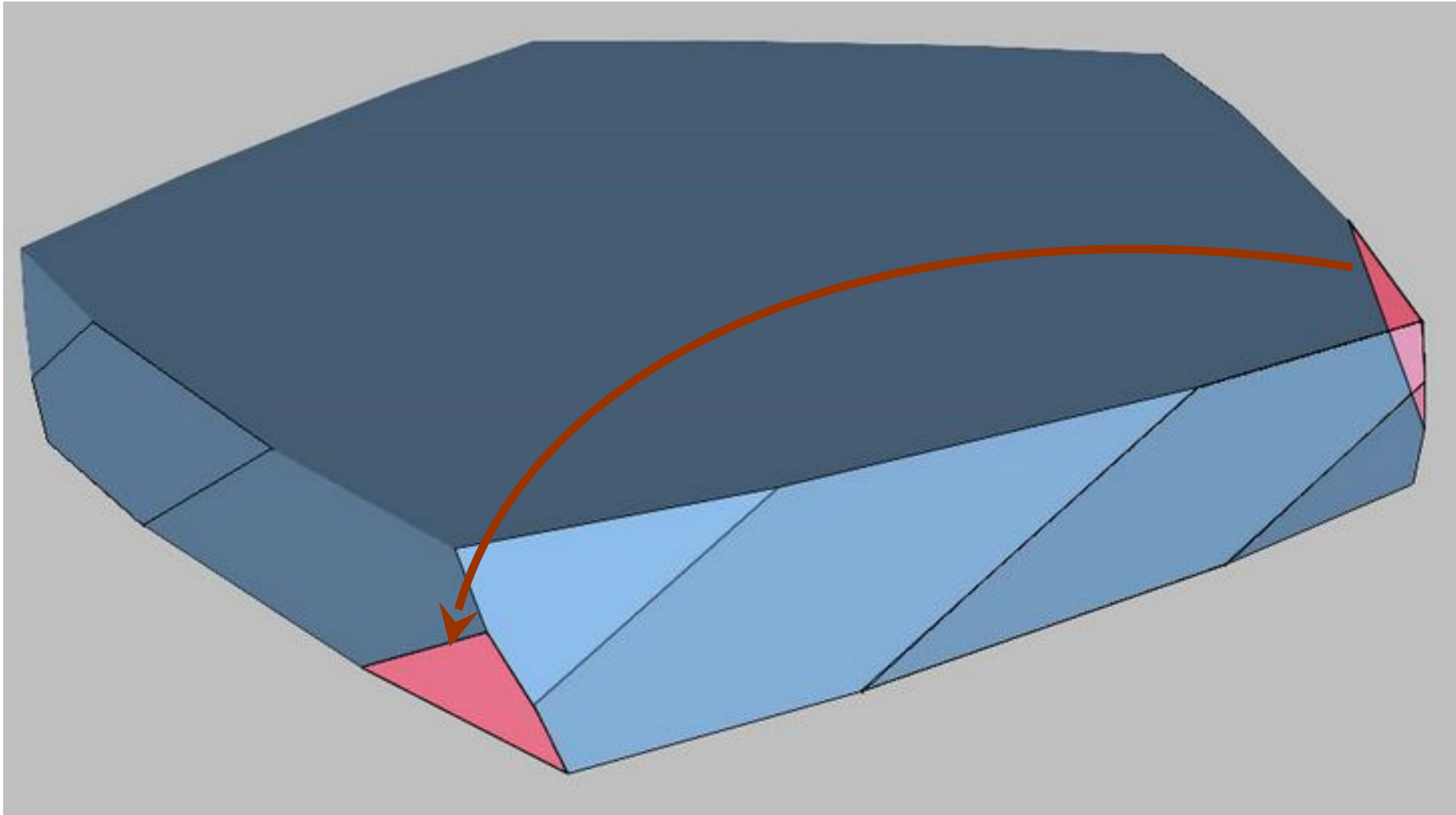


$$\llcorner 3_1 \llcorner = \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) - \left( \frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7} \right) \cdot 2 = \left( \frac{\pi}{21}, \frac{13\pi}{21} \right) \sim 42/13$$

(8.57°, 111.42 °)

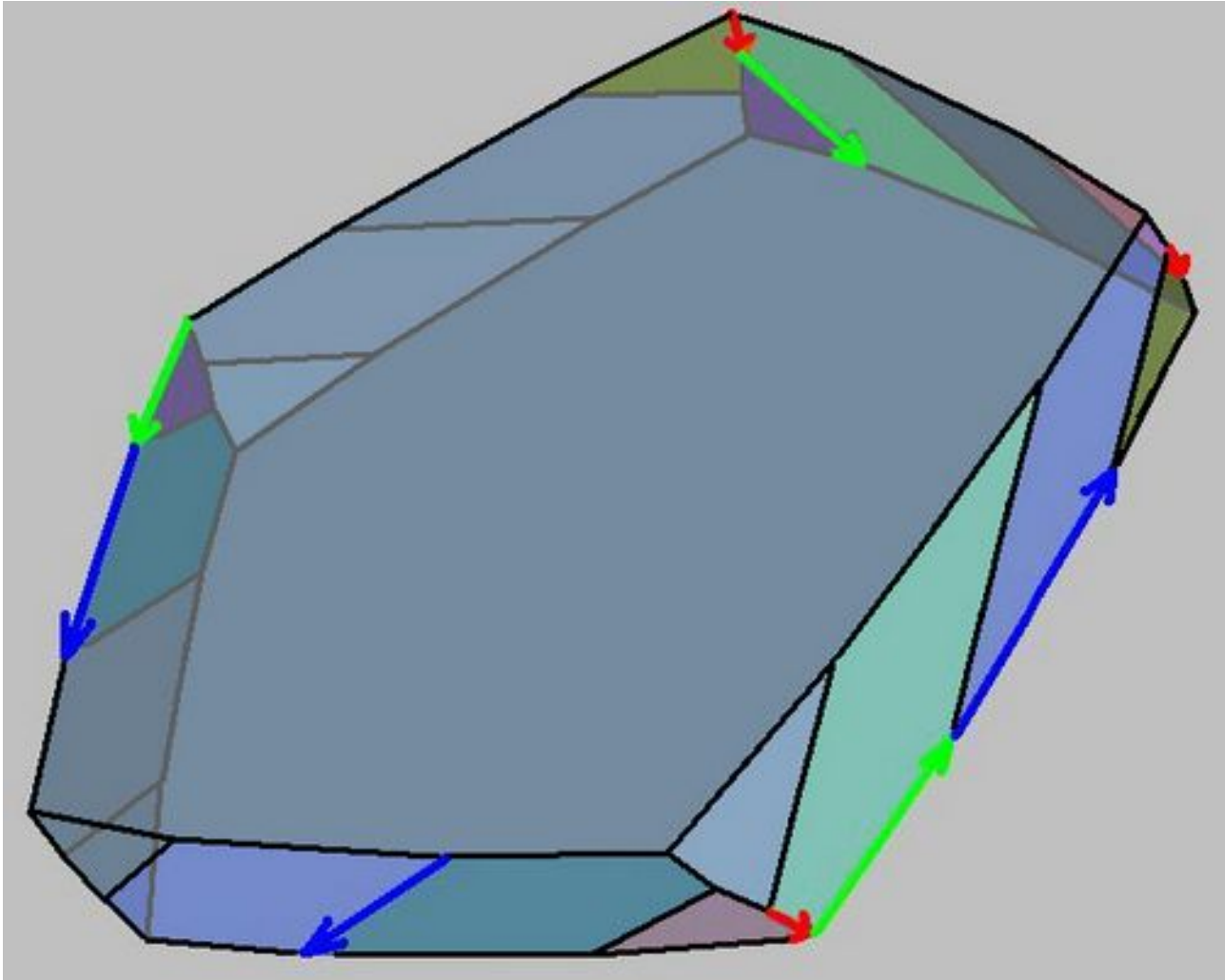


$I^* \times C_7^*$ ,  $7 \parallel [01\tau]$  840 «призм»

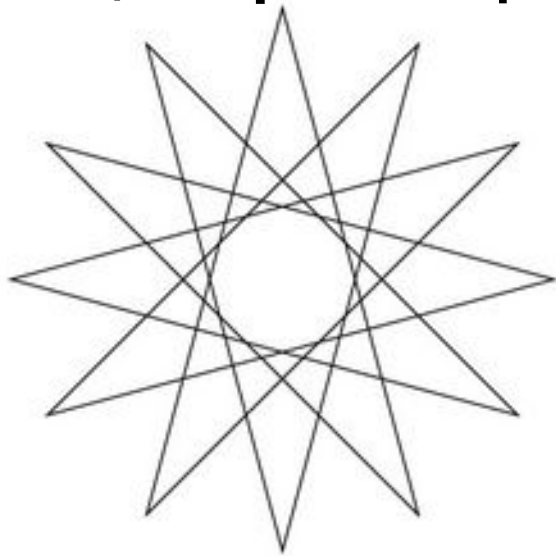


$$\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) - \left(\frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}\right) = \left(\frac{2\pi}{35}, \frac{12\pi}{35}\right) = \left(\frac{\pi}{35}, \frac{41\pi}{35}\right)^2 = (-70/29)^2$$

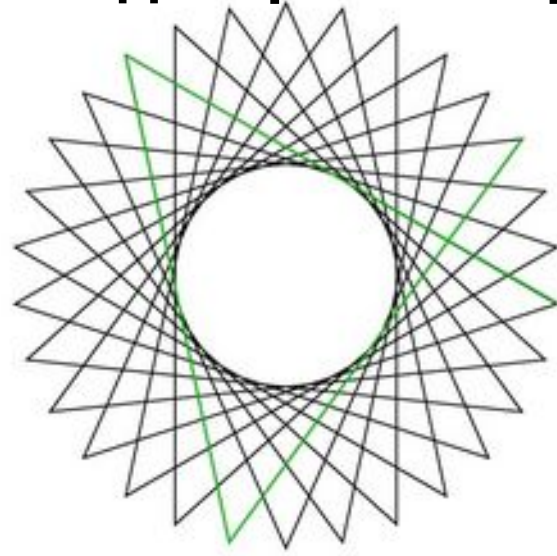
$$I^* \times C_7^*$$



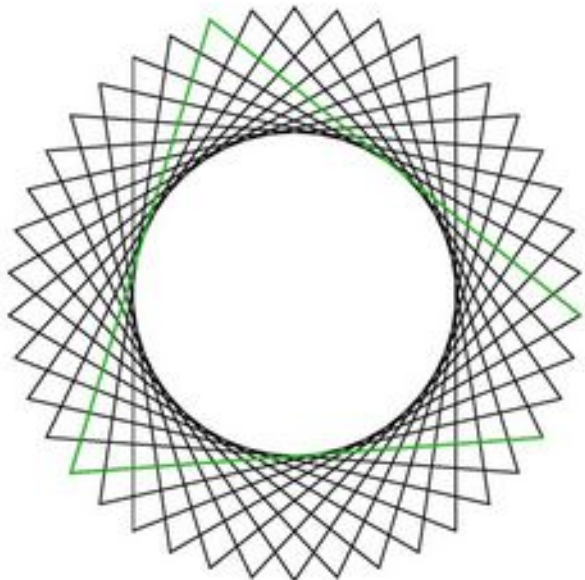
# Винтовые оси, встречающиеся в дискретных группах на $S^3$



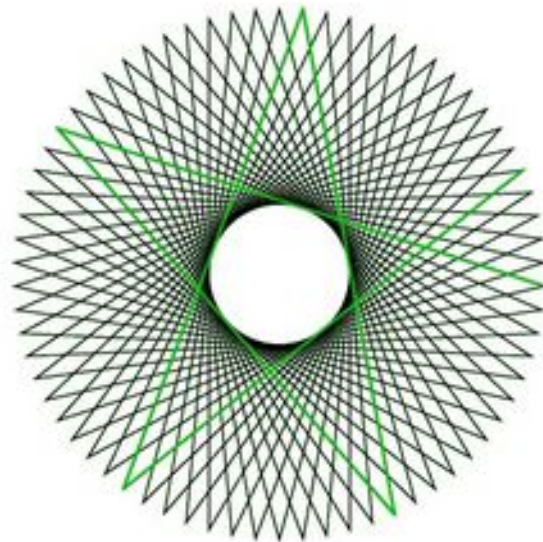
12/5



30/11



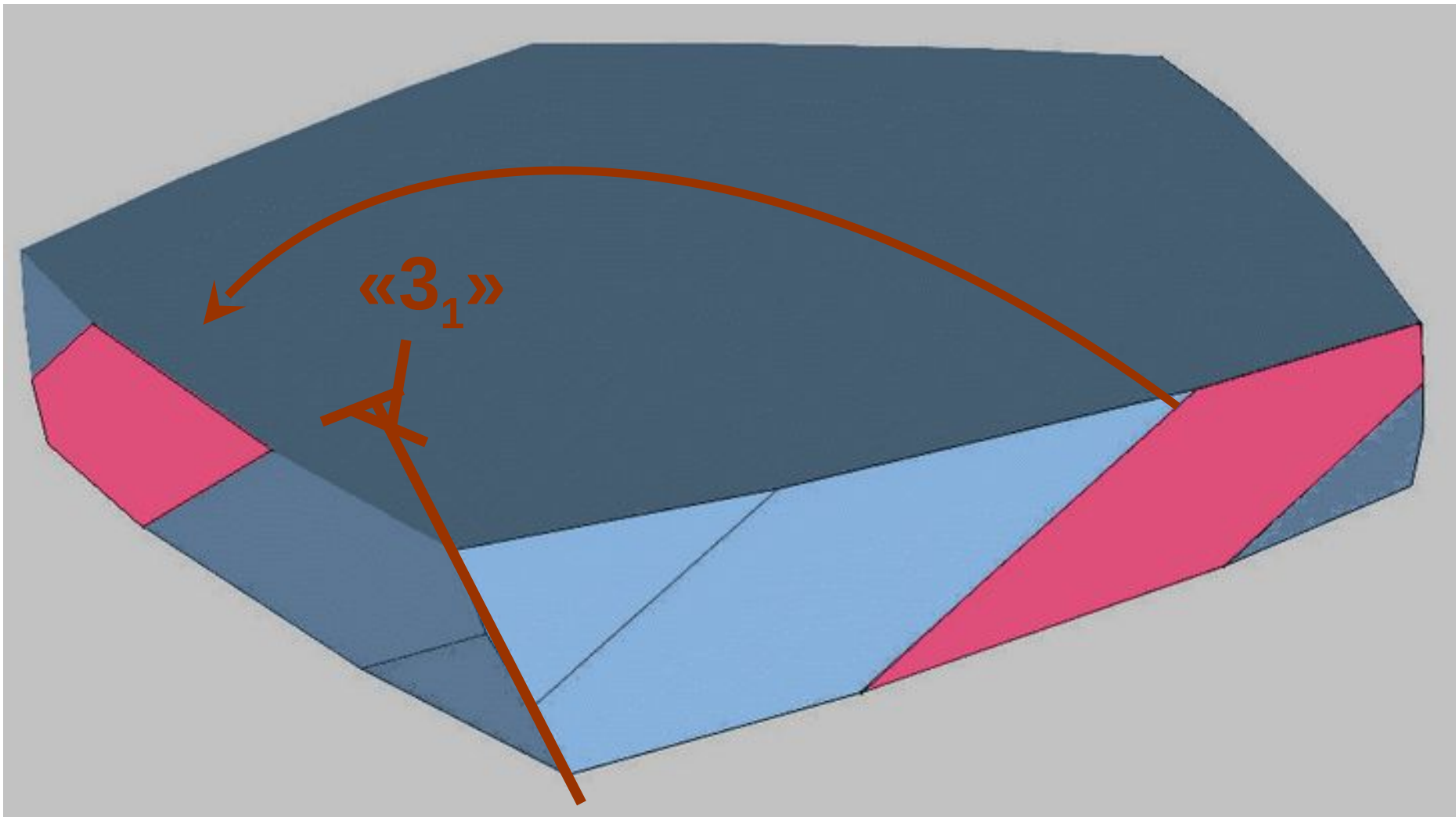
42/13



70/29

$I^* \times C_7^*$ ,  $7 \parallel [01\tau]$

840 «призм»

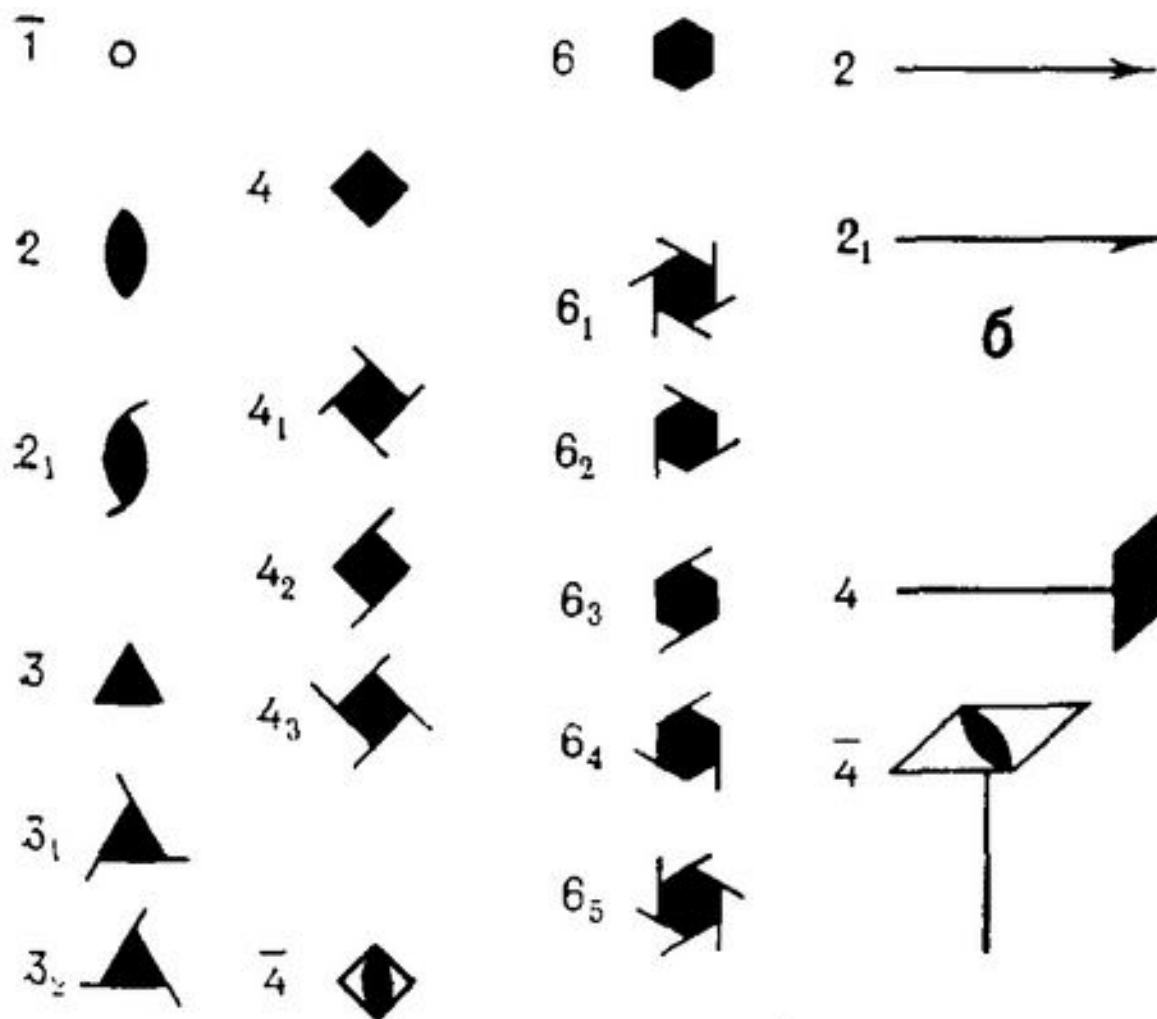


$$\langle\langle 3_1 \rangle\rangle = \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) - \left( \frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7} \right) \cdot 2 = \left( \frac{\pi}{21}, \frac{13\pi}{21} \right) \sim 42/13$$

(8.57°, 111.42 °)



# Винтовые оси, встречающиеся в пространственных (фёдоровских) группах симметрии



## 8.1.5. Crystallographic symmetry operations<sup>1</sup>

We consider a crystal pattern with its vector lattice  $\mathbf{L}$  referred to a primitive basis. Then, by definition, each vector of  $\mathbf{L}$  has integral coefficients. The linear part of a symmetry operation maps  $\mathbf{L}$  onto itself:  $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{W} \mathbf{L} = \mathbf{L}$ . Since the coefficients of all vectors of  $\mathbf{L}$  are integers, the matrix  $\mathbf{W}$  is an integral matrix, i.e. its coefficients are integers. Thus, the trace of  $\mathbf{W}$ ,  $\text{tr}(\mathbf{W}) = W_{11} + \dots + W_{nn}$ , is also an integer. In  $\mathbf{V}^3$ , by reference to an appropriate orthonormal (not necessarily crystallographic) basis, one obtains another condition for the trace,  $\text{tr}(\mathbf{W}) = \pm(1 + 2 \cos \varphi)$ , where  $\varphi$  is the angle of rotation or rotoinversion. From these two conditions, it follows that  $\varphi$  can only be 0, 60, 90, 120, 180 etc., and hence the familiar restriction to one-, two-, three-, four- and sixfold rotations and rotoinversions results. These results imply for dimensions 2 and 3 that the matrix  $\mathbf{W}$  satisfies the condition  $(\mathbf{W})^k = \mathbf{I}$ , with  $k = 1, 2, 3, 4$  or  $6$ .

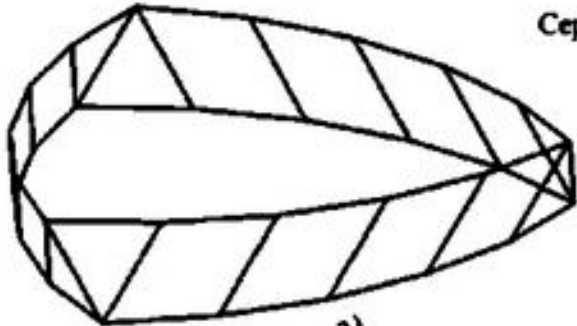
Consequently, for the operation  $(\mathbf{W}, \mathbf{w})$  in point space the relation

$$(\mathbf{W}, \mathbf{w})^k = [ \mathbf{I}, (\mathbf{W}^{k-1} + \mathbf{W}^{k-2} + \dots + \mathbf{W} + \mathbf{I})\mathbf{w} ] = (\mathbf{I}, \mathbf{t})$$

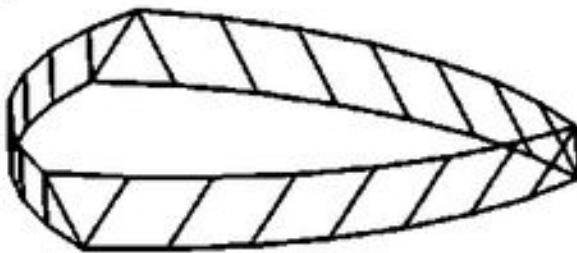
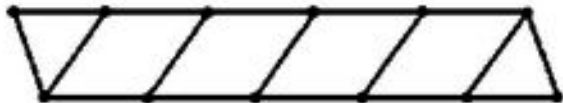
holds.

For the motion described by  $(\mathbf{W}, \mathbf{w})$ , this implies that a  $k$ -fold application results in a translation  $T$  (with translation vector  $\mathbf{t}$ ) of the crystal pattern. The (fractional) translation  $(1/k)T$  is called the *intrinsic translation part (screw or glide part)* of the symmetry operation. Where as the 'translation part' of a motion depends on the choice of the origin, the 'intrinsic translation part' of a motion is uniquely determined. The intrinsic translation vector  $(1/k)\mathbf{t}$  is the shortest translation vector of the motion for any choice of the origin.

Серия 1



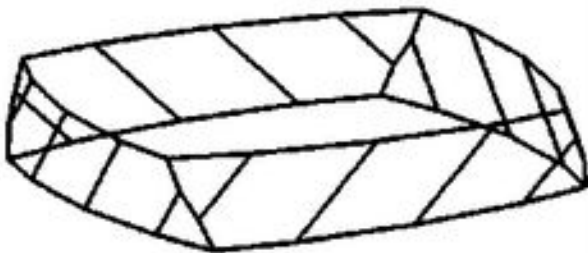
a)



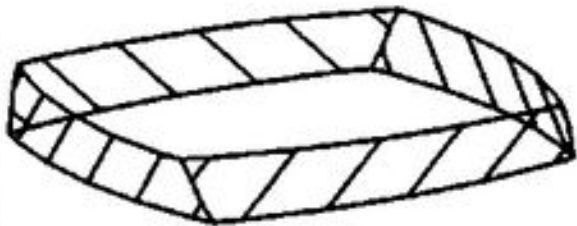
б)



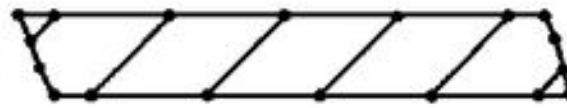
$$1) T^* \times C_m^*$$



Серия 2a)



Серия 2б)

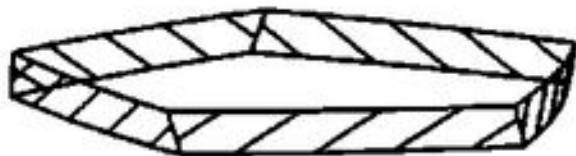


$$2a) O^* \times C_m^*$$

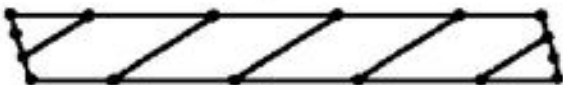
$$m=6k-1, k=1, 2, 3, \dots$$

$$2b) O^* \times C_m^*$$

$$m=6k+1, k=1, 2, 3, \dots$$



Серия 3a)



Серия 3б)



$$3a) I^* \times C_m^*$$

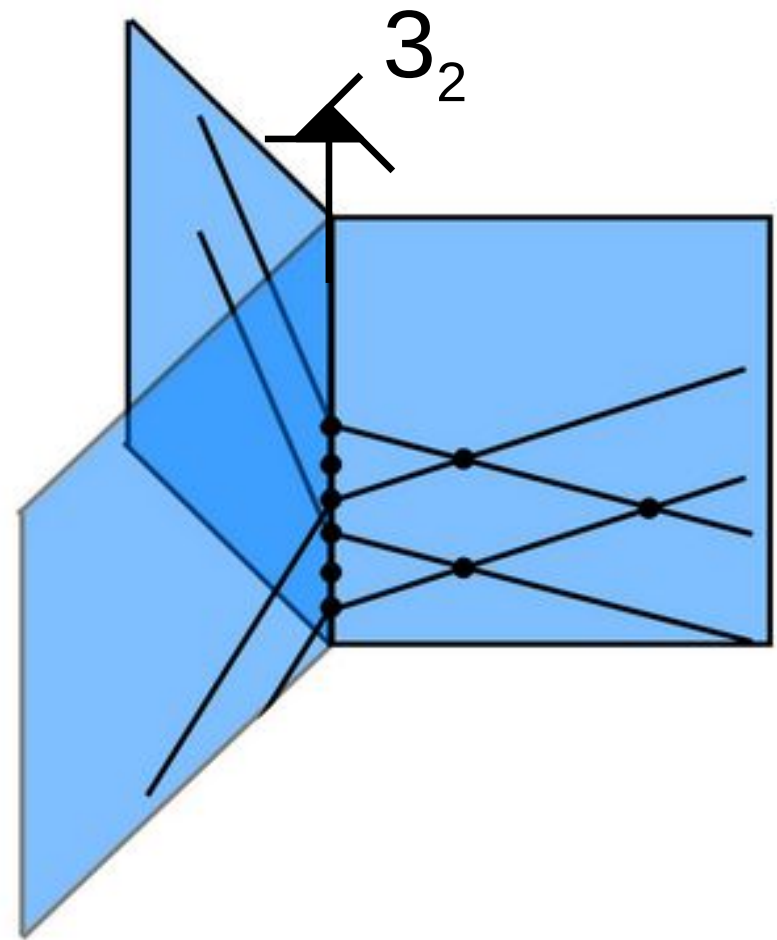
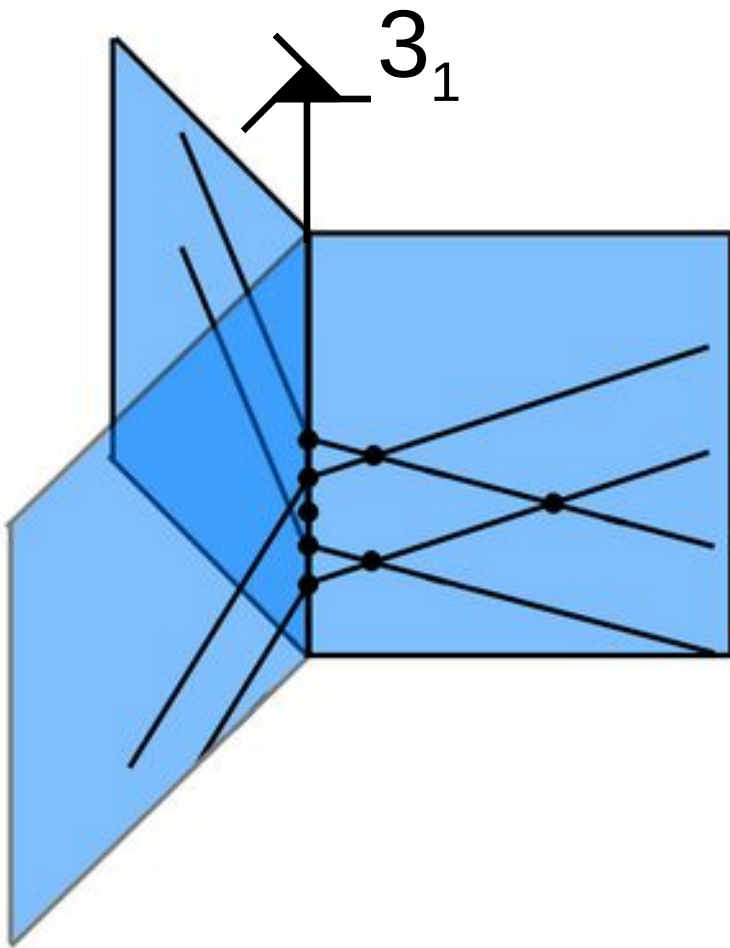
$$m=6k+1, k=1, 2, 3, \cancel{4}, 5, \dots$$

$$3b) I^* \times C_m^*$$

$$m=6k-1, k=\cancel{1}, 2, 3, 4, 5, \dots$$



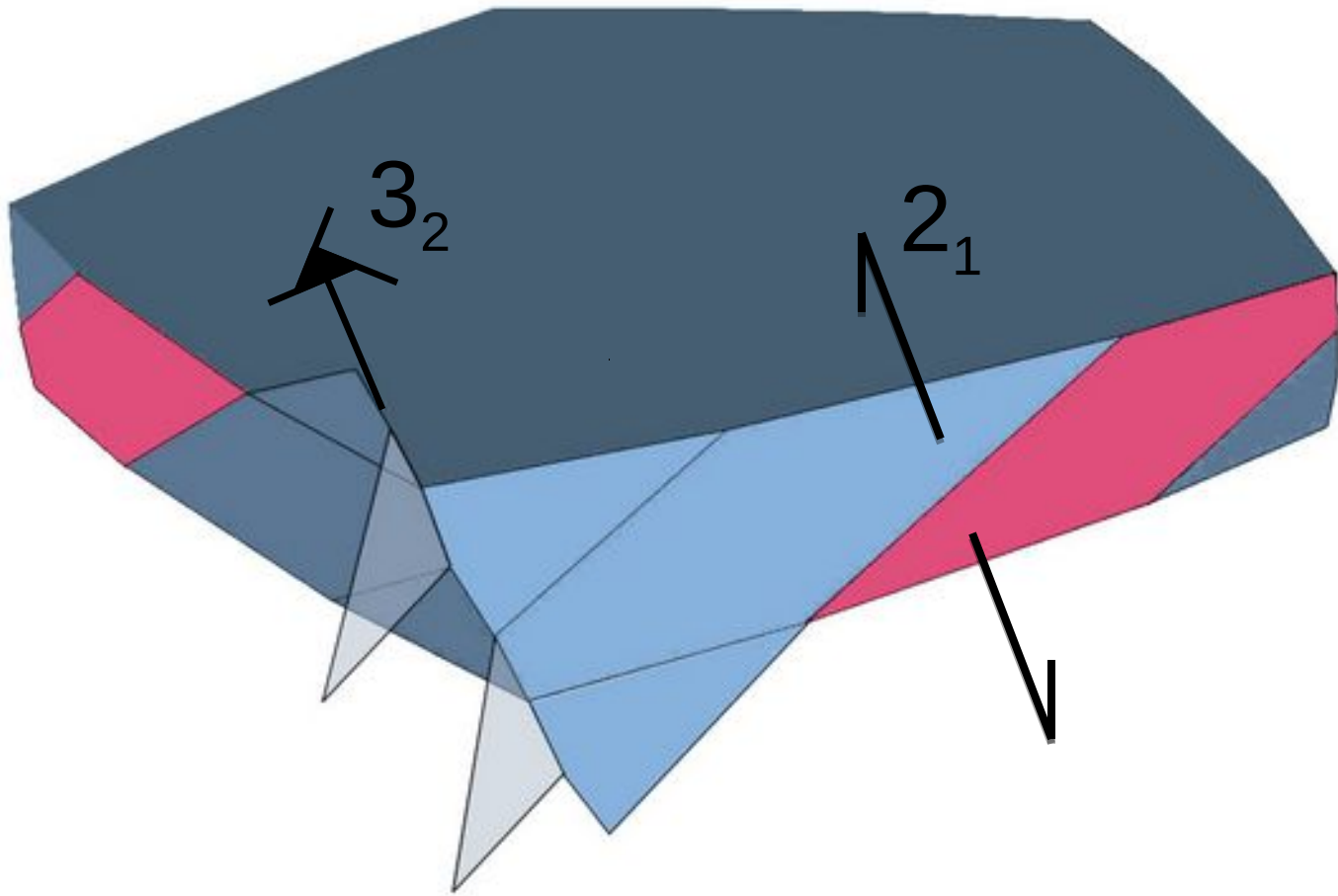
Винтовые оси симметрии разбиения определяют комбинаторное устройство «призм»



$$3_1 \in I^* \times C_7^* \subset I^* \times D_{35}^* \ni 3_2$$

Группа без  
неподвижных точек

Группа симметрии  
разбиения

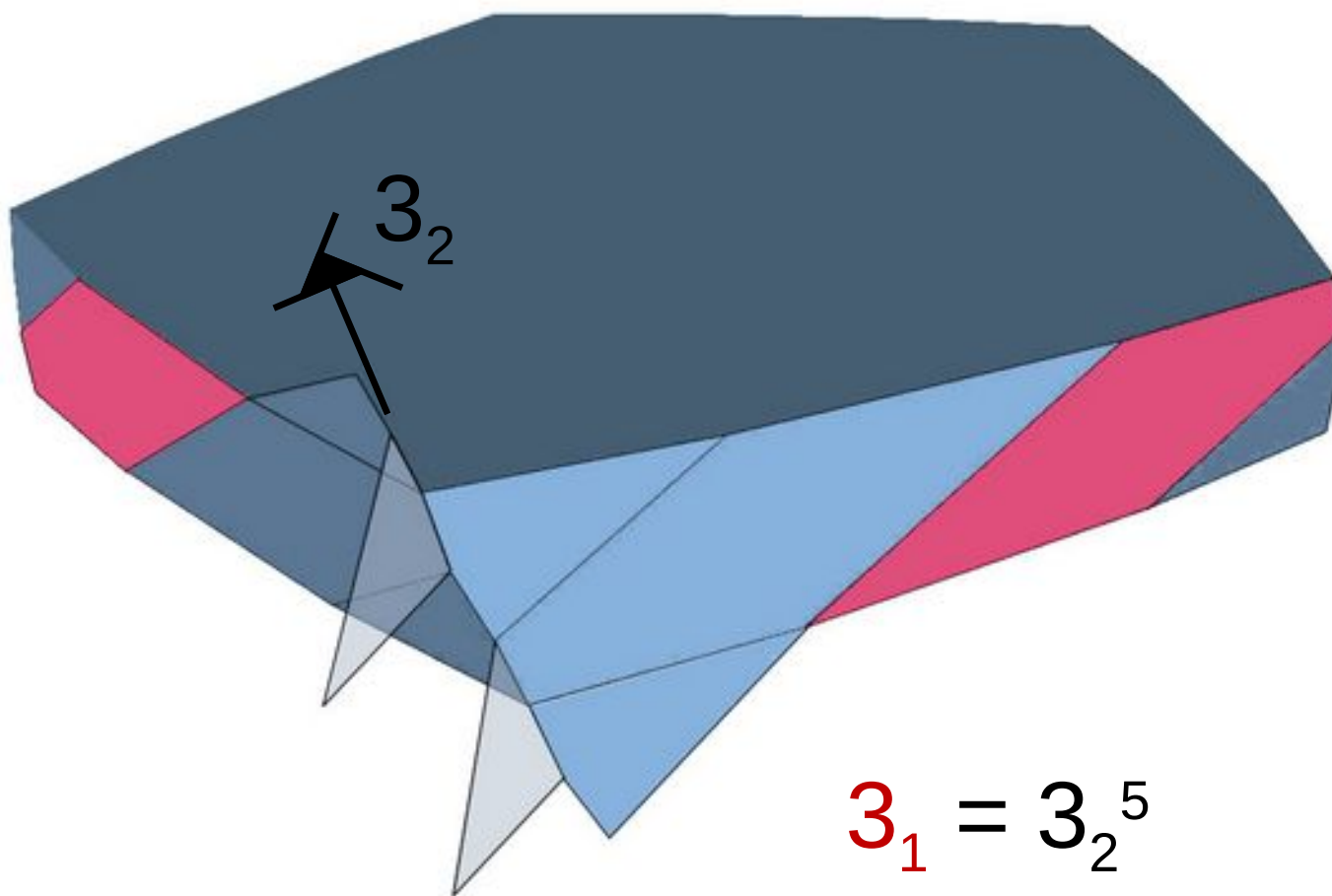


$$3_2 \cdot 1 = 2_1^3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = 3_2^{-1} \cdot 2_1^3 \cdot 1$$

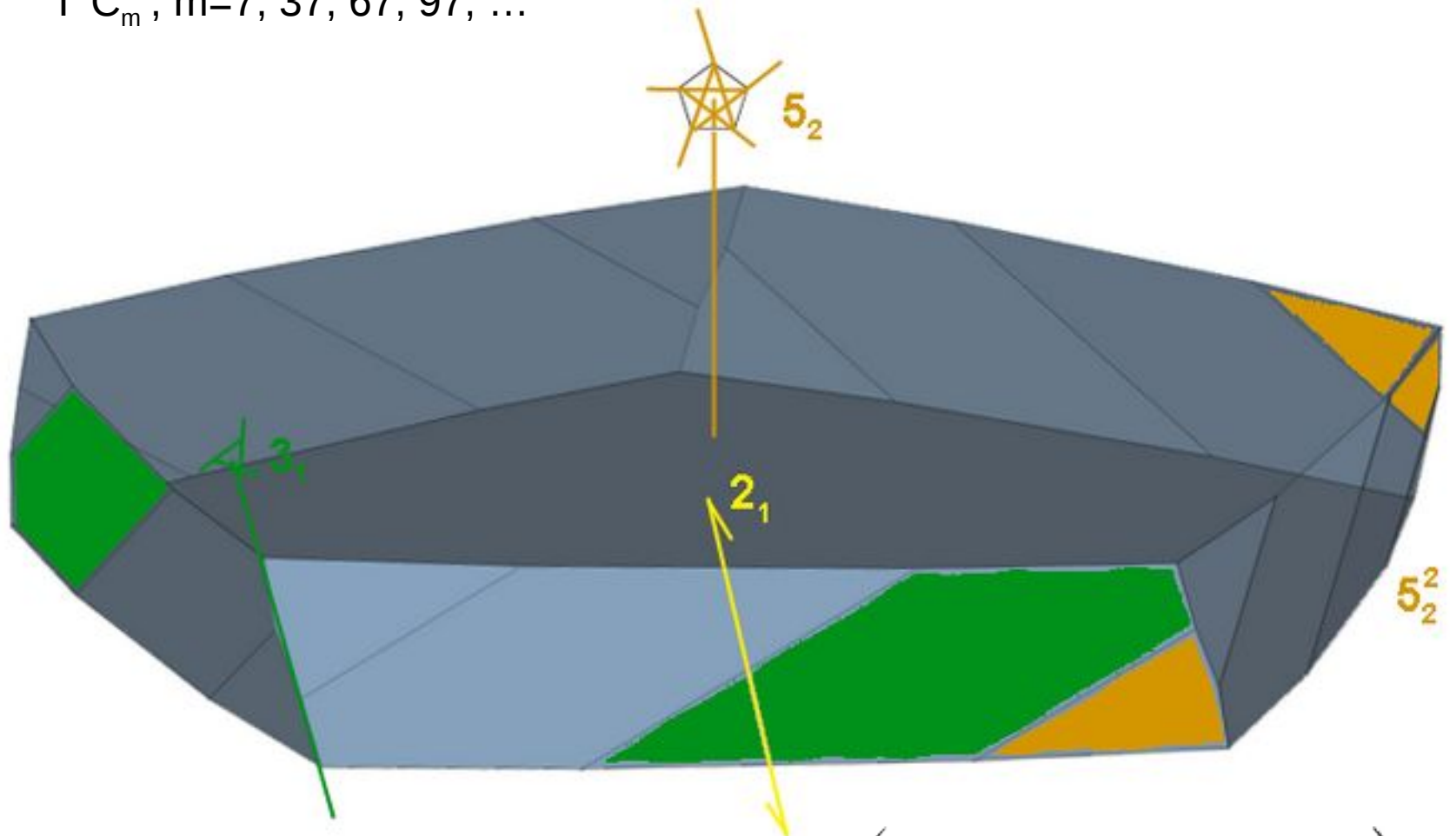
$$3_1 \in I^* \times C_7^* \subset I^* \times D_{35}^* \ni 3_2$$

Группа без  
неподвижных точек

Группа симметрии  
разбиения

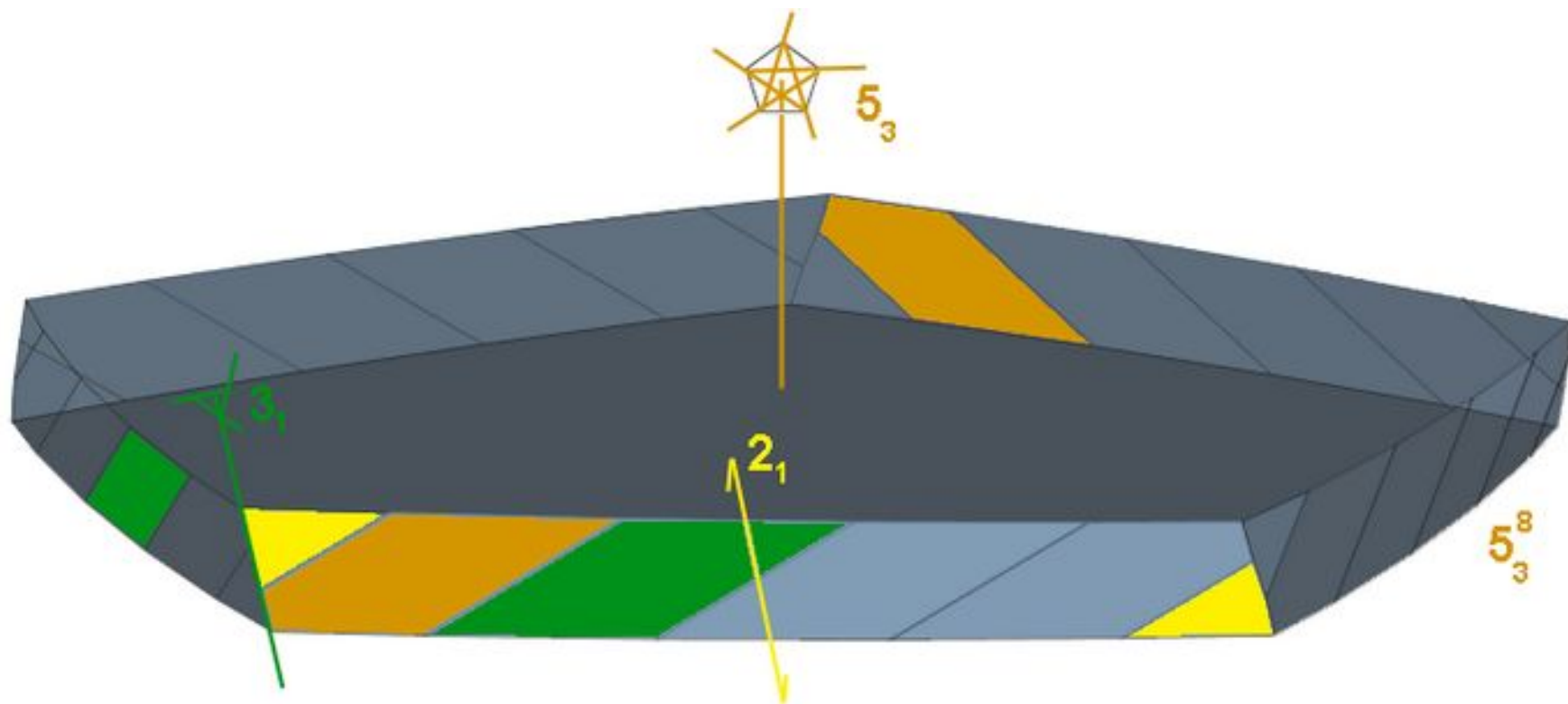


$I^* C_m^*$ ,  $m=7, 37, 67, 97, \dots$



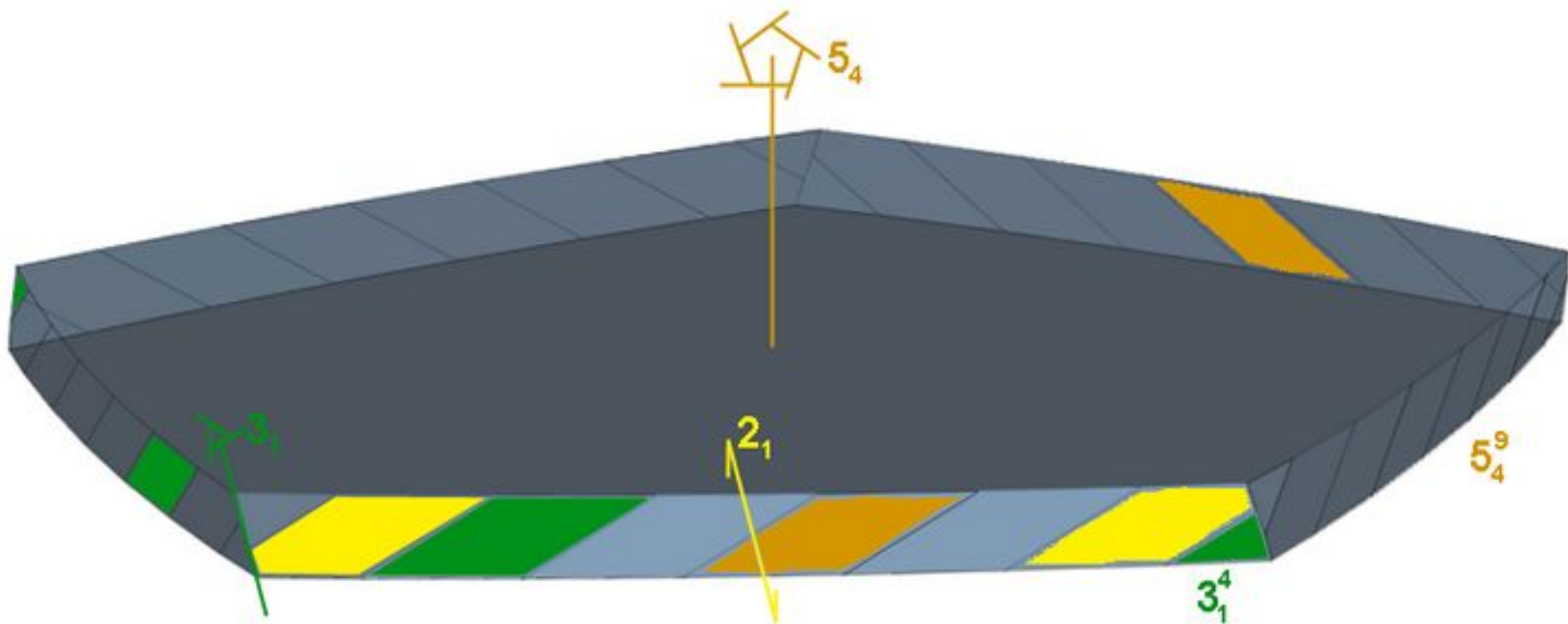
$$3 \left( \frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \right) + \left( \frac{\pi}{30k+7} \quad -\frac{\pi}{30k+7} \right) (-18k - 4) = \left( \frac{\pi}{5(30k+7)} \quad \frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+7)} \right) \sim 5_2$$

$I^* C_m^*$ ,  $m=13, 47, 77, 107, \dots$



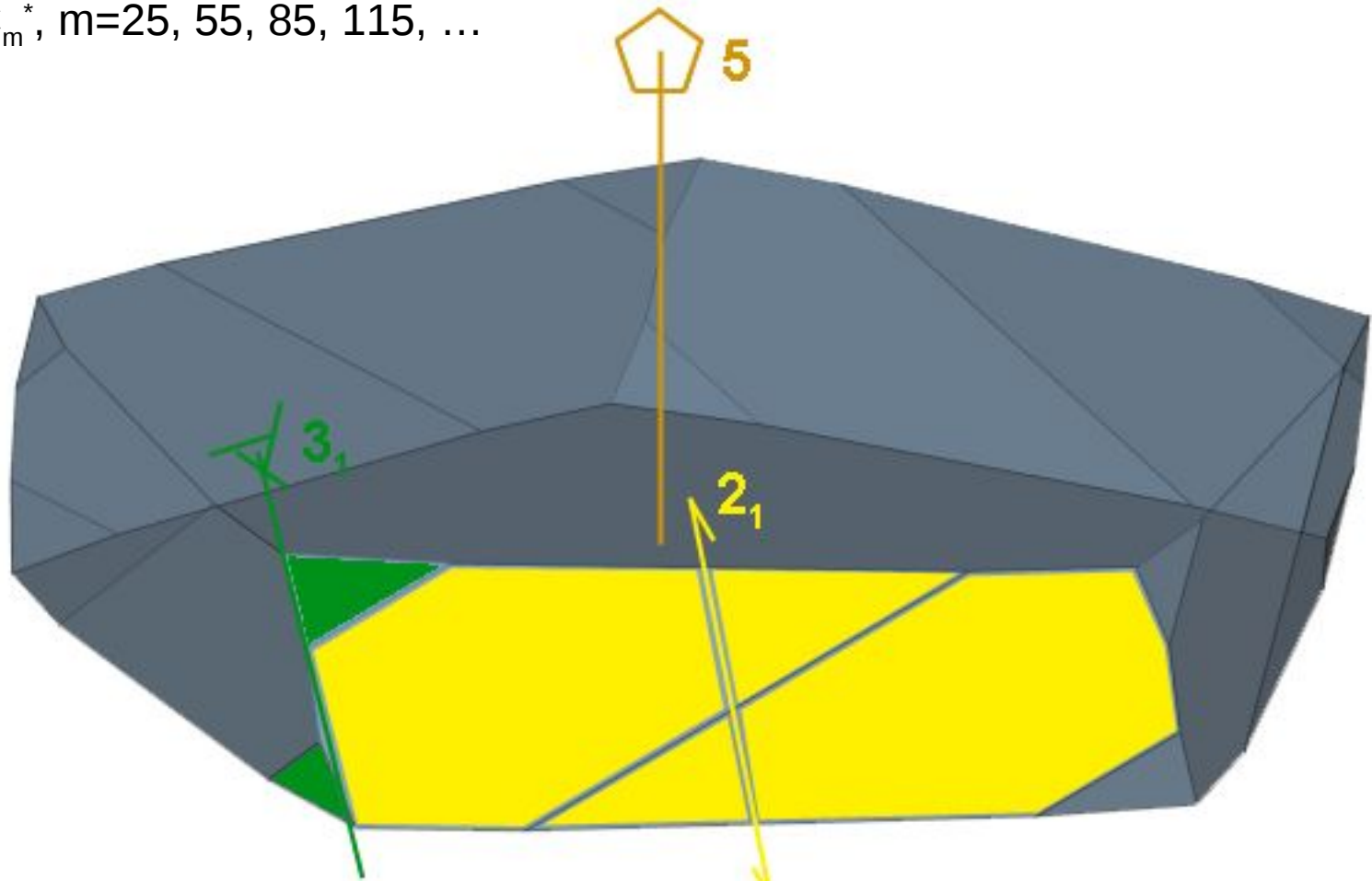
$$2 \left( \frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \right) + \left( \frac{\pi}{30k+13} \quad -\frac{\pi}{30k+13} \right) (-12k - 5) = \left( \frac{\pi}{5(30k+13)} \quad \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+13)} \right) \sim 5_3$$

$I^* C_m^*$ ,  $m=19, 49, 79, 109, \dots$



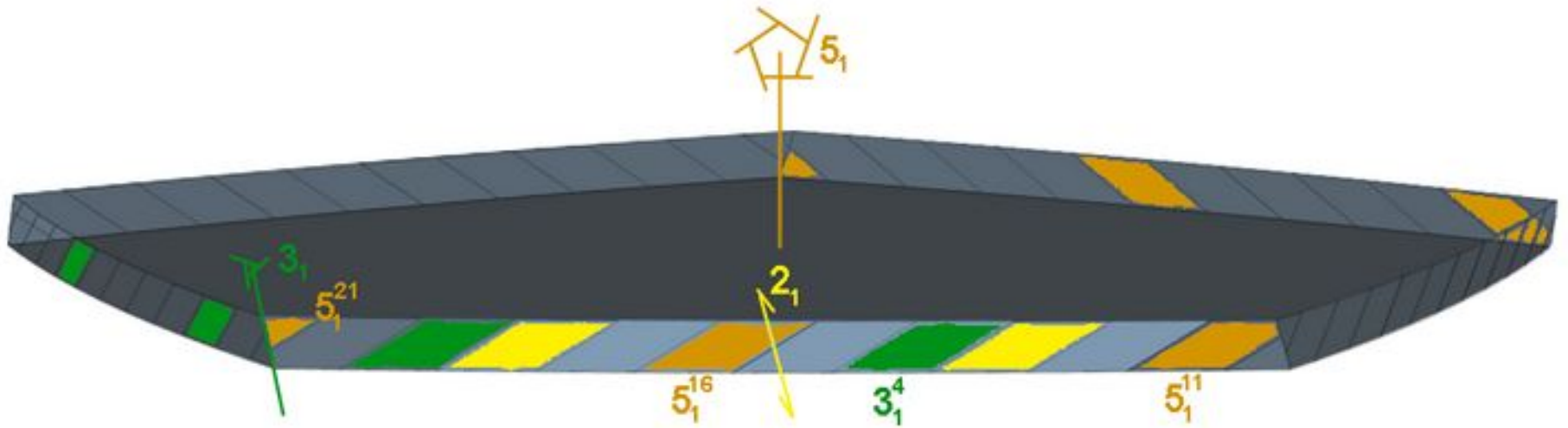
$$-\left(\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{\pi}{30k+19} \quad -\frac{\pi}{30k+19}\right)(6k+4) = \left(\frac{\pi}{5(30k+19)} \quad -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+19)}\right) \sim 5_4$$

$I^* C_m^*$ ,  $m=25, 55, 85, 115, \dots$



$$\left(\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{\pi}{30k+25} \quad -\frac{\pi}{30k+25}\right) (-6k - 5) = \left(0 \quad \frac{2\pi}{5}\right) \sim 5$$

$I^* C_m^*$ ,  $m=31, 61, 91, 121, \dots$



$$\left(\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{\pi}{30k+31} \quad -\frac{\pi}{30k+31}\right) (-6k-6) = \left(\frac{\pi}{5(30k+31)} \quad \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+31)}\right) \sim 5_1$$



Оси пятого порядка для группы  $I^* \times C_m^*$   $m=6k+1$ ,  $k=1,2,3,\dots$   
 (серия 3a)

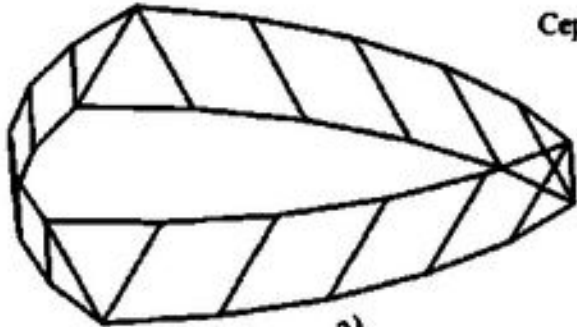
| 3a $\square$  | $I \times C_m$ , $m=6i+1$ | $\square$      | $\square$                      | $\square$    | $\square$     | $\square$     | $\square$     | $\square$   |
|---------------|---------------------------|----------------|--------------------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---|
| $\square$     | $C_m$ , $m=\square$       | $k=0, \square$ | $1, \square$                   | $2, \square$ | $3, \square$  | $4, \square$  | $5 \square$   | $\square$   |
| 3a1 $\square$ | $30k+7 \square$           | $7 \square$    | $37 \square$                   | $67 \square$ | $97 \square$  | $127 \square$ | $157 \square$ | $\left( \frac{\pi}{5(30k+7)} \quad \frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+7)} \right) \sim \cdot 5_2 \square$    |
| 3a2 $\square$ | $30k+13 \square$          | $13 \square$   | $43 \square$                   | $73 \square$ | $103 \square$ | $133 \square$ | $163 \square$ | $\left( \frac{\pi}{5(30k+13)} \quad \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+13)} \right) \sim \cdot 5_3 \square$  |
| 3a3 $\square$ | $30k+19 \square$          | $19 \square$   | $49 \square$                   | $79 \square$ | $109 \square$ | $139 \square$ | $169 \square$ | $\left( \frac{\pi}{5(30k+19)} \quad -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+19)} \right) \sim \cdot 5_4 \square$ |
| 3a4 $\square$ | $30k+25 \square$          | $25 \square$   | <u><math>55 \square</math></u> | $85 \square$ | $115 \square$ | $145 \square$ | $175 \square$ | $\left( 0 \quad \frac{2\pi}{5} \right) \sim \cdot 5 \square$  |
| 3a5 $\square$ | $30k+31 \square$          | $31 \square$   | $61 \square$                   | $91 \square$ | $121 \square$ | $151 \square$ | $181 \square$ | $\left( \frac{\pi}{5(30k+31)} \quad \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+31)} \right) \sim \cdot 5_1 \square$  |

# Оси пятого порядка для группы $I^* \times C_m^*$ $m=6k-1$ , $k=1,2,3$ , ... (серия 3б)

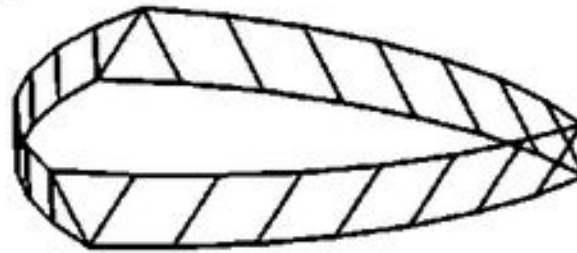
3б  $I \times C_m$   $m=6i-1$

|     | $C_m, m=$ | $k=0,$ | 1, | 2, | 3,  | 4,  | 5   |   |
|-----|-----------|--------|----|----|-----|-----|-----|---|
| 361 | $30k+5$   | 5      | 35 | 65 | 95  | 125 | 155 | $(0 \quad \frac{2\pi}{5}) \sim 5$   |
| 362 | $30k+11$  | 11     | 41 | 71 | 101 | 131 | 161 | $\left( \frac{\pi}{5(30k+11)} \quad \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+11)} \right) \sim 5_1$  |
| 363 | $30k+17$  | 17     | 47 | 77 | 107 | 137 | 167 | $\left( \frac{\pi}{5(30k+17)} \quad -\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+17)} \right) \sim 5_2$ |
| 364 | $30k+23$  | 23     | 53 | 83 | 113 | 143 | 173 | $\left( \frac{\pi}{5(30k+23)} \quad \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+23)} \right) \sim 5_3$  |
| 365 | $30k+29$  | 29     | 59 | 89 | 119 | 149 | 179 | $\left( \frac{\pi}{5(30k+29)} \quad -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5(30k+29)} \right) \sim 5_4$ |

Серия 1



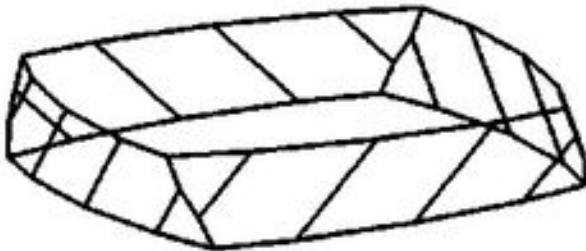
a)



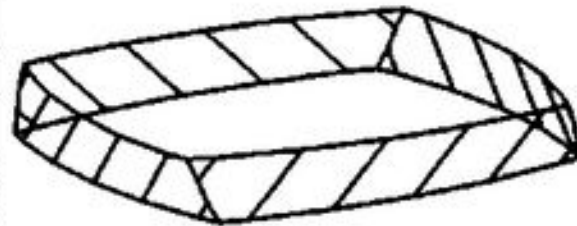
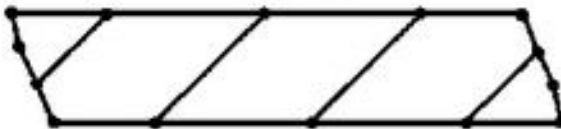
б)



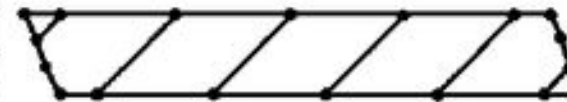
$$1) T^* \times C_m^*$$



Серия 2a



Серия 2b

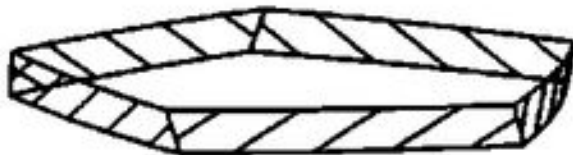


$$2a) O^* \times C_m^*$$

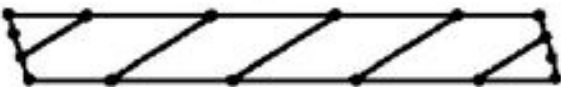
$$m=6k-1, k=1, 2, 3, \dots$$

$$2b) O^* \times C_m^*$$

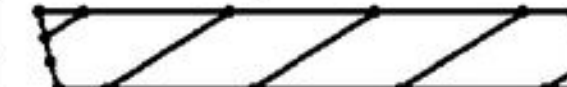
$$m=6k+1, k=1, 2, 3, \dots$$



Серия 3a



Серия 3b



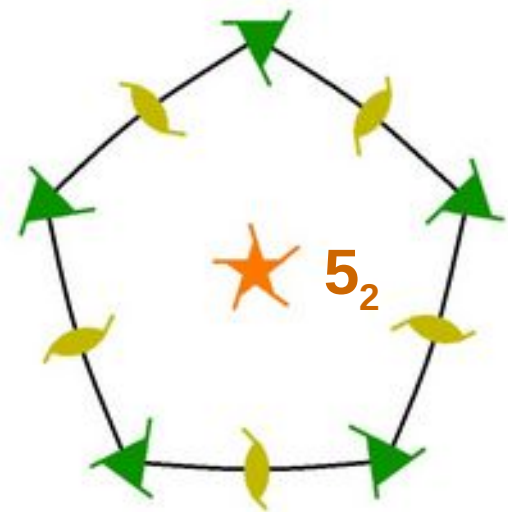
$$3a) I^* \times C_m^*$$

$$m=6k+1, k=1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

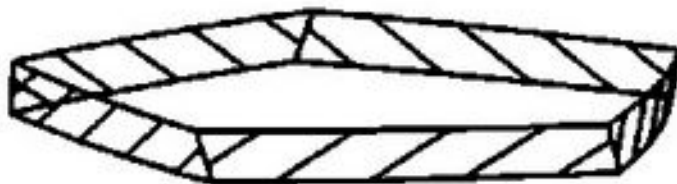
$$3b) I^* \times C_m^*$$

$$m=6k-1, k=1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

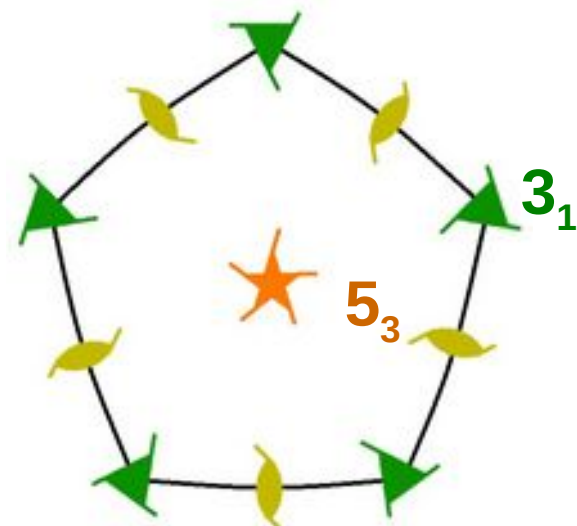
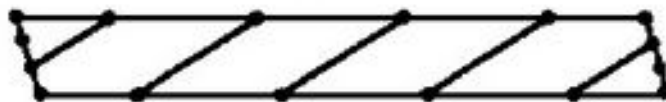
3a)  $I^* \times C_m^*$   $m=6k+1$ ,  $k=1, 2, 3, 4, 5\dots$



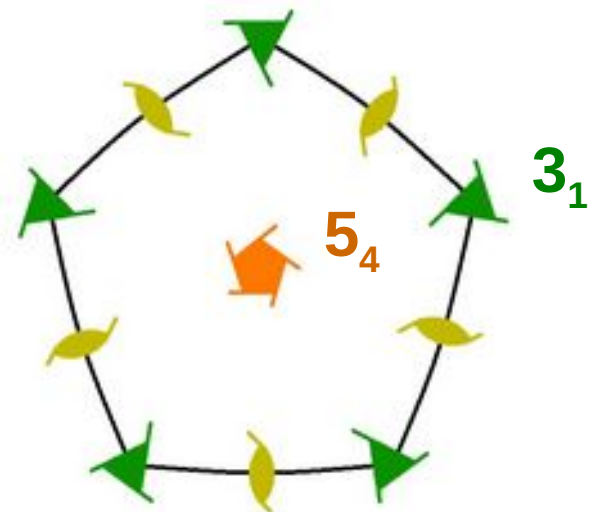
$$m=30k+7$$



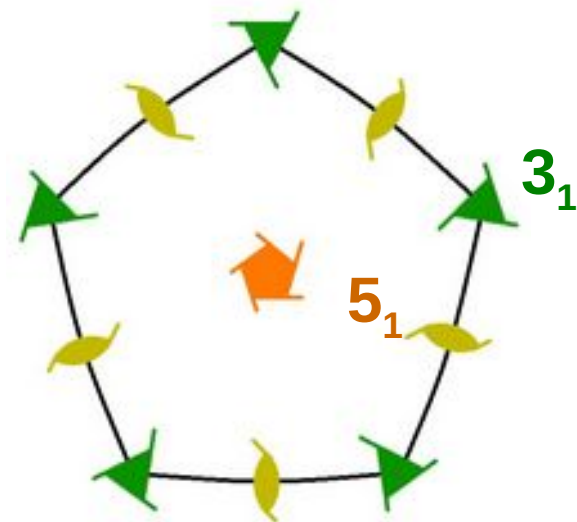
Серия 3а



$$m=30k+13$$

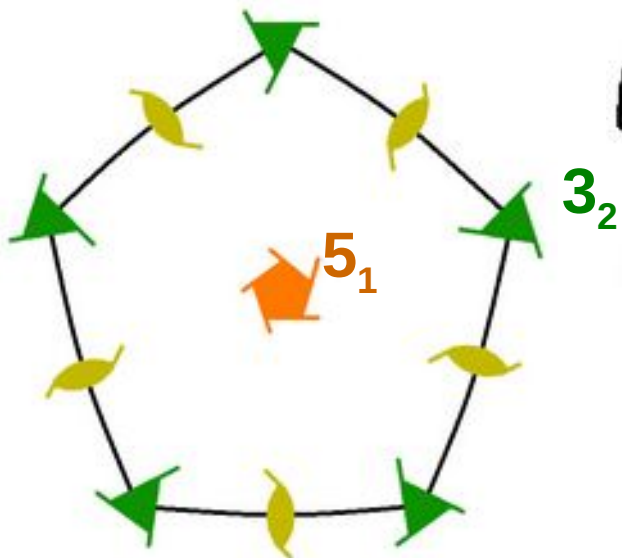


$$m=30k+19$$



$$m=30k+31$$

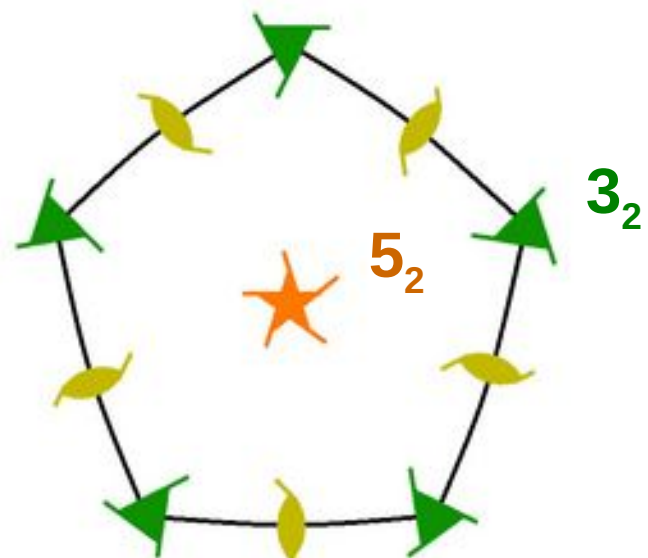
3b)  $I^* \times C_m^*$   ~~$m=6k-1$~~ ,  $k=1, 2, 3, 4, 5\dots$



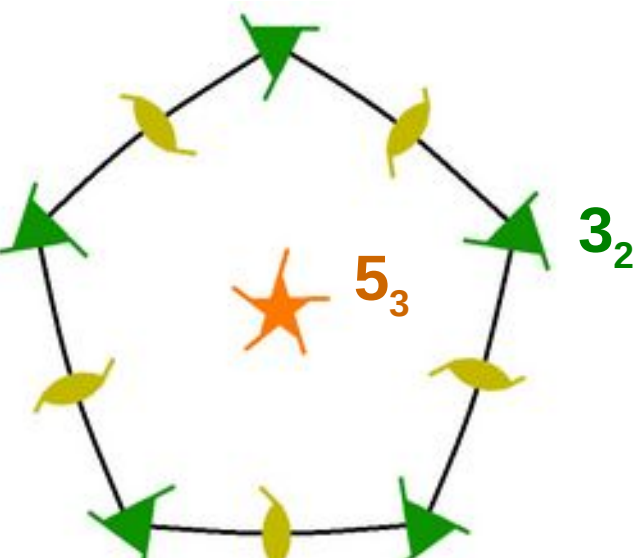
$$m=30k+11$$



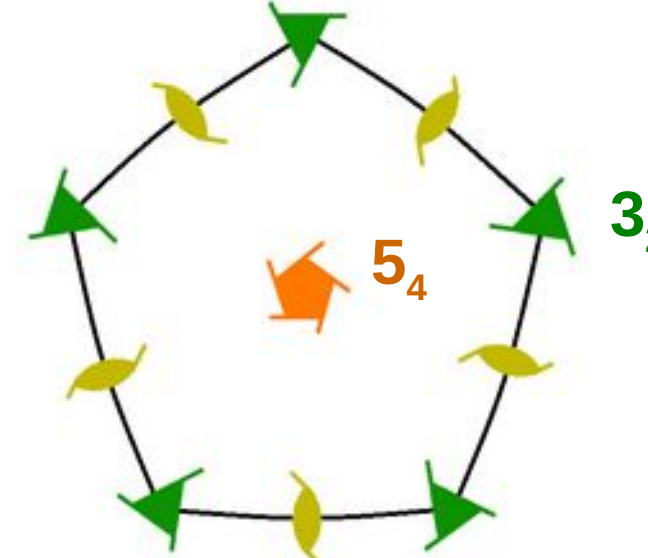
Серия 3b



$$m=30k+17$$

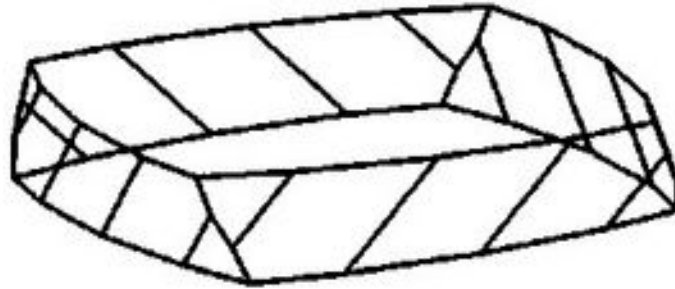


$$m=30k+23$$

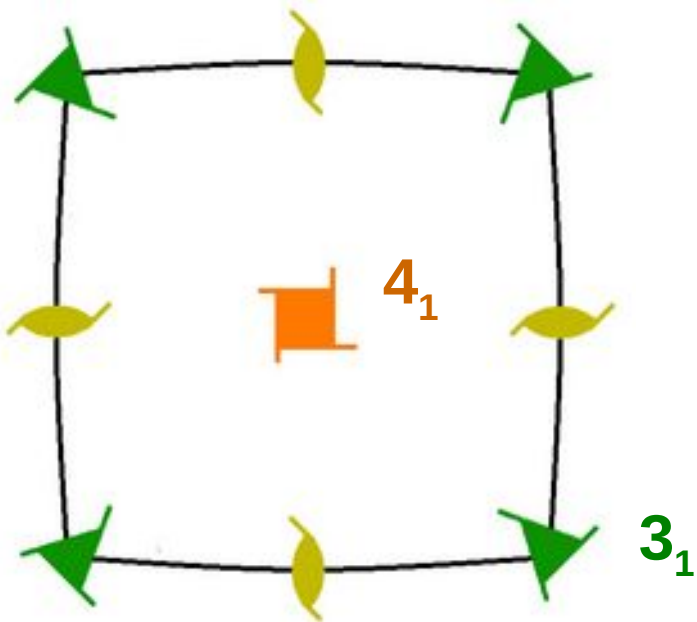
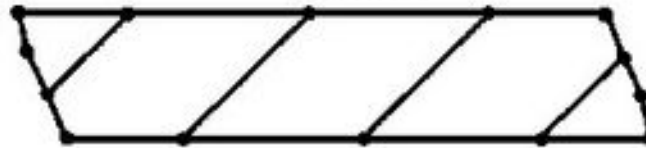


$$m=30k+29$$

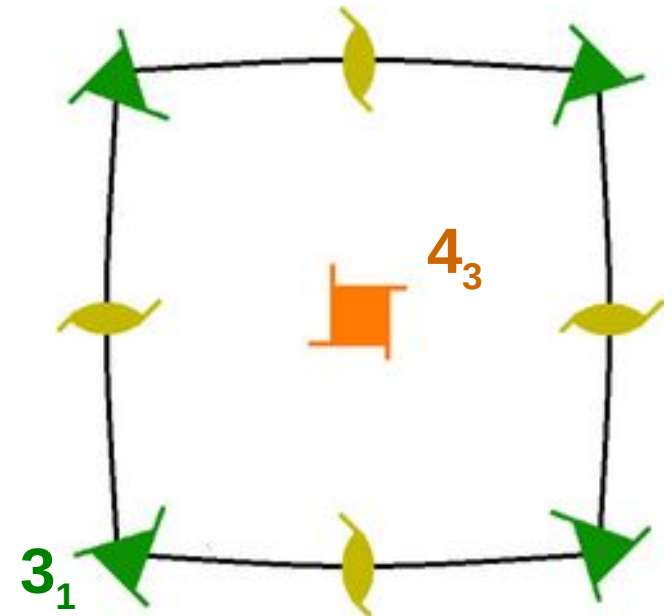
2a)  $O^* \times C_m^*$   $m=6k-1$ ,  $k=1, 2, 3 \dots$



Серия 2a

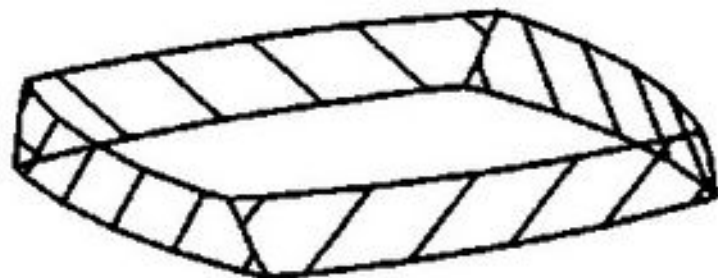


$$m=12k+5$$

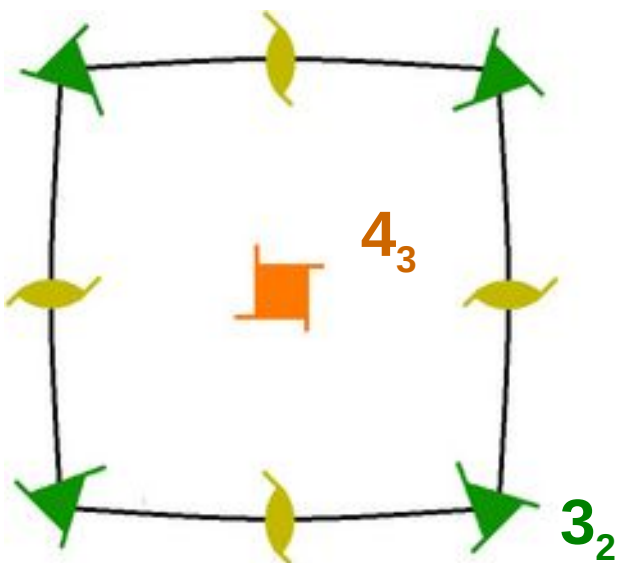


$$m=12k+11$$

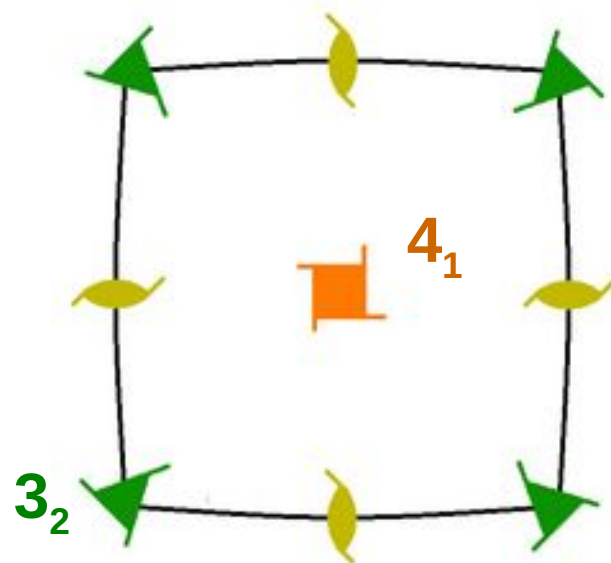
2b)  $O^* \times C_m^*$   $m=6k+1$ ,  $k=1, 2, 3 \dots$



Серия 2b

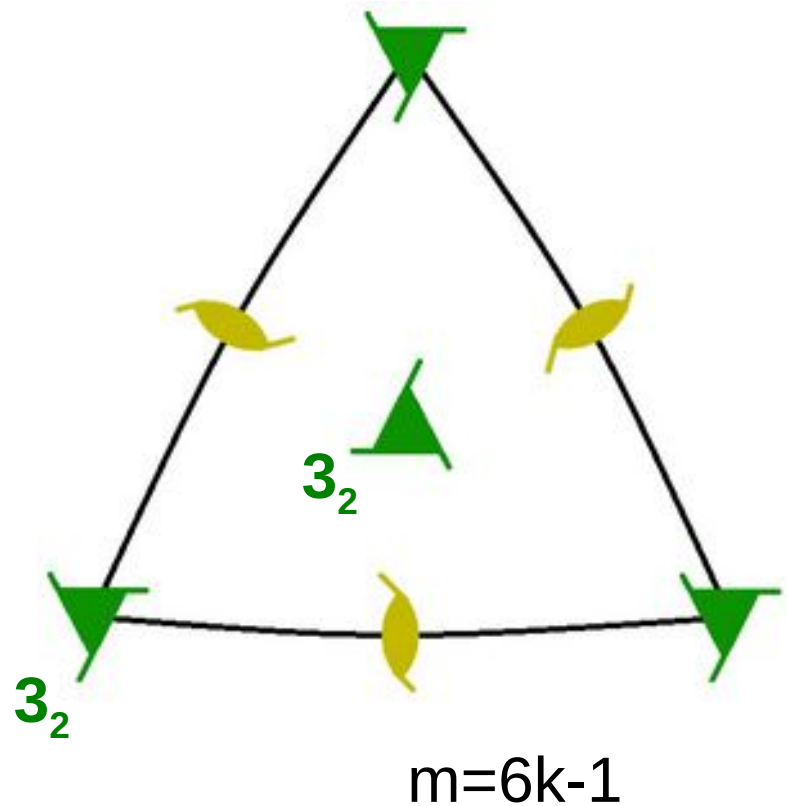
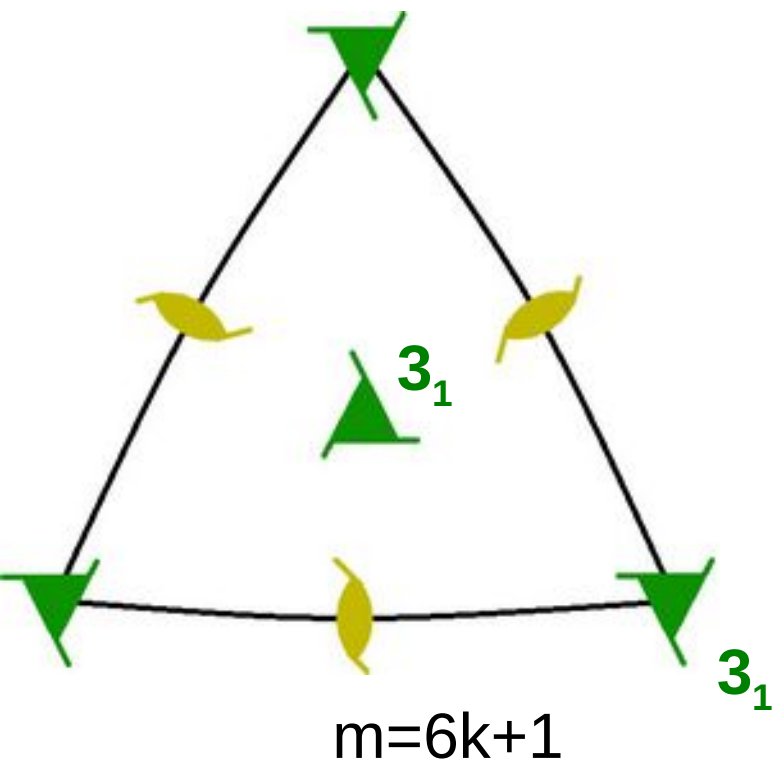
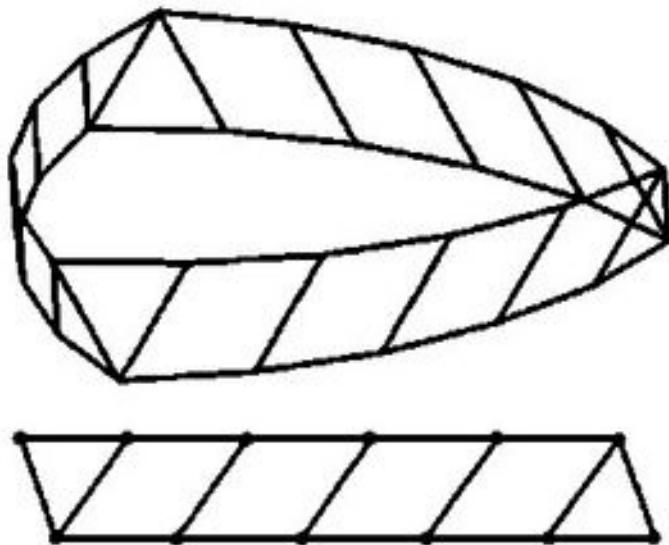


$m=12k+7$



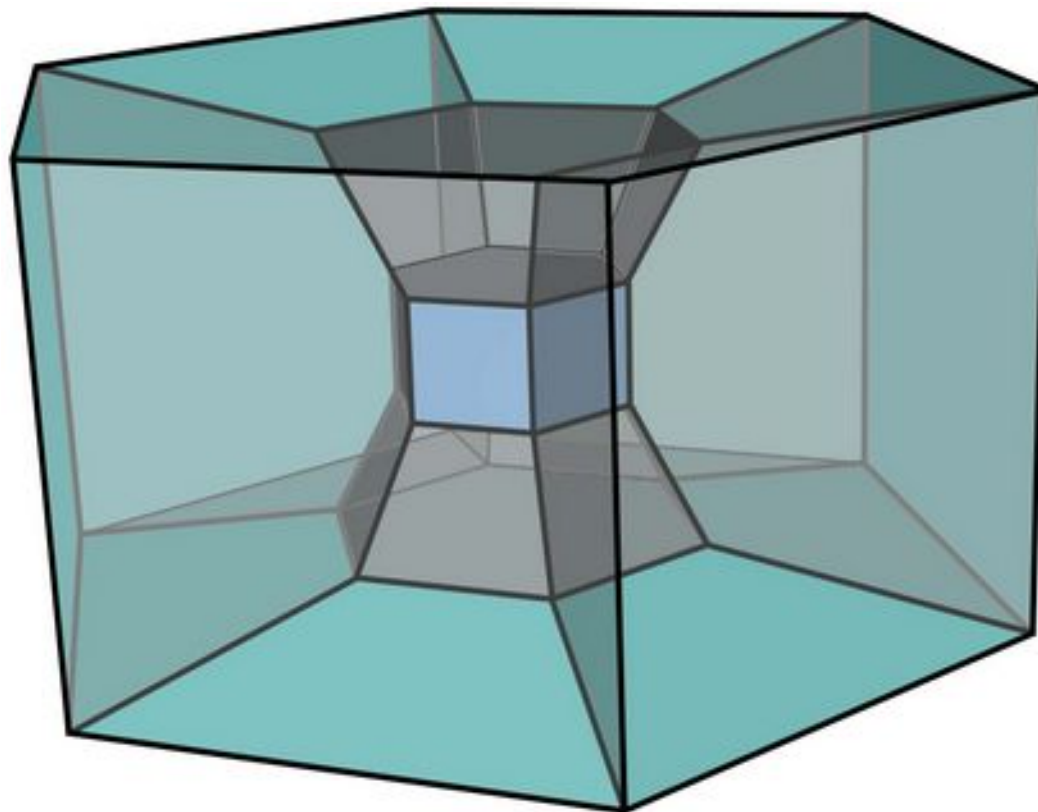
$m=12k+13$

1)  $T^* \times C_m^*$





Серия  $D_n^* \times C_m^*$  (серия призм) распадается на две подсерии  
- с чётными  $n$   
- и с нечётными  $n$



Четырёхмерный изоэдр с 12-ю трёхмерными гранями – правильными шестиугольными призмами (диаграмма Шлегеля)

1.  $C_n \times C_m$   
1 подсерия

2.  $D_n^* \times C_m$   
2 подсерии

3.  $T^* \times C_m$   
2 подсерии

4.  $O^* \times C_m$   
4 подсерии

5.  $I^* \times C_m$   
8 подсерий

**5 серий** сферических многообразий распадаются **7 подсерий** с учётом комбинаторики многогранников Дирихле.

**5 серий** многообразий распадаются на **17 подсерий** с учётом отождествления граней

Работу можно рассматривать также как небольшое продвижение в задаче перечисления четырёхмерных простых форм - всё ещё нерешённой проблеме\*

\*Н.П. Долбилин. О правильных разбиениях Дирихле сферы. Москва.1972

**Благодарю за внимание!**