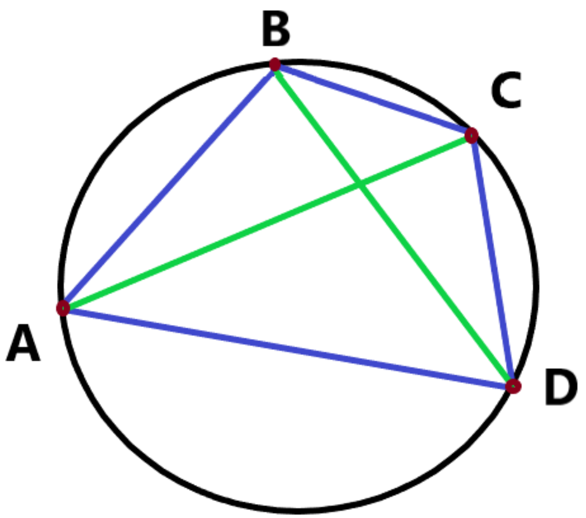
«О теореме Кейси и преобразованиях Лагерра в пространствах постоянной кривизны»

Научно-исследовательский семинар по дискретной геометрии и геометрии чисел

12 марта 2025 г. 16:45, **г. Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, мехмат**

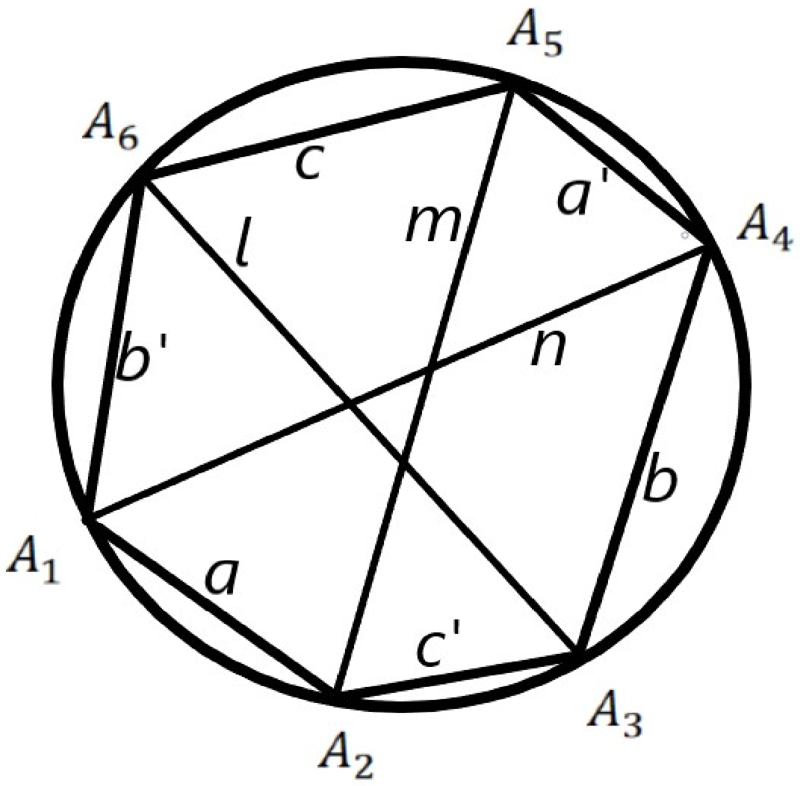
Теорема Птолемея



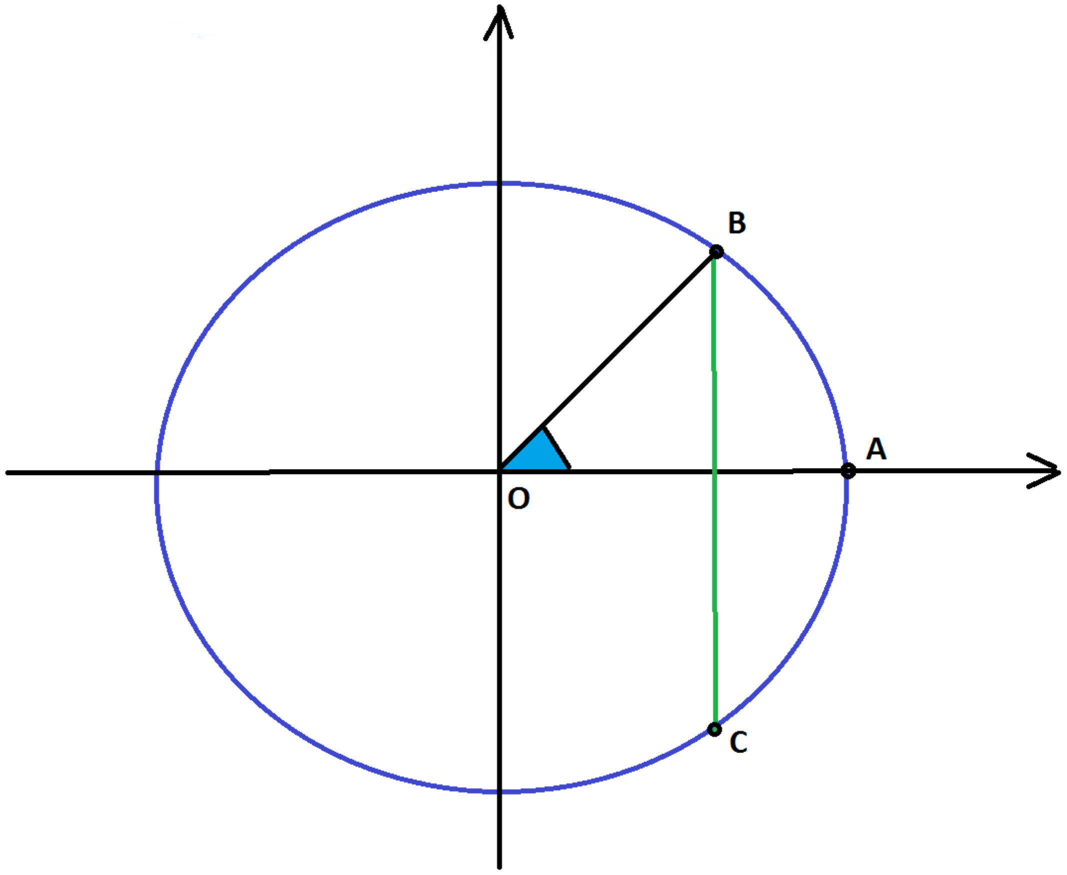
- *Четырехугольник на евклидовой плоскости является вписанным тогда и только тогда, когда произведение длин его диагоналей рано сумме произведении длин противоположных сторон:* $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

Теорема Фурмана. *Шестиугольник* $A_1\ A_2\ A_3A_4A_5A_6$ *вписан в окружность тогда и только тогда, когда*

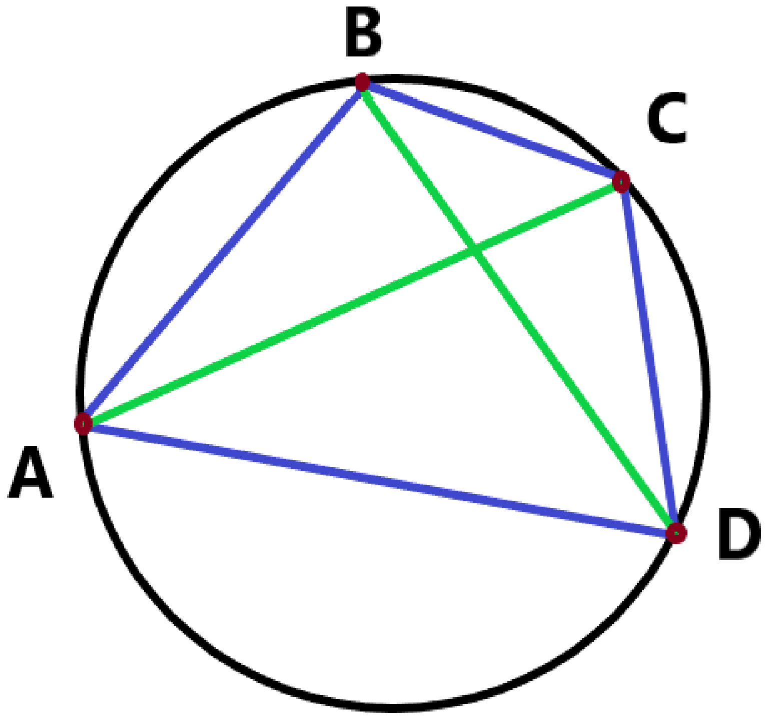
$$l \cdot m \cdot n = a \cdot a' \cdot l + b \cdot b' \cdot m + c \cdot c' \cdot n + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b' \cdot c'$$



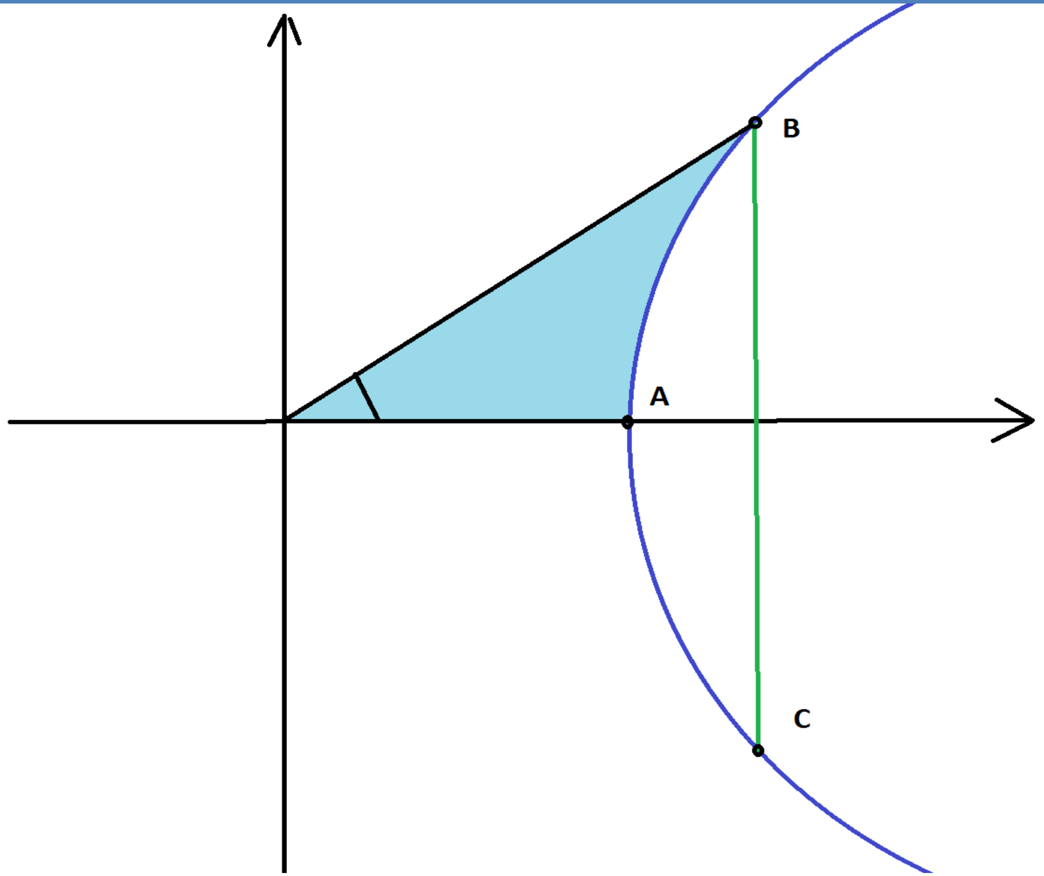
$$BC = 2R \cdot \sin\frac{\breve{BC}}{2R}$$



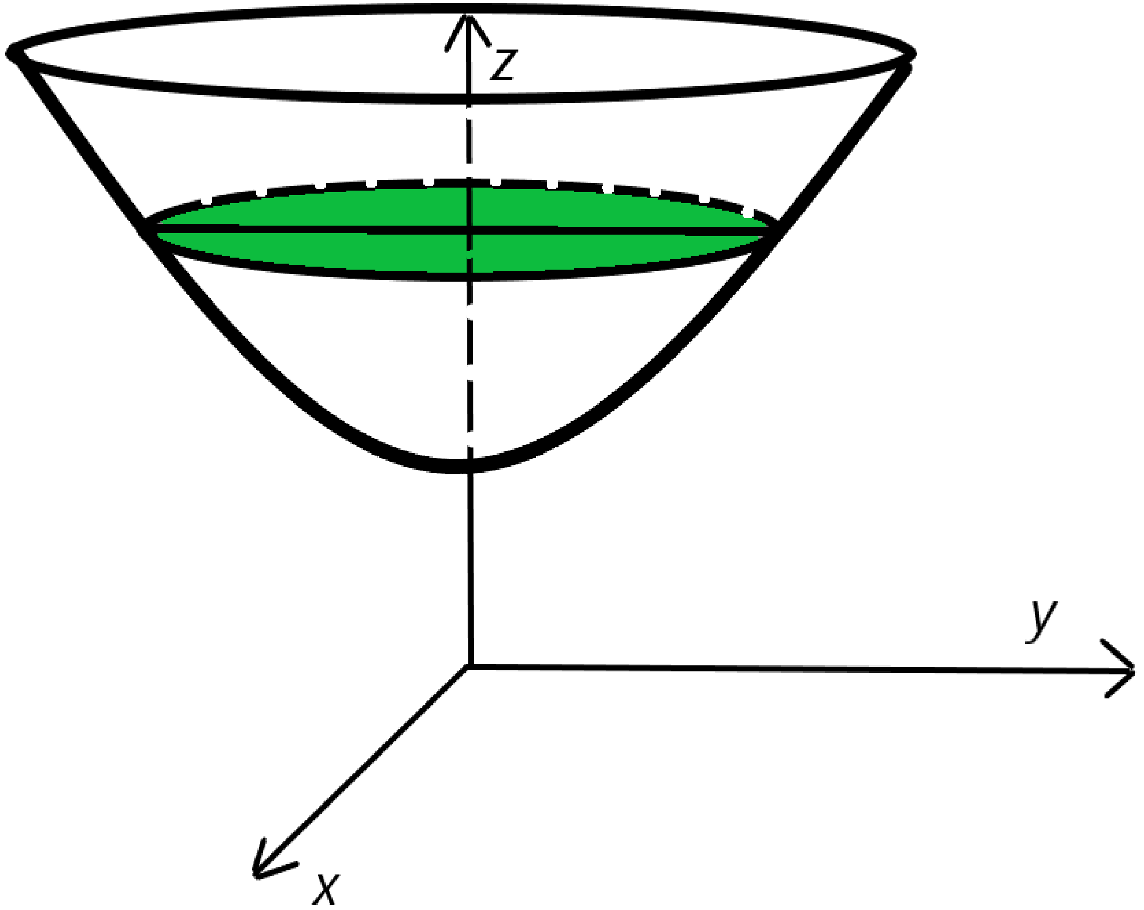
$$\sin\frac{\overset{\frown}{AC}}{2R}\cdot\sin\frac{\overset{\frown}{BD}}{2R}=\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{2R}\cdot\sin\frac{\overset{\frown}{CD}}{2R}+\sin\frac{\overset{\frown}{AD}}{2R}\cdot\sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2R}$$



$$BC = 2\sigma \cdot \sinh \frac{\overset{\frown}{BC}}{2\sigma}$$



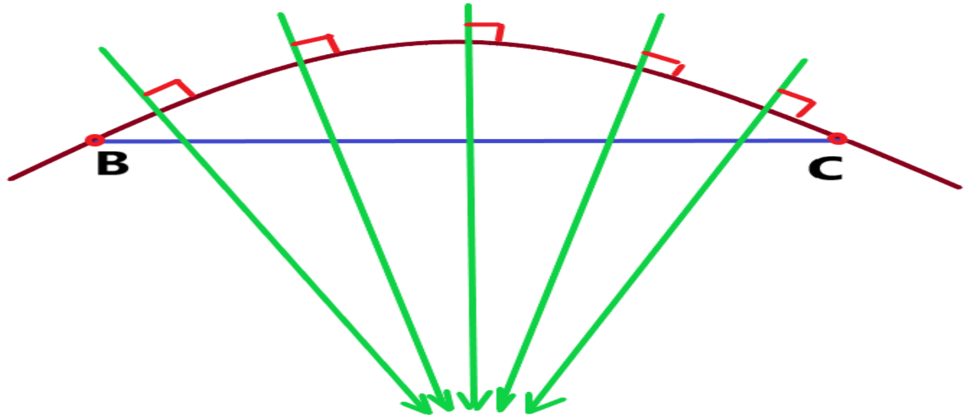
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = -\sigma^2$$



Теорема Птолемея на плоскости Лобачевского

- [Хорда длины $\boldsymbol{x}$ стягивает дугу $\boldsymbol{l}$ орицикла длины $\boldsymbol{l} = 2\sigma \cdot sinh\,\frac{\boldsymbol{x}}{2\sigma}$

на гиперболической плоскости кривизны $K = -\frac{1}{\sigma^2}$.]



- $\sinh\frac{\overset{\frown}{AC}}{2\sigma}\cdot\sinh\frac{\overset{\frown}{BD}}{2\sigma}=\sinh\frac{\overset{\frown}{AB}}{2\sigma}\cdot\sinh\frac{\overset{\frown}{CD}}{2\sigma}+\sinh\frac{\overset{\frown}{AD}}{2\sigma}\cdot\sinh\frac{\overset{\frown}{BC}}{2\sigma}$

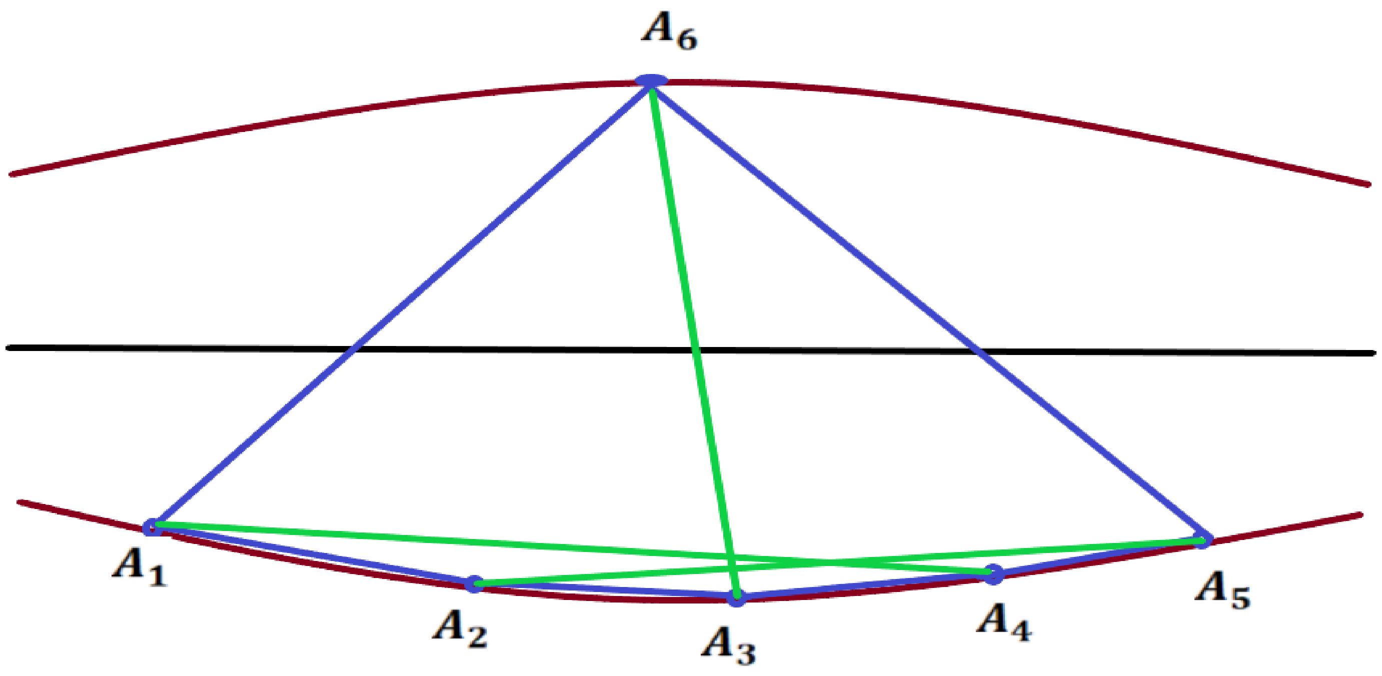
Теорема Фурмана

- Пусть вершины шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ в указанном порядке (с точностью до циклической перестановки) лежат на орицикле или одной ветви эквидистанты на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$. Пусть a_{ij} − длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение

- $\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{14}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{25}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{36}}}{\mathbf{2}} = \mathrm{sh}\frac{a_{12}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{45}}{2}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{36}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{sh}\frac{a_{16}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{34}}{2}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{25}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{sh}\frac{a_{23}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{56}}{2}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{14}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{sh}\frac{a_{12}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{34}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{56}}{2} + \mathrm{sh}\frac{a_{23}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{45}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{16}}{2}$

Вершины на двух ветвях

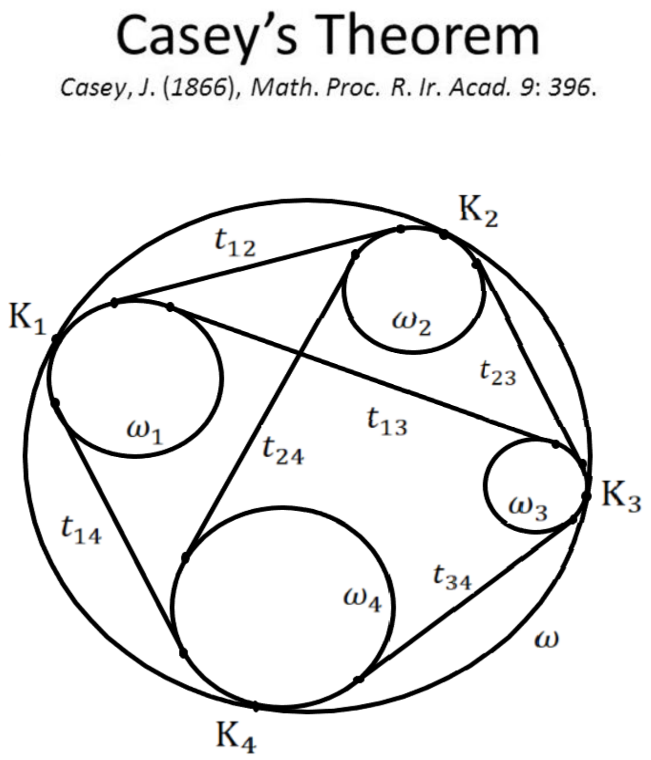
- Пусть вершины A_1, A_2, A_3 , A_4, A_5 шестиугольника лежат на одной ветви эквидистанты на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$, а вершина A_6 – на другой . Пусть a_{ij} – длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение
- $\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{14}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{25}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{ch}\frac{\boldsymbol{a_{36}}}{\mathbf{2}} = \mathrm{sh}\frac{a_{12}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{45}}{2}\,\mathbf{ch}\frac{\boldsymbol{a_{36}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{ch}\frac{a_{16}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{34}}{2}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{25}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{sh}\frac{a_{23}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a_{56}}{2}\,\mathbf{sh}\frac{\boldsymbol{a_{14}}}{\mathbf{2}} + \mathrm{sh}\frac{a_{12}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{34}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a_{56}}{2} + \mathrm{sh}\frac{a_{23}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{a_{45}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{a_{16}}{2}$

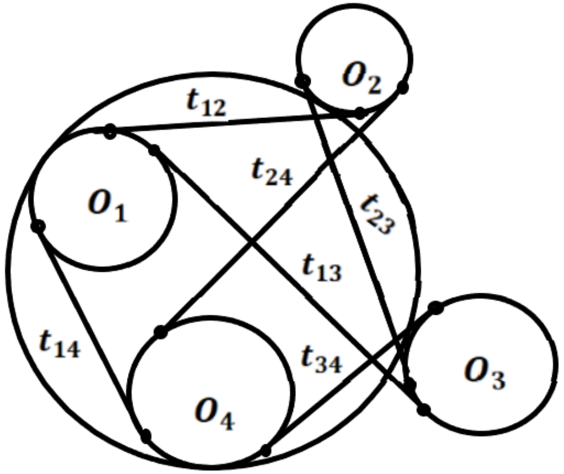


John CASEY (1820-1891)

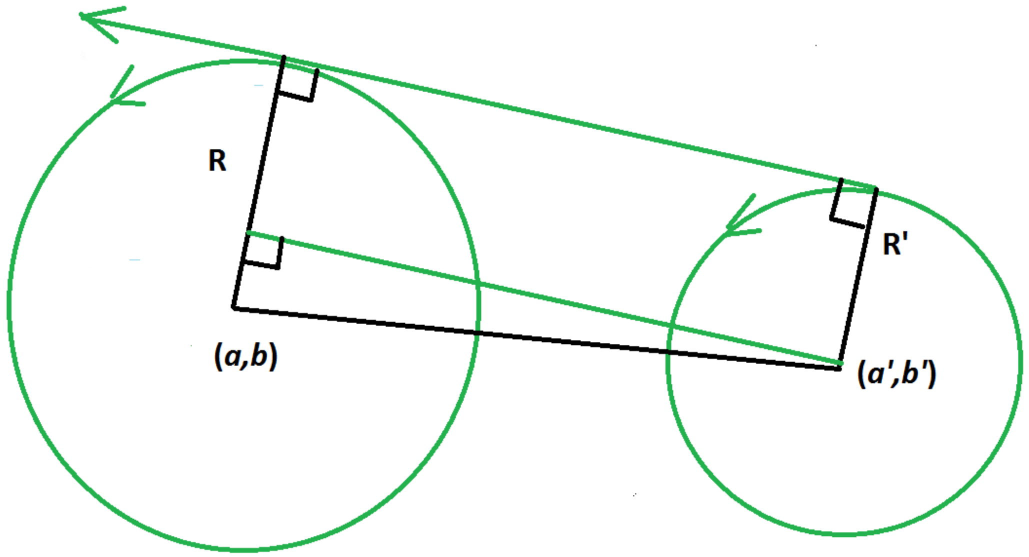
Теорема Кейси

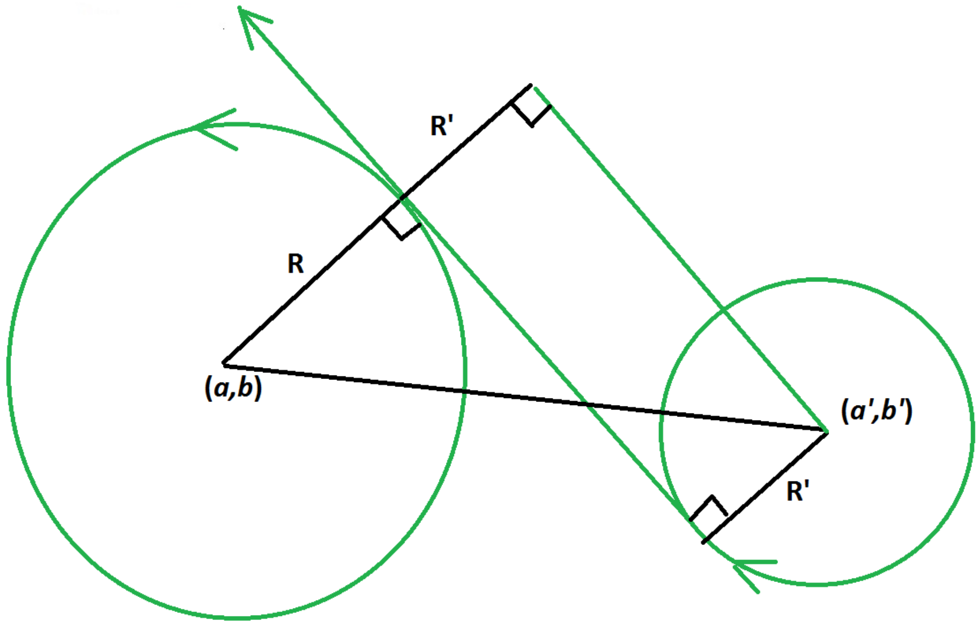
$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14}$$



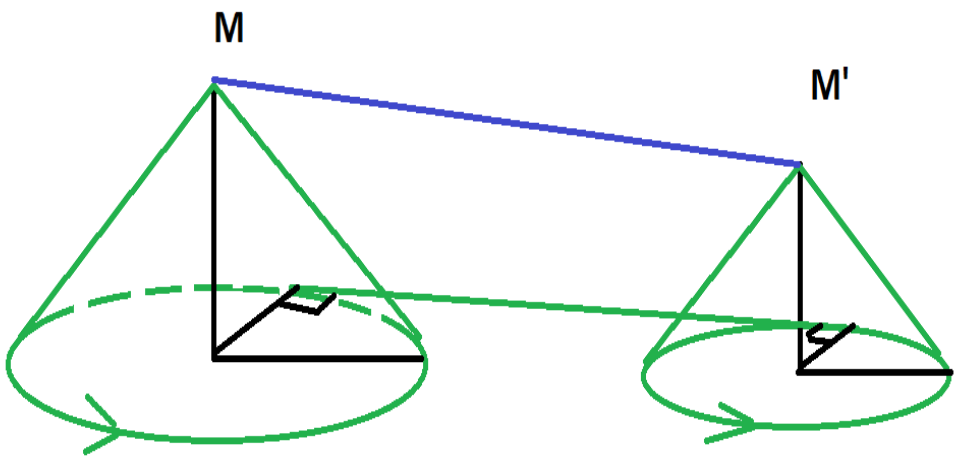


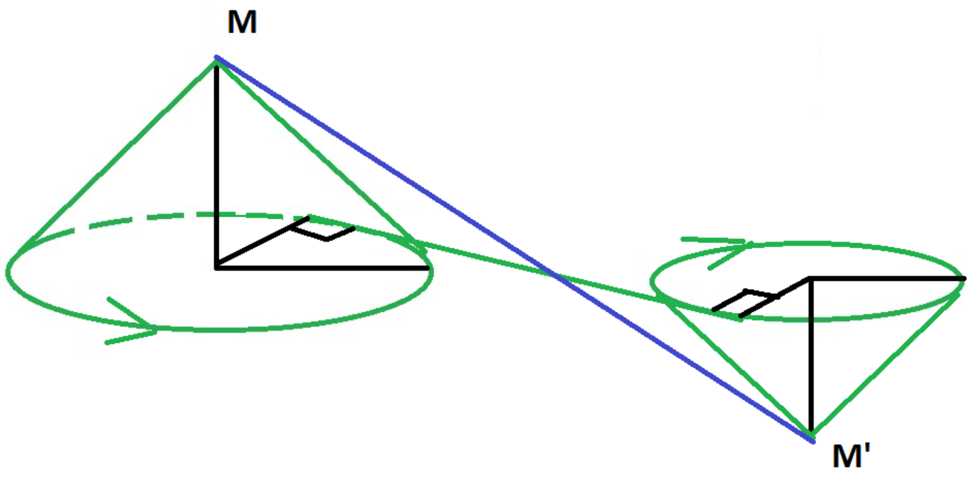
$$MM'^2 = (a-a')^2 + (b-b')^2 - (R-R')^2$$



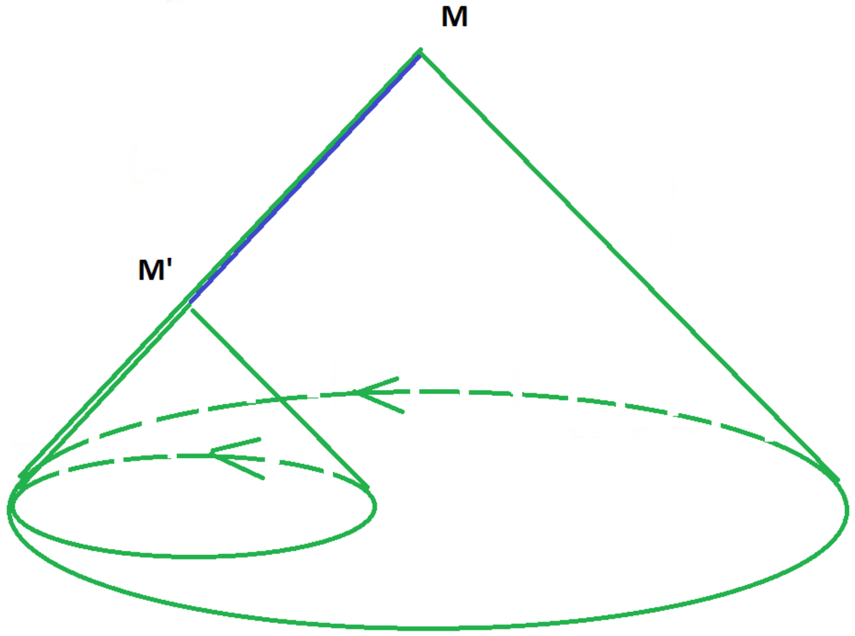


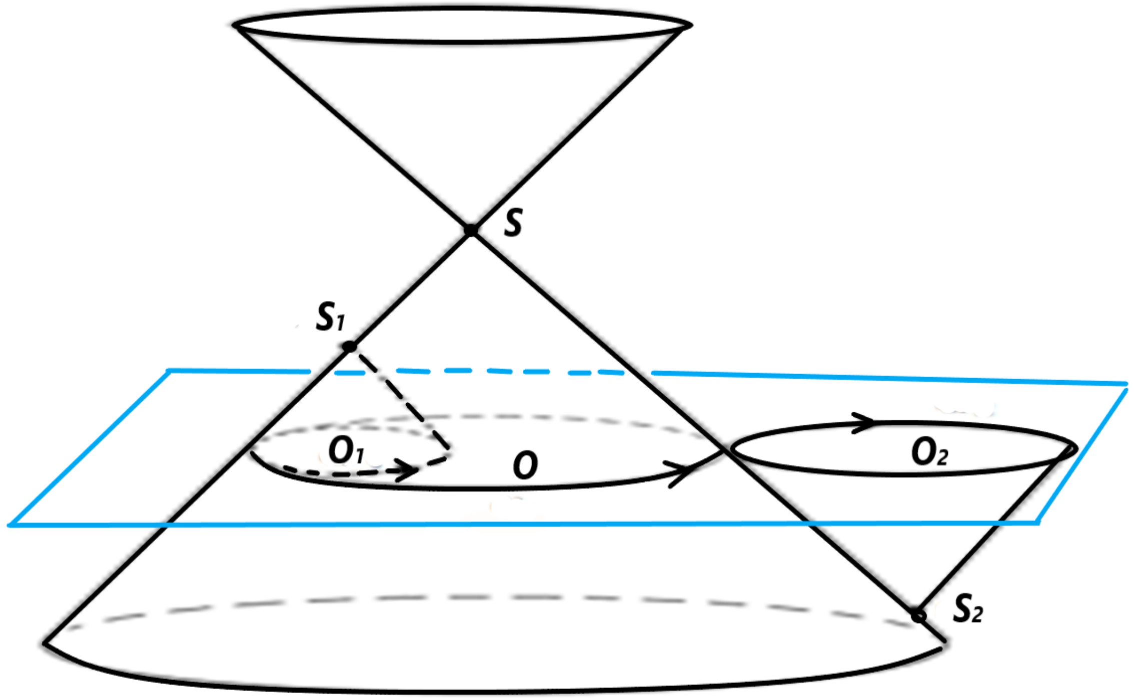
Изотропная проекция



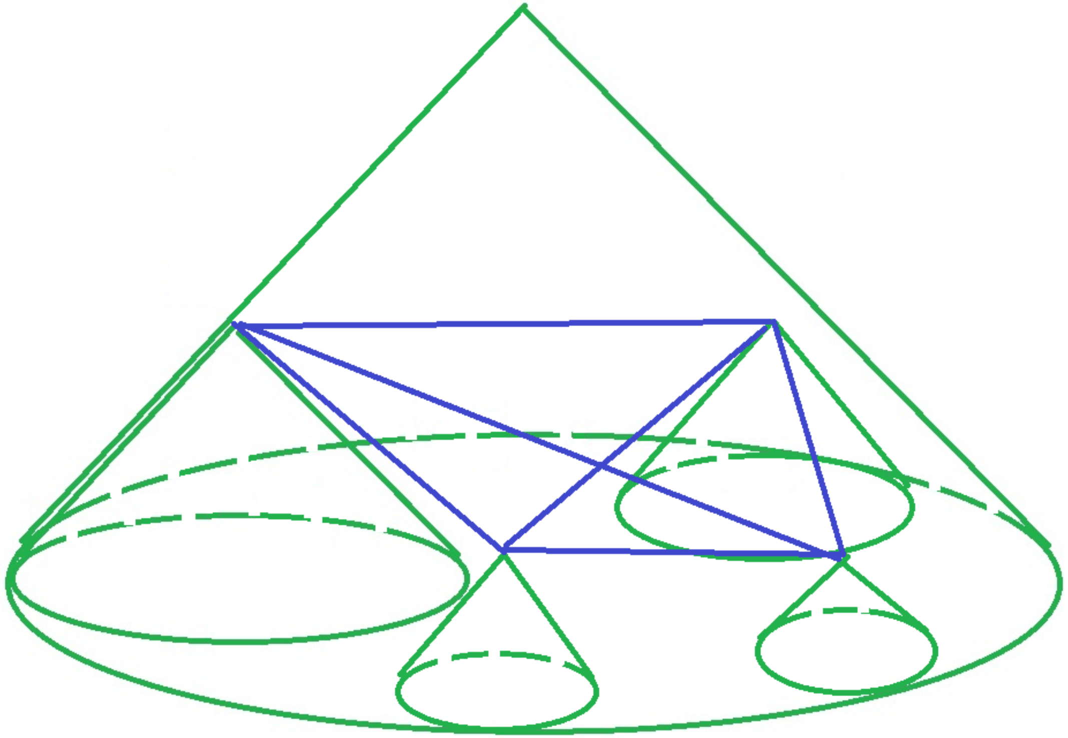


Касание циклов

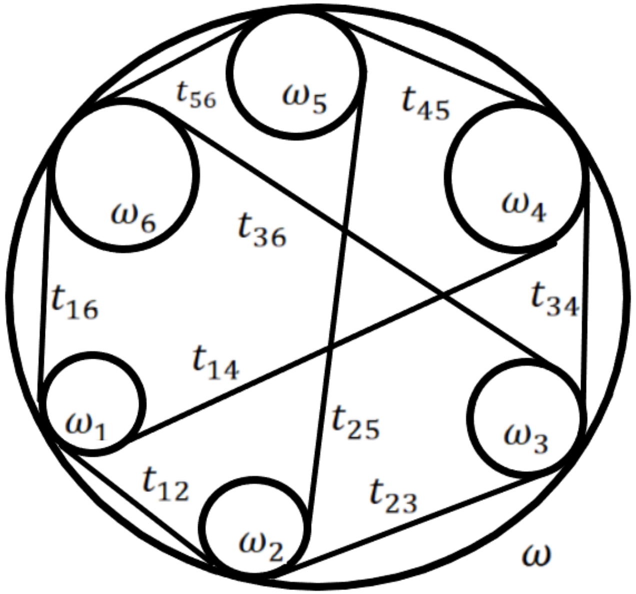


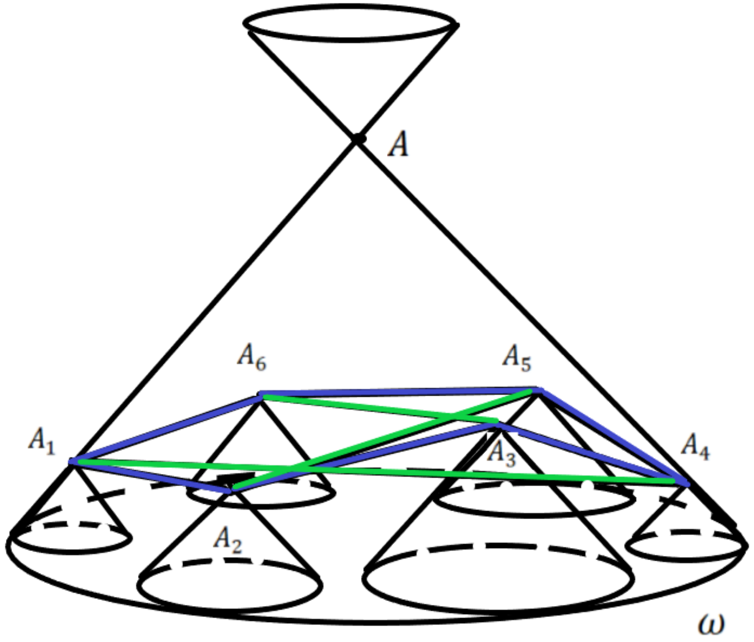


Интерпретация евклидовой теоремы Кейси

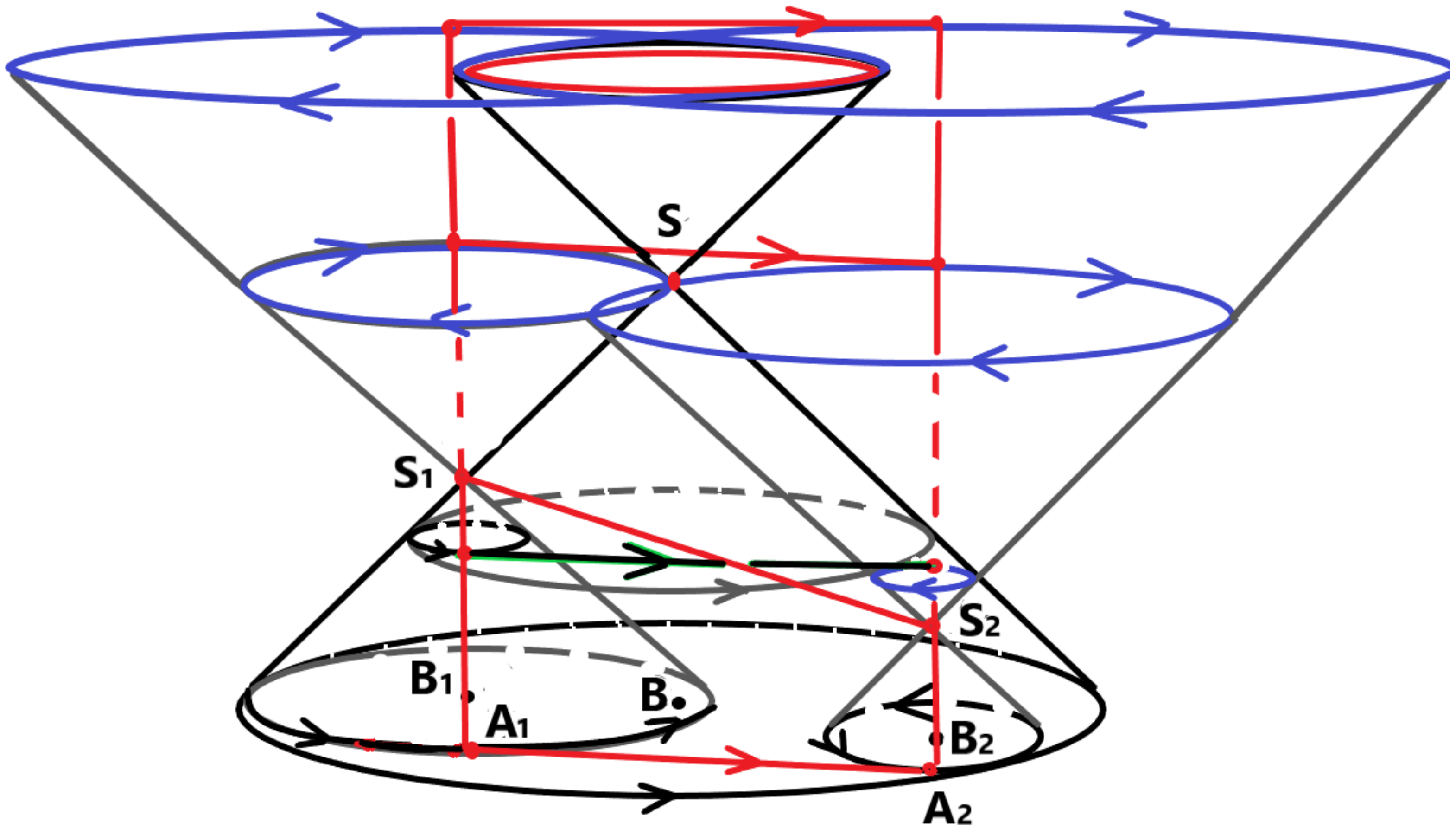


Теорема Кейси-Фурмана

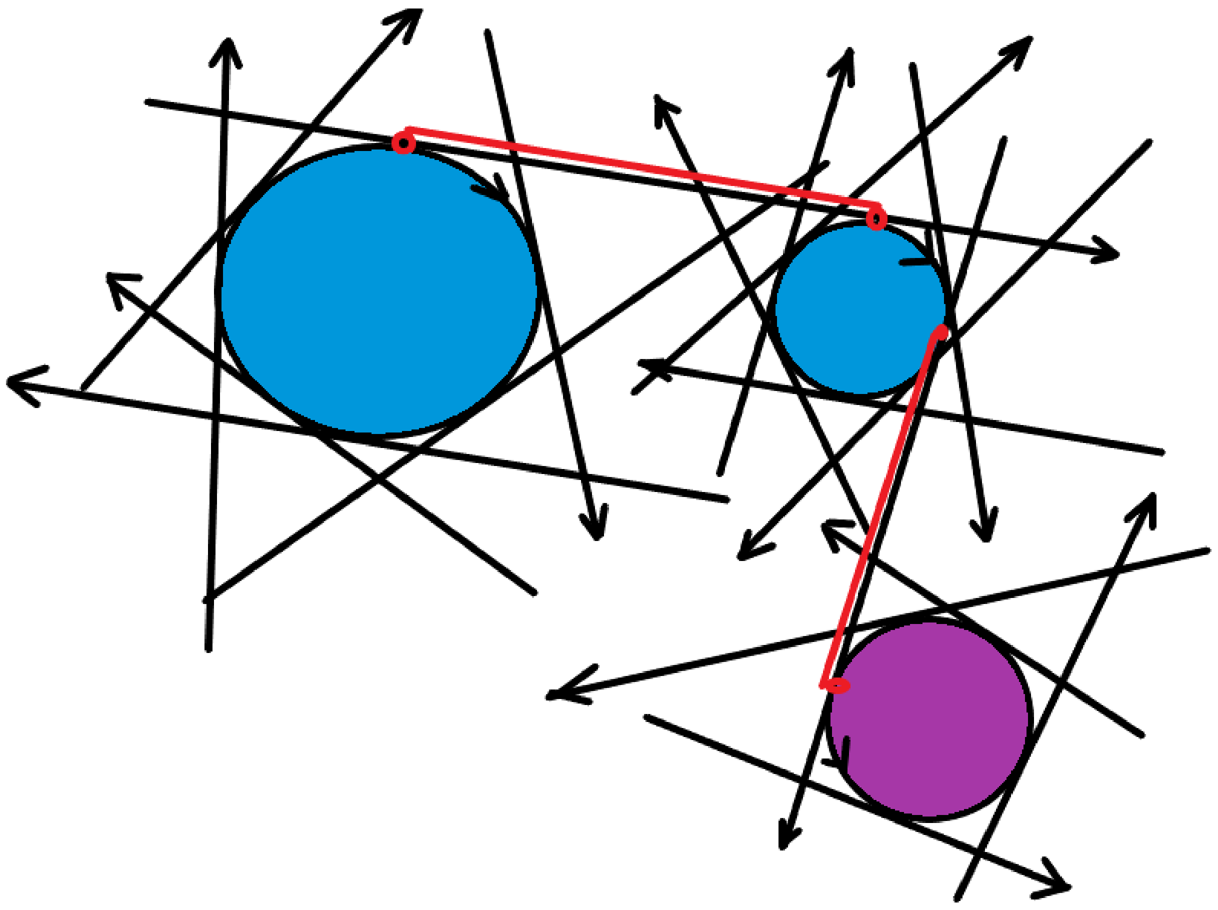




Способы касания и «касательные расстояния»



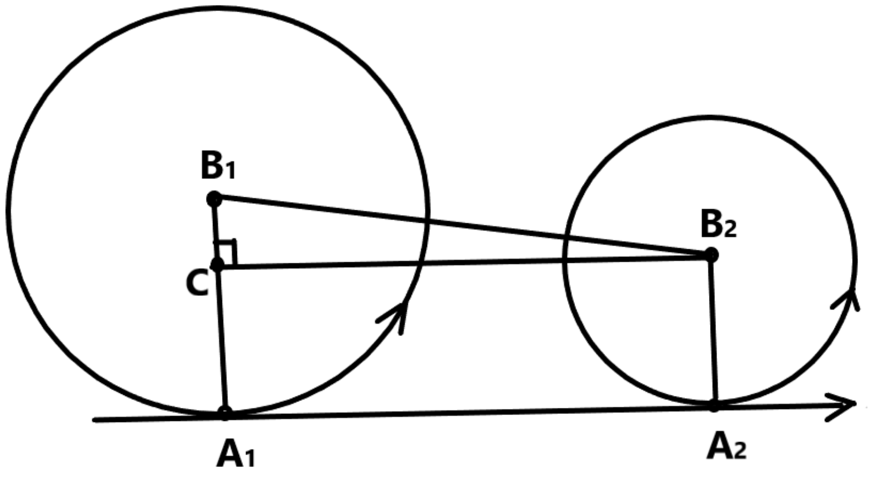
Преобразования Лагерра



Центры, радиусы, касательные (псевдо)евклидовы расстояния

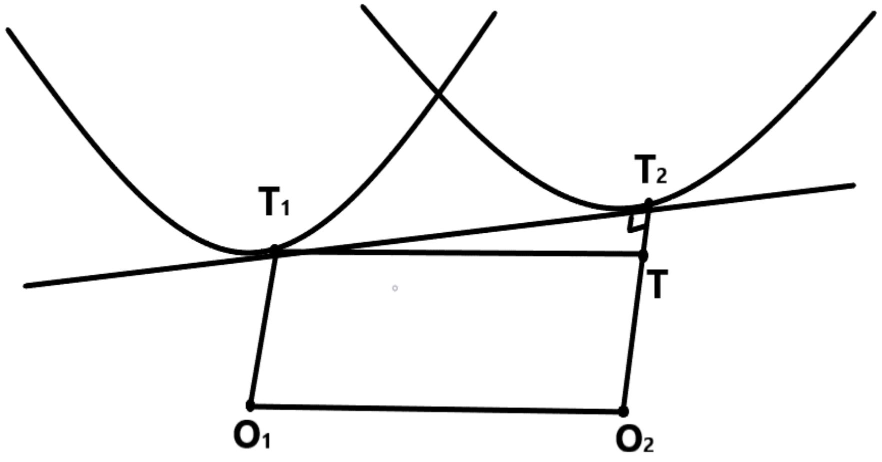
$$\boldsymbol{B_j(a_j, b_j), R_j = c_j}$$

$$(A_1A_2)^2 = (B_1B_2)^2 - (CB_1)^2 =$$
$$= (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (c_1 - c_2)^2$$

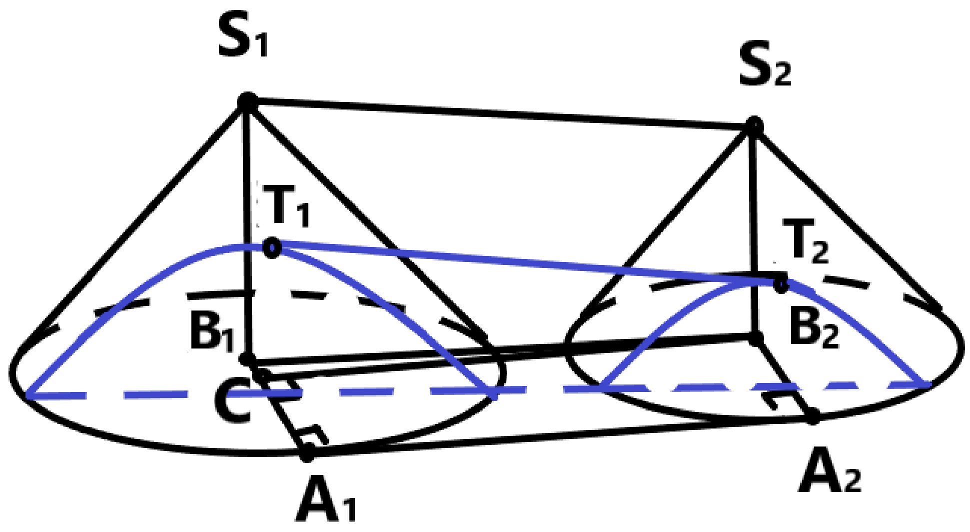


$O_j(a_j, c_j), b_j = O_jT_j$. **(** $\boldsymbol{R_j = b_j} \cdot i$ **)**

$$(T_1T_2)^2 = (T_1T)^2 + (TT_2)^2 =$$
$$= (a_1 - a_2)^2 - (c_1 - c_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$

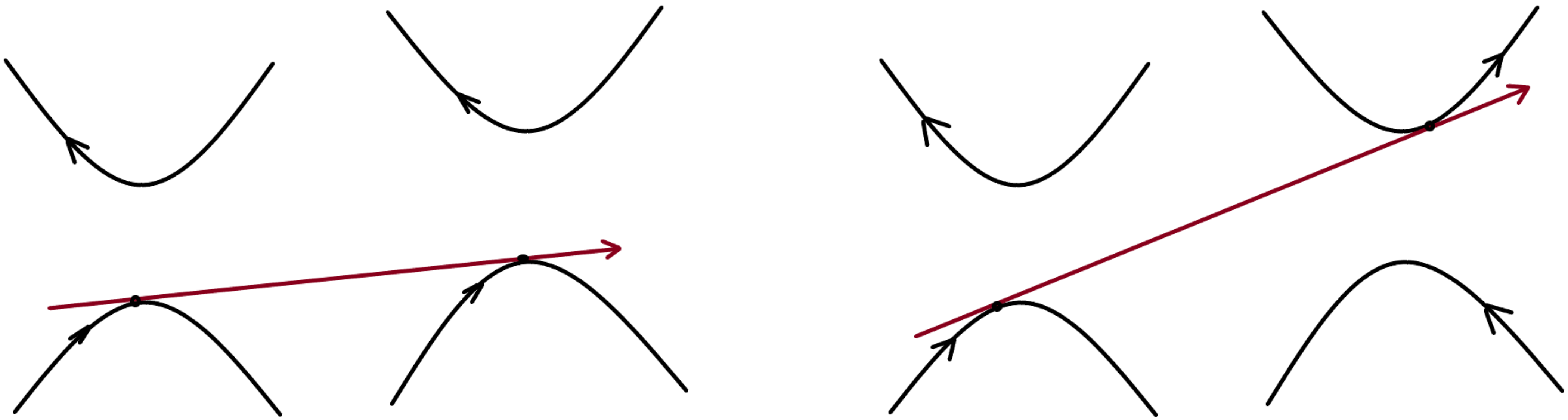


Изотропная проекция



Касательное расстояние

Одинаковая ориентация **Разная ориентация**



Псевдоевклидов аналог теоремы Кейси-Фурмана

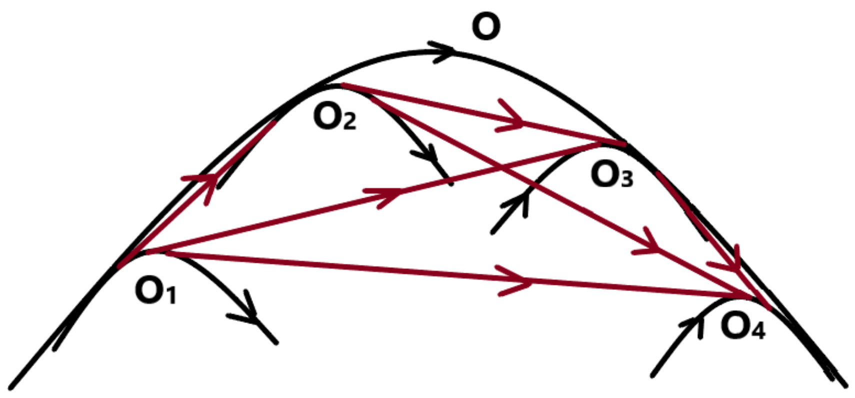
- **Теорема.** *Пусть на псевдоевклидовой плоскости окружности* $\boldsymbol{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6}$ *мнимого радиуса касаются в указанном порядке одной окружности* $\boldsymbol{O}$ *мнимого радиуса. Пусть* t_{ij} *– длина отрезка общей касательной окружностей* $\boldsymbol{O_i, O_j}$*, взятой с учетом ориентации окружностей. Тогда имеют место соотношения:*

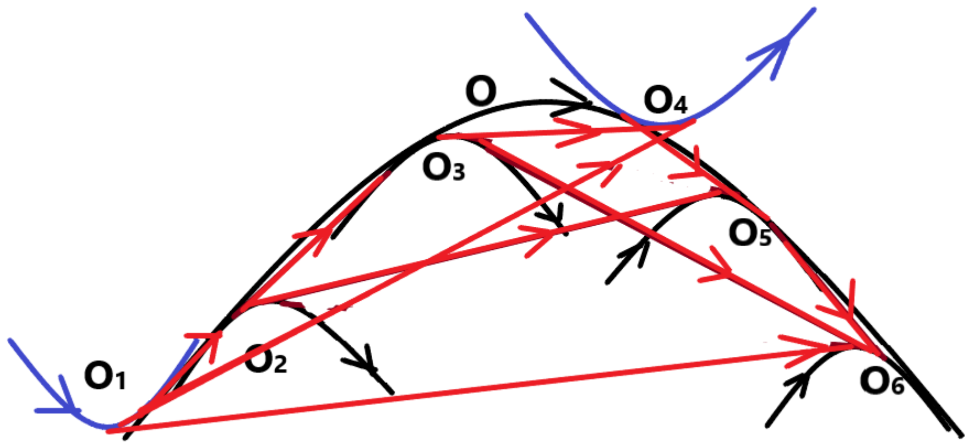
$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23};$$

и

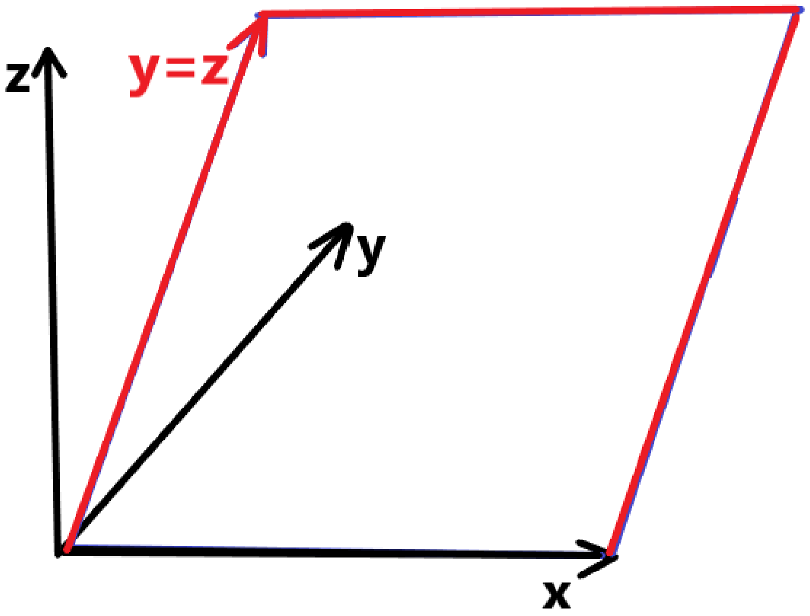
$$\boldsymbol{t}_{14} \cdot \boldsymbol{t}_{25} \cdot \boldsymbol{t}_{36} = t_{12} \cdot \boldsymbol{t}_{36} \cdot t_{45} + t_{34} \cdot \boldsymbol{t}_{25} \cdot t_{16} + t_{23} \cdot \boldsymbol{t}_{14} \cdot t_{56} + t_{12} \cdot t_{34} \cdot t_{56} + t_{23} \cdot t_{45} \cdot t_{16}$$

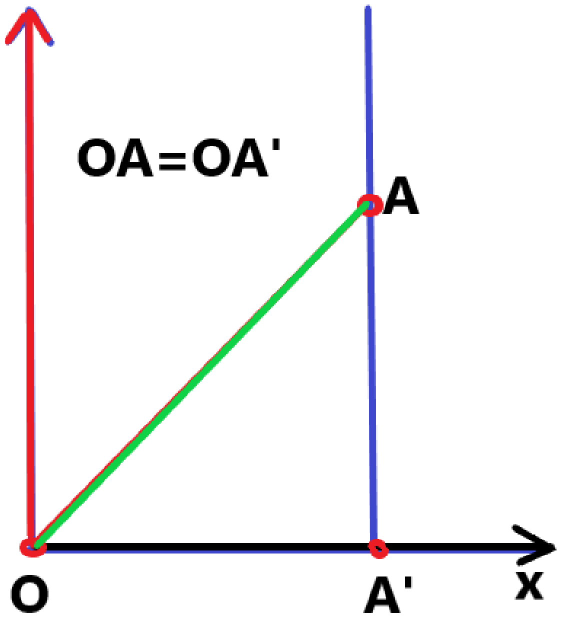
Псевдоевклидовы аналоги теоремы Кейси



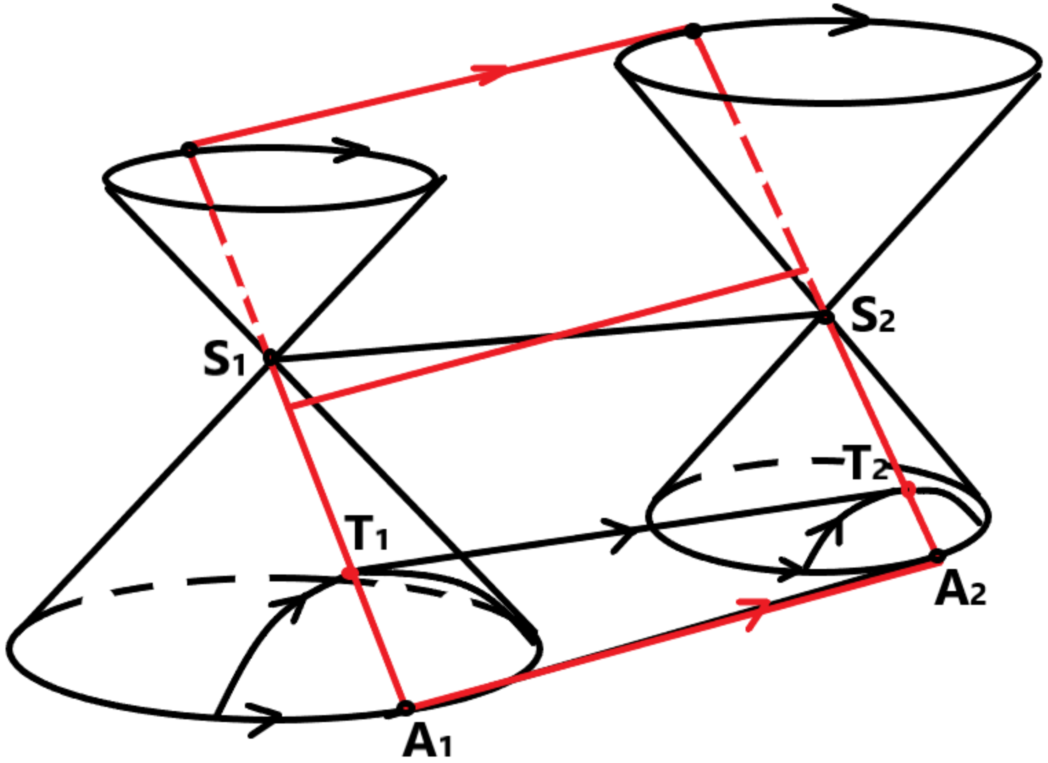


$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2, ds^2 = dx^2 - dz^2, ds^2 = dx^2$$





Лемма. *Пусть в псевдоевклидовом пространстве зафиксированы два изотропных конуса, и плоскости пересекают конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям. Тогда длины общих касательных пар окружностей (при соответствующем выборе этих касательных) будут равны.*



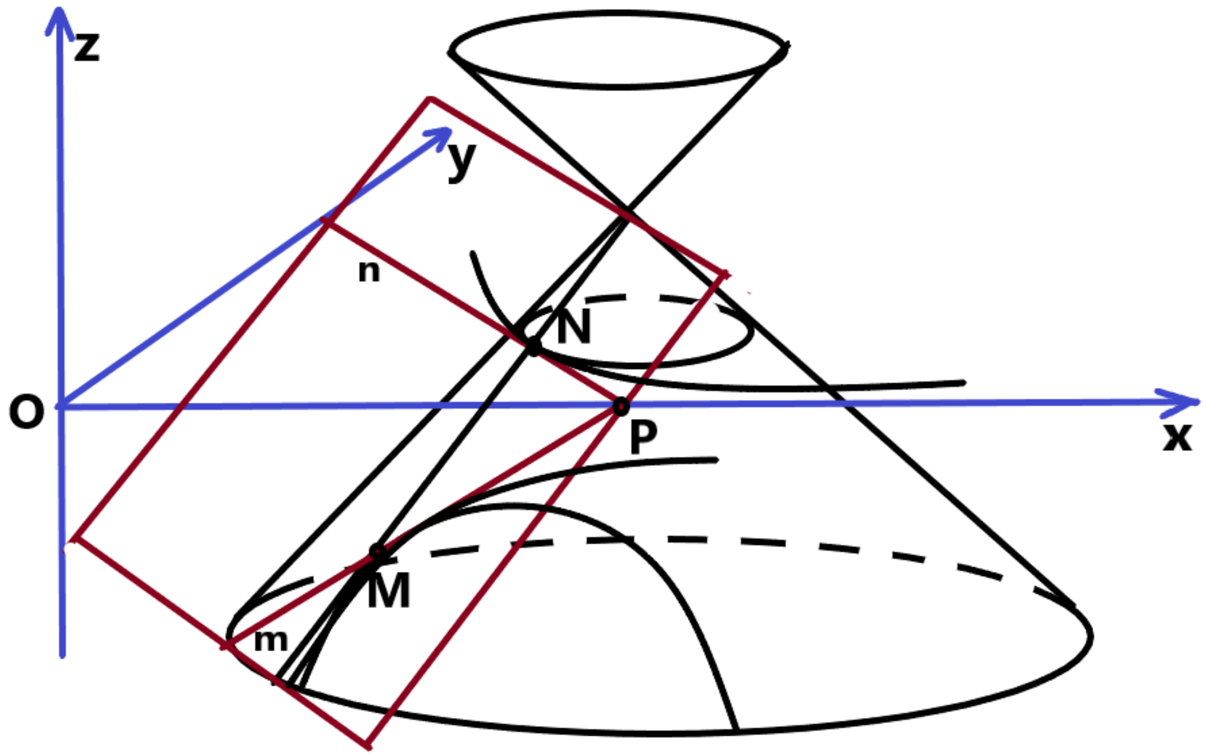
Преобразования Лагерра на (псевдо)евклидовой плоскости

- На единичной окружности $\begin{cases} x = \cos(u^1), \\ y = \sin(u^1) \end{cases}$
- Рассматриваются векторные поля $\frac{d}{du^1}, \cos(u^1)\frac{d}{du^1}, \sin(u^1)\frac{d}{du^1}$.
- Строятся их полные (1-3) и вертикальные (4-6) лифты в касательное расслоение окружности
- $V_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, V_2 = \cos(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} - u^2\sin(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2},$
- $V_3 = \sin(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2\cos(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2},$
- $V_4 = \frac{\partial}{\partial u^2}, V_5 = \cos(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2}, V_6 = \sin(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2}$.
- Ориентированная прямая, имеющая направление
- $\vec{e} = (\cos(u^1), \sin(u^1)),$
- м.б. задана нормальным уравнением $\boldsymbol{-x\sin(u^1) + y\cos(u^1) - u^2 = 0}$.
- Если $\boldsymbol{a, b, c}$ фиксированы, и $-a\sin(u^1) + b\cos(u^1) - u^2 = c$, то семейство прямых огибает окружность с центром $(\boldsymbol{a, b})$ и радиусом $\boldsymbol{c}$. В переменных a, b, c операторы примут вид:
- $V_1 = -b\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial b}, V_2 = -c\frac{\partial}{\partial a} - a\frac{\partial}{\partial c}, \ V_3 = -c\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial c},$
- $V_4 = -\frac{\partial}{\partial c}, V_5 = \frac{\partial}{\partial b}, V_6 = -\frac{\partial}{\partial a}$.

- На мнимоединичной окружности $\begin{cases} x = \cosh(u^1), \\ z = \sinh(u^1) \end{cases}$
- Рассматриваются векторные поля $\frac{d}{du^1}, \cosh(u^1)\frac{d}{du^1}, \sinh(u^1)\frac{d}{du^1}$.
- $W_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, W_2 = \cosh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2\sinh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2},$
- $W_3 = \sinh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2\cosh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2},$
- $W_4 = \frac{\partial}{\partial u^2}, W_5 = \cosh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2}, W_6 = \sinh(u^1)\frac{\partial}{\partial u^2}$.
- Ориентированная прямая, имеющая направление
- $\vec{e} = (\cosh(u^1), \sinh(u^1))$:
- $\boldsymbol{-x\sinh(u^1) + z\cosh(u^1) - u^2 = 0}$.
- Если a, b, c фиксированы, и $-a\sinh(u^1) + c\cosh(u^1) - u^2 = b$, то семейство прямых огибает окружность с центром $(\boldsymbol{a, c})$ и радиусом $\boldsymbol{b} \cdot i$. В переменных a, b, c операторы примут вид:
- $W_1 = c\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial c}, W_2 = -b\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial c}, \ W_3 = c\frac{\partial}{\partial b} + b\frac{\partial}{\partial c},$
- $W_4 = \frac{\partial}{\partial b}, W_5 = \frac{\partial}{\partial c}, W_6 = -\frac{\partial}{\partial a}$.
- $\boldsymbol{W_1 = -V_2, \ W_2 = V_1, \ W_3 = -V_3, W_4 = V_5, W_5 = -V_4, W_6 = V_6}$.

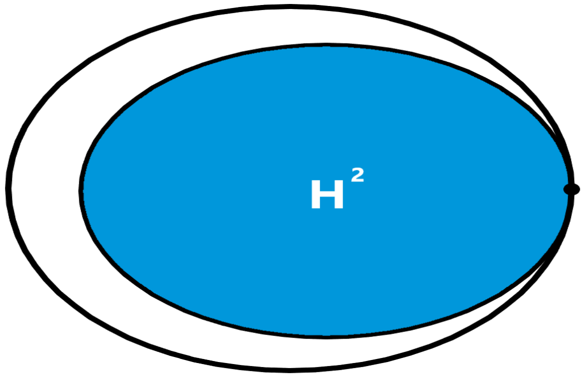
Трактрисы как орбиты преобразований с оператором гиперболических винтовых движений

$W_3 + \mu \cdot W_6$ NP=MP=const

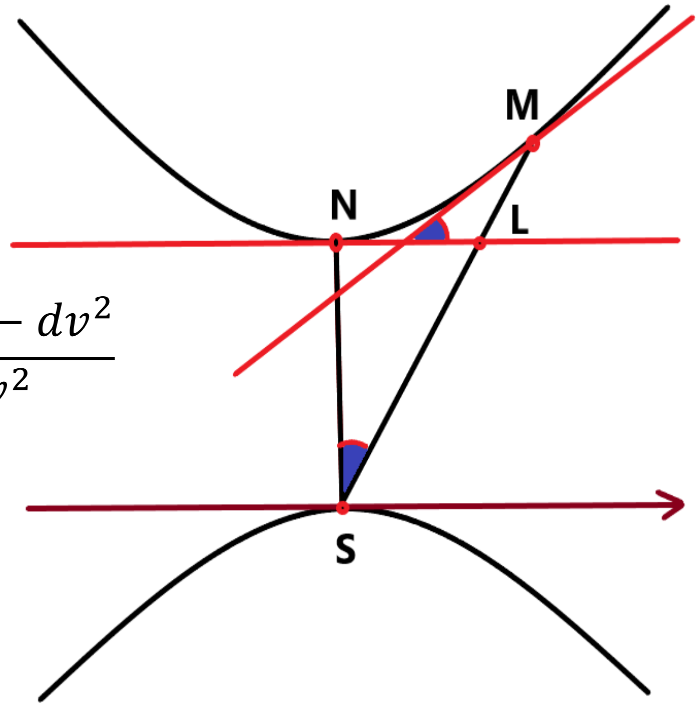


Преобразования с оператором изотропных винтовых движений $W_1 + W_2 + \mu \cdot (W_4 + W_5)$

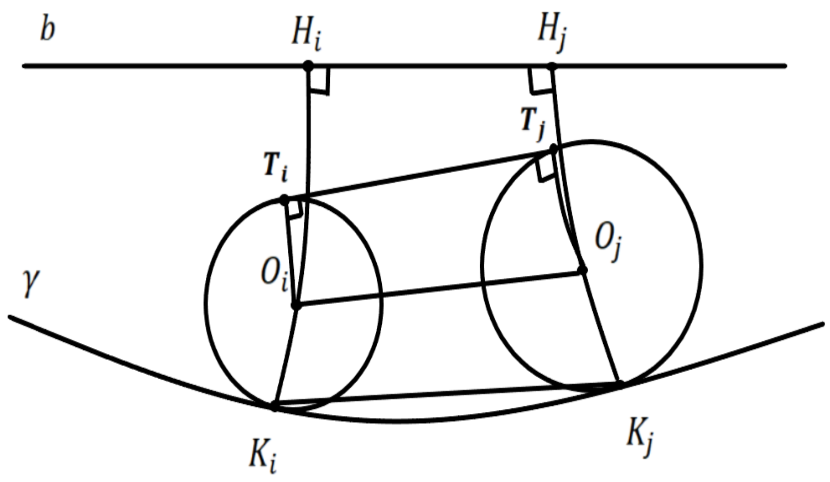
- Групповой параметр однопараметрической группы, индуцированной оператором группы винтовых движений с изотропной осью, можно интерпретировать как длину дуги орицикла идеальной области плоскости Лобачевского, локально несущей геометрию де Ситтера.

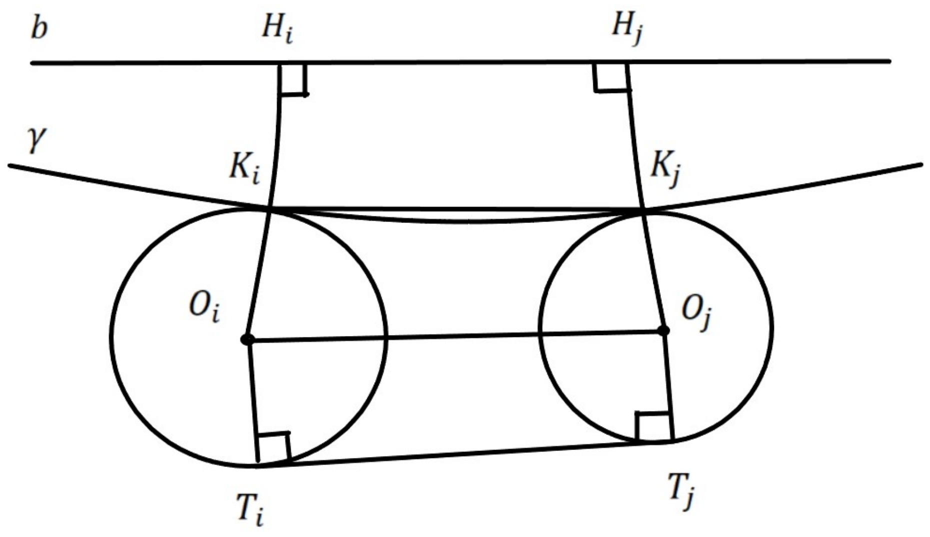


$$ds^2 = \frac{du^2 - dv^2}{v^2}$$

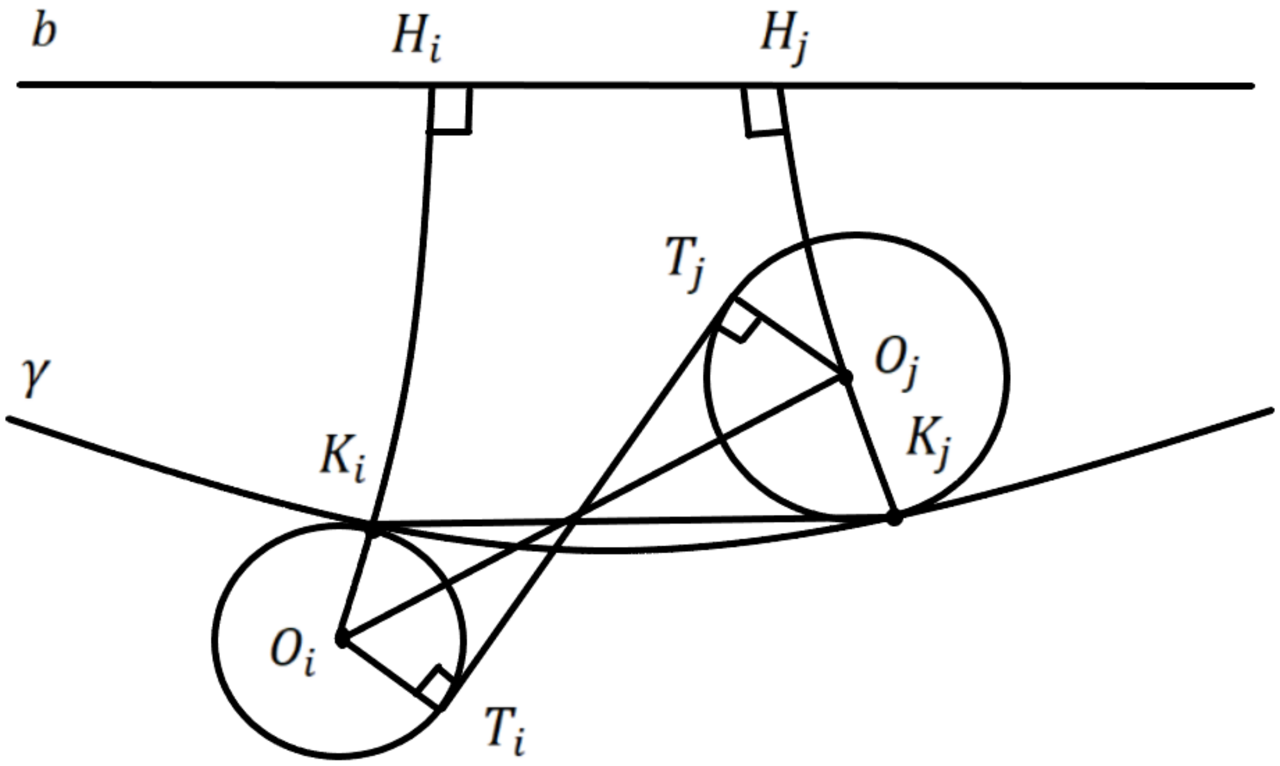


Обобщения гиперболического аналога теоремы Кейси. Однотипное касание ветви эквидистанты

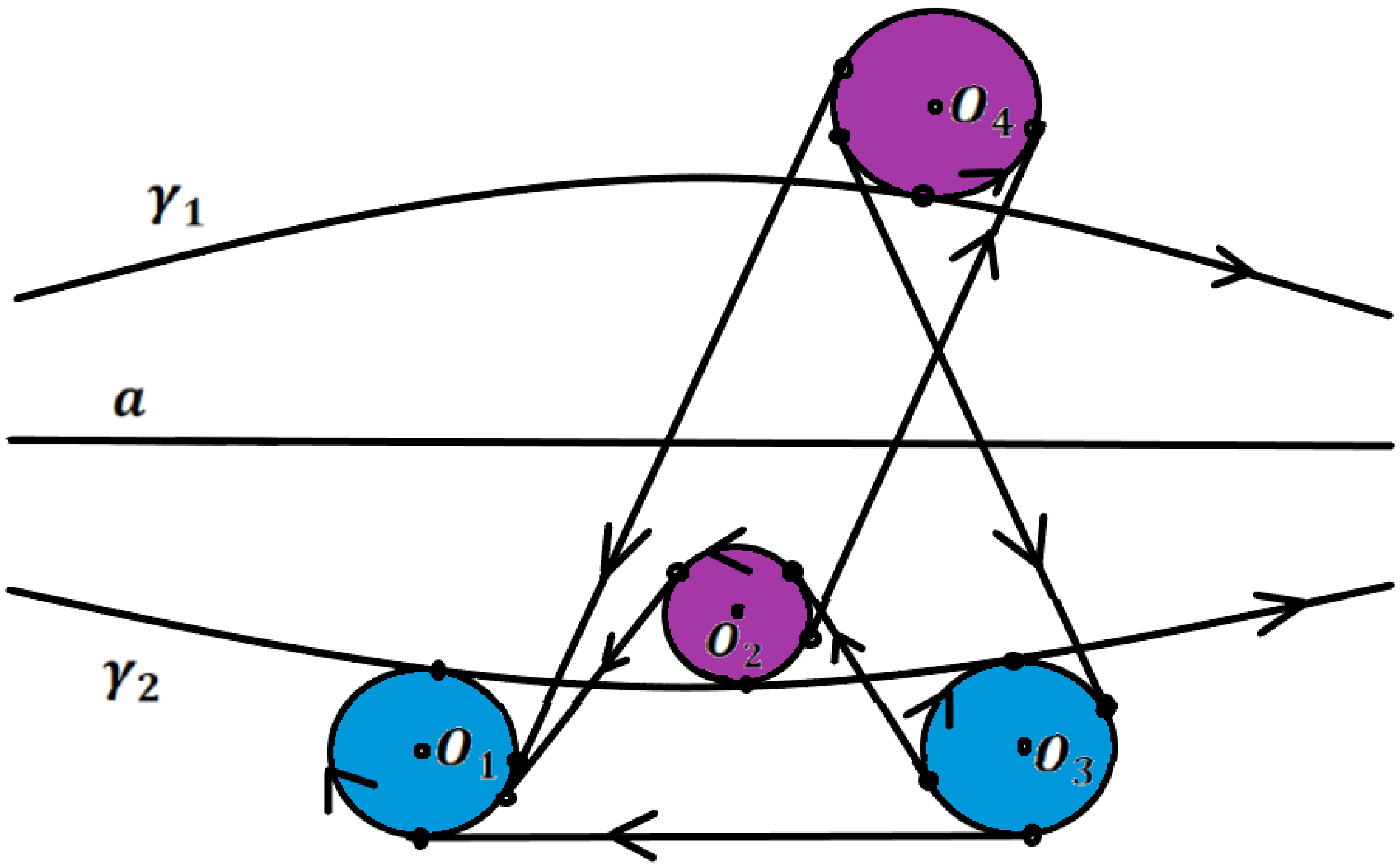




Внешнее и внутреннее касание эквидистанты

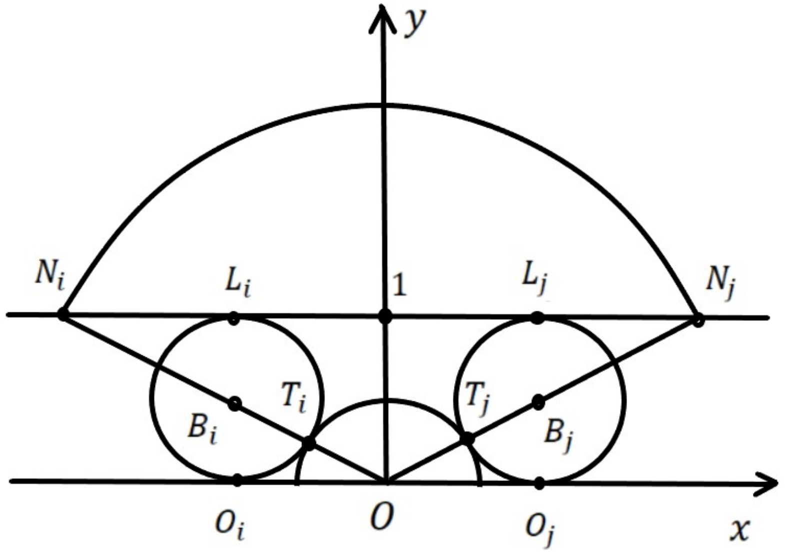


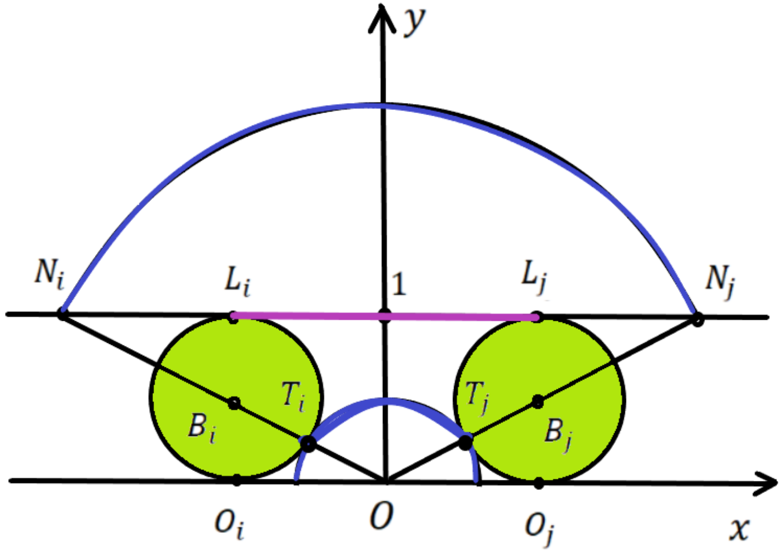
Касание двух ветвей эквидистанты



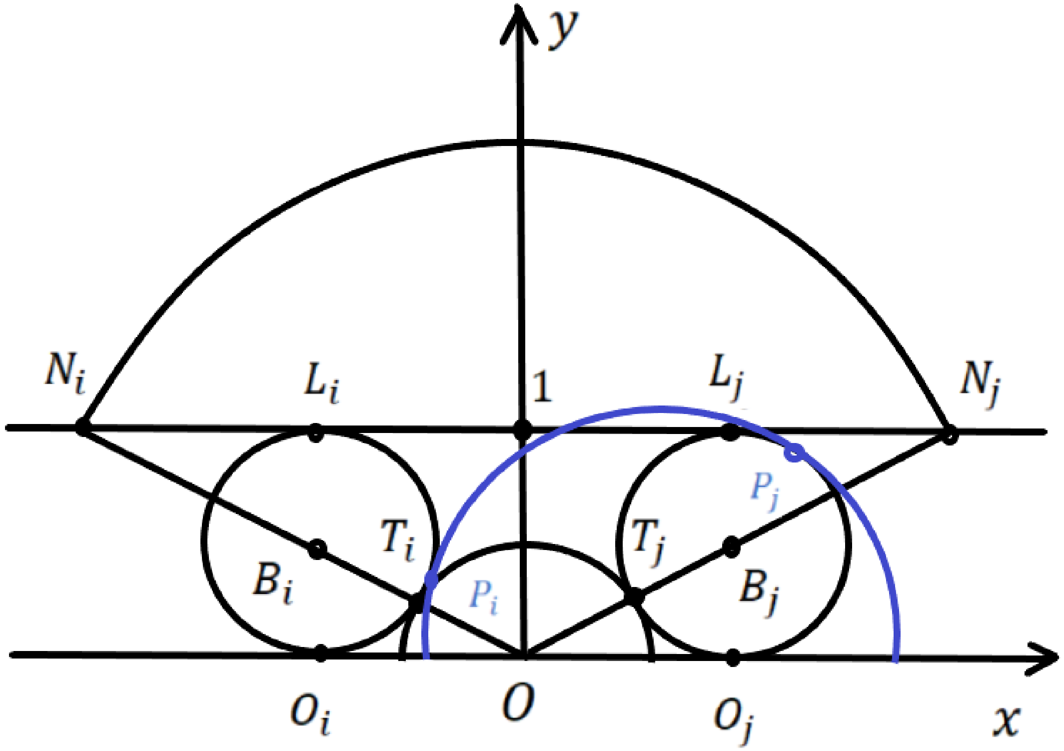
Связь геодезических и орициклических касательных

$$\overset{\smile}{L_iL_j} = sinh\frac{T_iT_j}{2}$$

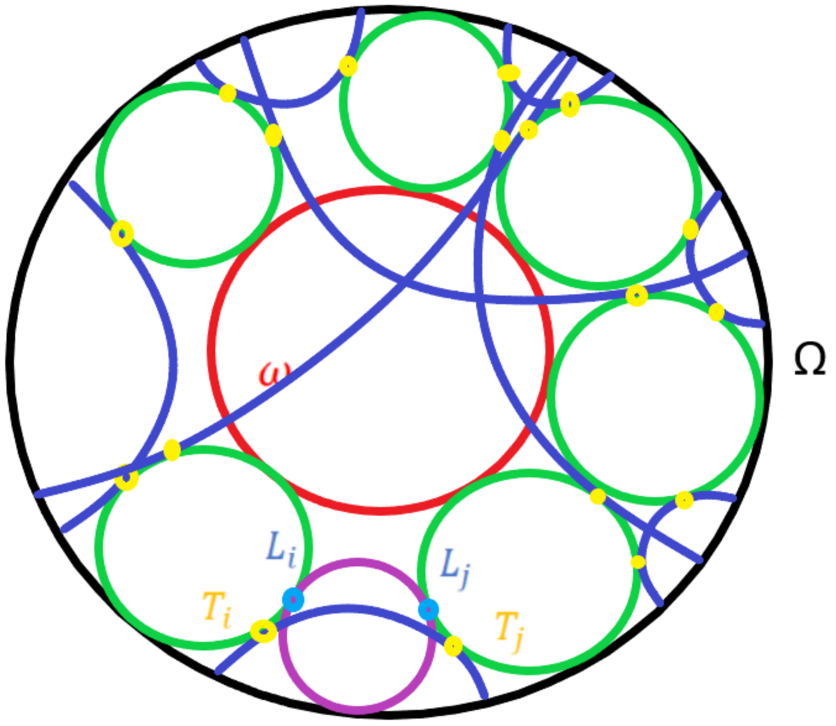




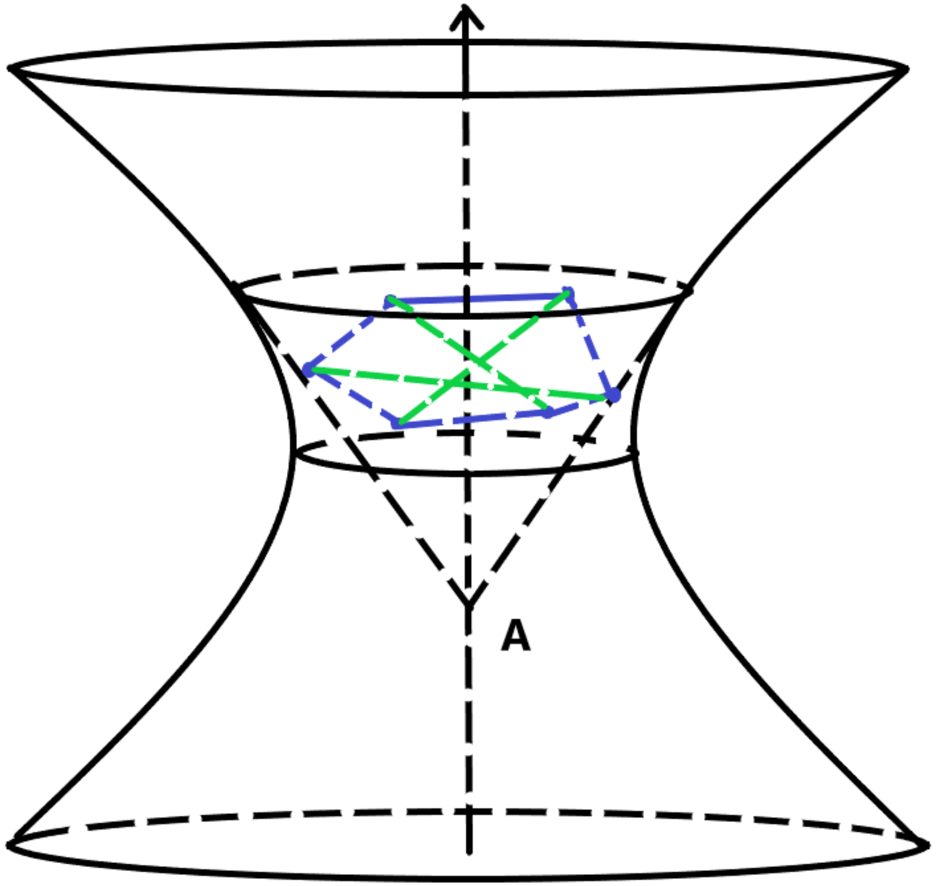
$$\widetilde{L_i L_j} = sinh\frac{T_i T_j}{2} = cosh\frac{P_i P_j}{2}$$



Теорема Кейси-Фурмана для орициклов



Гиперболический случай



Литература

- 1. *Kubota T.* On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry. *Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy*, 1912, vol. 2, p. 131–156.
- 2. *Широков П. А.* Этюды по геометрии Лобачевского. *Известия Физико-математического общества при КГУ , серия 2*, 1924, 24:1, С. 26–32.
- 3. *Ungar, A. A.* Ptolemy's theorem in the Relativistic Model of Analitic Hyperbolic geometry. *Symmetry*, 2023, 15:3, 649. DOI:10.3390/sym15030649
- 4. *Haantjes, J.* A characteristic local property of Geodesies in certain metric spaces. *Proc. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 1947, Vol. 50, pp. 496-–508.
- 5. *Gomez, M. Memoli, F.* The Four Point Condition: An Elementary Tropicalization of Ptolemy's Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 2024, 131:3, pp. 187–203.
- 6. *Casey, J.* A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. *Classic reprint, Forgotten Books, London*, 2012.
- 7. *Maehara H., Martini H.* Casey's Theorem.*In: Circles, Spheres and Spherical Geometry*. Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher. Birkhauser, Cham. 2024., pp.261–277.
- 8. *Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V.* Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii J. Math.*, 2018, Vol. 39, pp. 1–12.
- 9. *Абросимов Н. В., Микайылова Л. А.* Casey's theorem in hyperbolic geometry.*Сибирские электронные математические известия*, 2015, Т. 12, С. 354–360.
- 10. *Костин А. В.* Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского, *Сибирские электронные математические известия*, 2022, Т. 19, №. 2, С. 404–414. DOI: 10.33048/semi.2022.19.035.
- 11. *Костин А. В.* Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского , *Владикавказский математический журнал* , 2023, Т. 25, № 4, с. 58–67. DOI: 10.46698/d0031-4733-6473-n.
- 12. *Kostin, A. V.* On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Siberian Mathematical Journal*, 2024 Vol. 65, № 3, pp. 695–702. DOI: 10.1134/S0037446624030182.
- 13. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога , *Сибирские электронные математические известия*, 2016, Т. 13, С. 242–251.
- 14. *Maehara H., Martini H.* Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems, *Results Math.*, 2018, Vol. 74, Art. 47 .
- 15. *Bobenko, A. I., Lutz, C. O.R., Pottmann, H. and Techter, J.* , *Non-Euclidean Laguerre Geometry and Incircular Nets*, Springer, Cham, 2021. DOI:10.1007/978-3-030-81847-0_1
- 16. *Широков, А. П.* О группе Лагерра и ее аналогах в релятивной линейчатой геометрии плоскости, *Движения в обобщённых пространствах.,Рязанский гос. пед. институт, Рязань*, 1985, с. 25–30.
- 17. *Шустова, К. П. Преобразования Лагерра в псевдоевклидовом пространстве и геометрия Лобачевского* , Казань, Дисс. канд. ф.-м. наук, 1994.
- 18. *Костин А. В.* Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности. *Изв. вузов. Матем..*, 2021, 65:6, с. 25-–34. DOI:10.26907/0021-3446-2021-6-25-34
- 19. *Костин А. В.* Задача о тени и поверхности постоянной кривизны. *Сибирские электронные математические известия.*, 2023, 20:1, с. 150-–164. DOI:10.33048/semi.2023.20.014

Костин А.В.
Елабужский институт Казанского федерального университета

Спасибо за внимание!