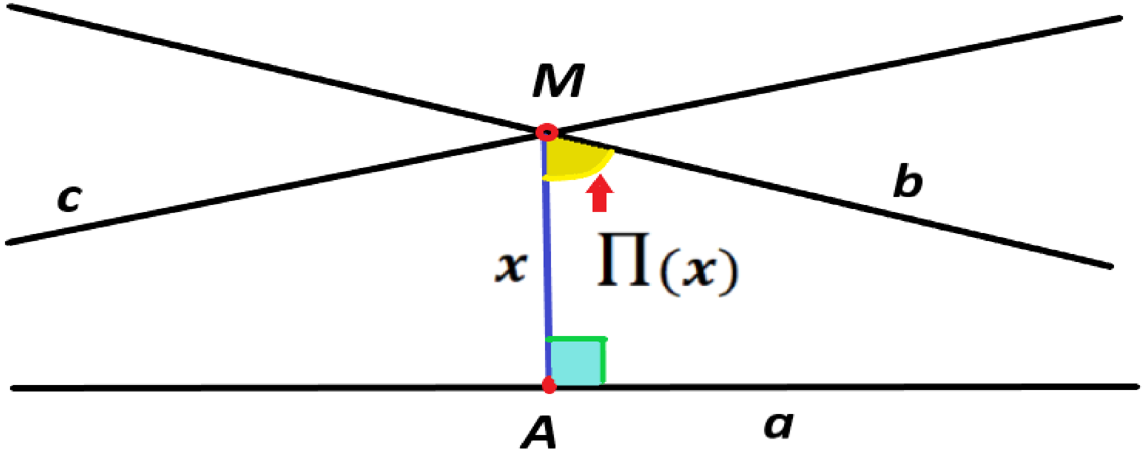
«Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности»

Семинар по Дискретной геометрии и геометрии чисел
под научным руководством Н.П.Долбилина, Н.Г.Мощевитина, М.Д.Ковалева

21.02.2023 Костин А.В.

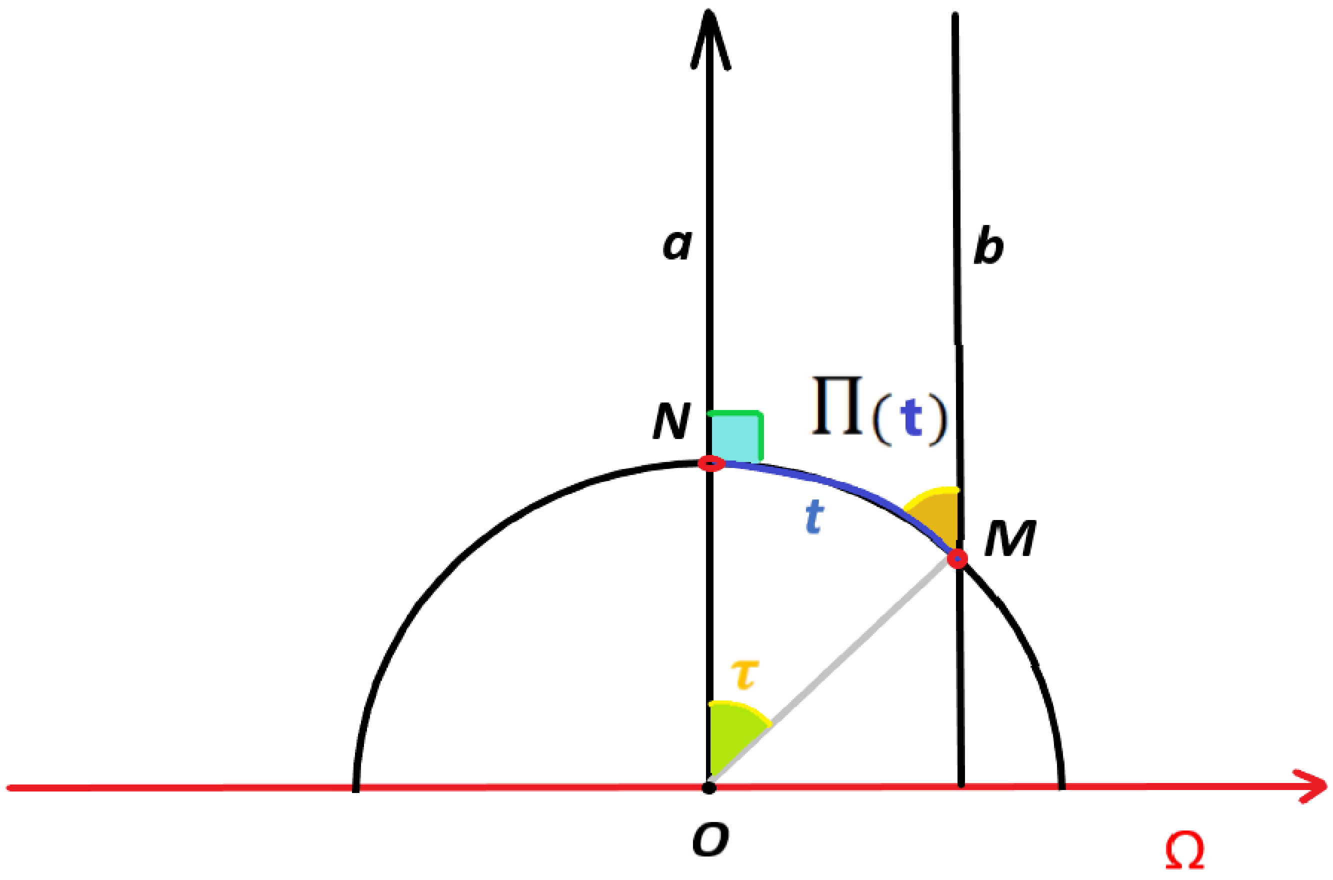
Угол параллельности

$$tg\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{R}}$$



$$\begin{cases} x = sin\tau \\ y = cos\tau \end{cases}, \ t = \int_0^{\tau} \frac{du}{\cos(u)} = gd^{-1}(\tau), \ \Pi(t) = \frac{\pi}{2} - \tau = \frac{\pi}{2} - gd(t),$$

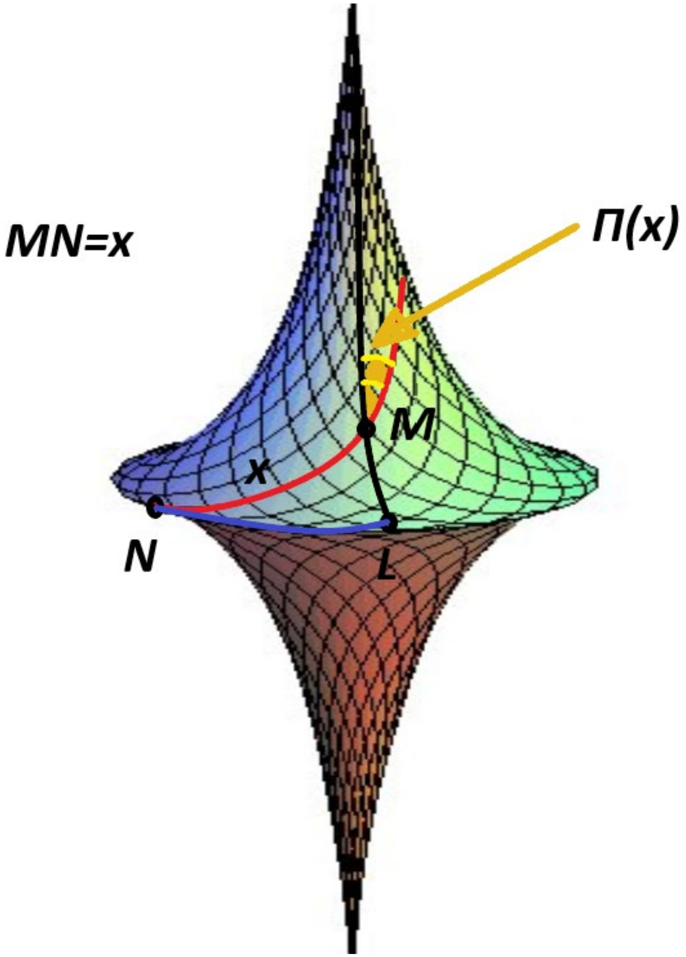
$$\boldsymbol{\tau} = \int_0^{\boldsymbol{t}} \frac{\boldsymbol{du}}{\mathbf{ch}(\boldsymbol{u})} = \boldsymbol{gd}(\boldsymbol{t}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(\mathrm{t})) = \arcsin(\operatorname{th}(\mathrm{t}))$$



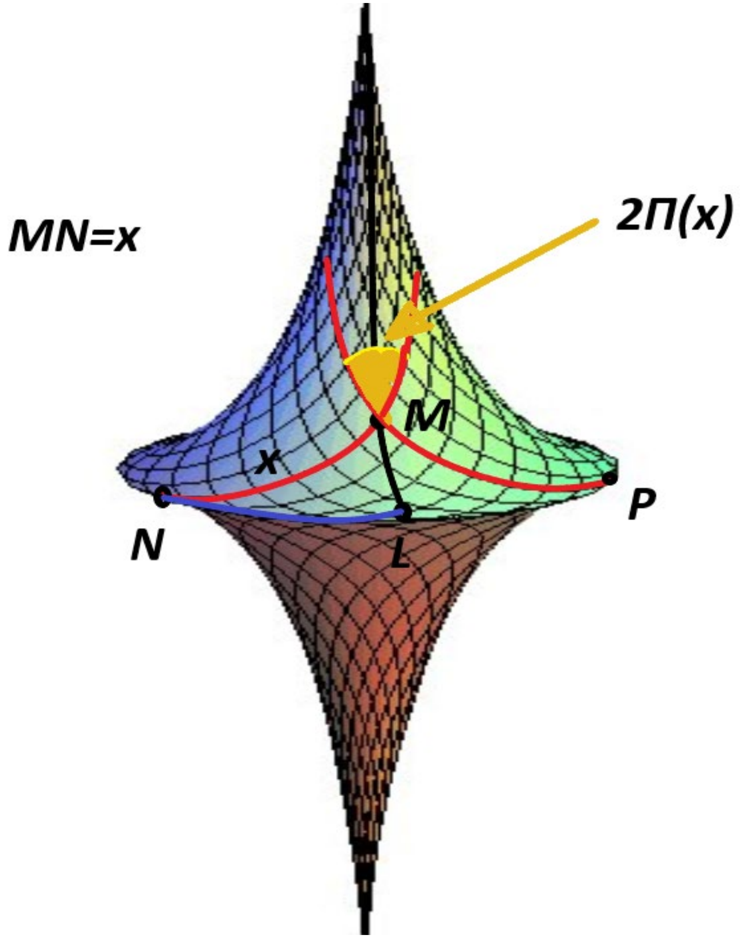
Угол между асимптотической линией и меридианом псевдосферы

- Пусть x - длина дуги от точки M на псевдосфере Бельтрами-Миндинга до ребра возврата. Тогда угол между асимптотической линией и меридианом псевдосферы в точке M равен углу параллельности П(x) длины дуги асимптотической (или равной ей длины дуги проекции асимптотической на ребро возврата).

Асимптотические на псевдосфере

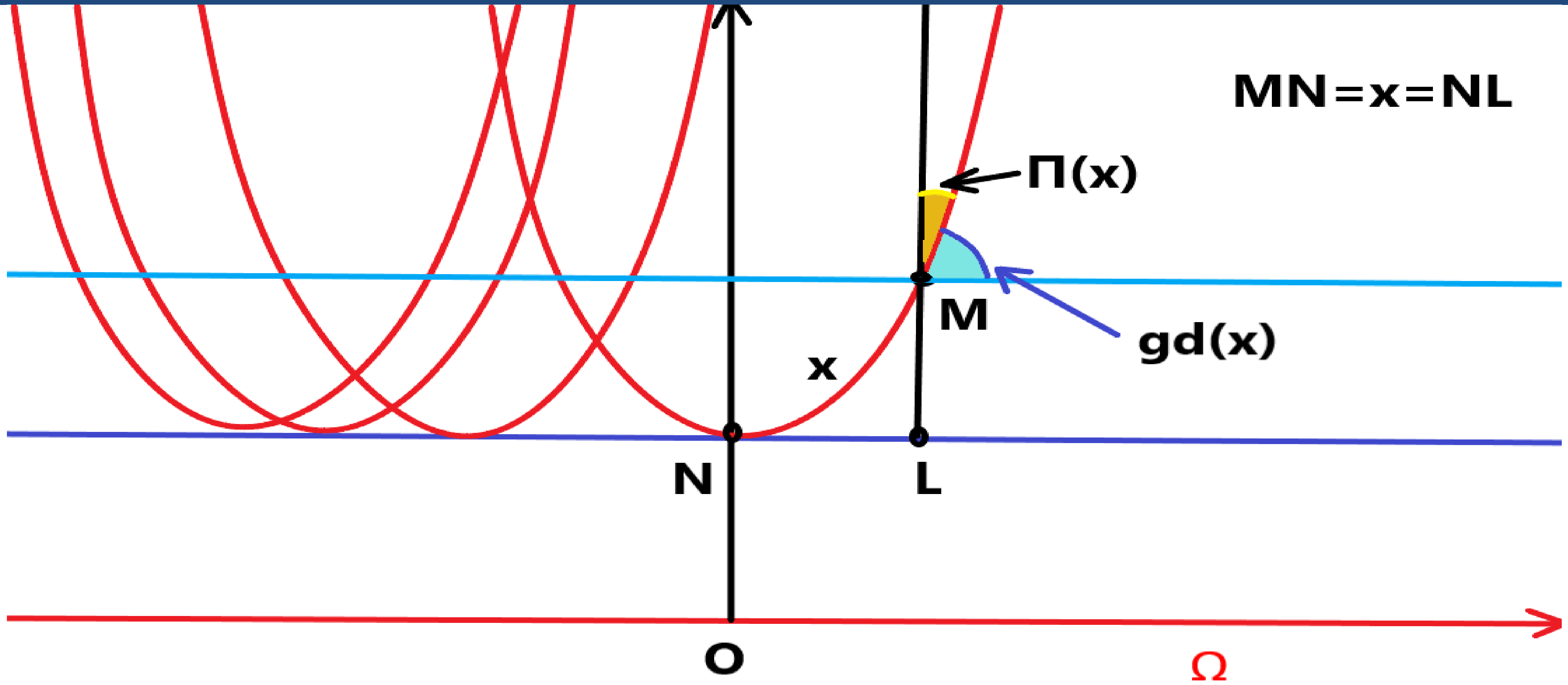


Сетевой угол на псевдосфере

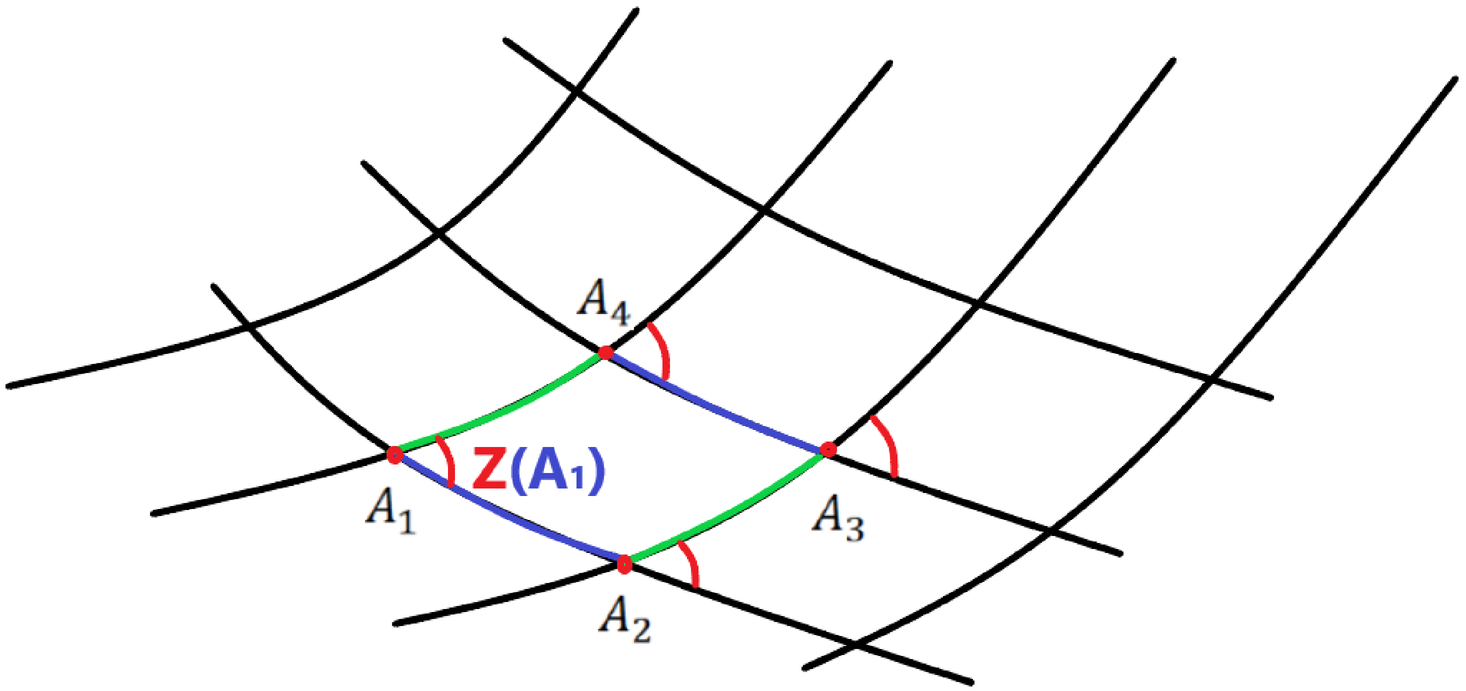


Асимптотические на псевдосфере в карте Пуанкаре

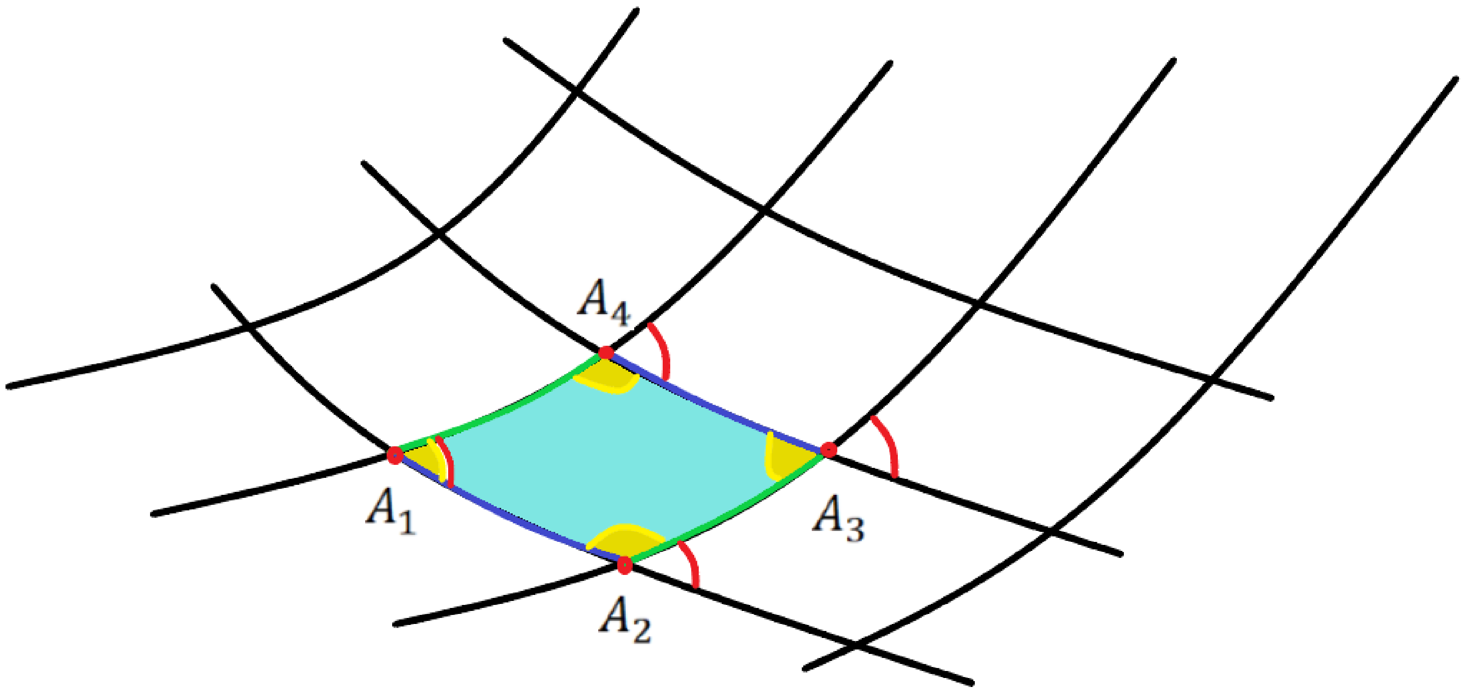
$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$



Чебышёвская сеть на псевдосферических поверхностях и уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin(z)$



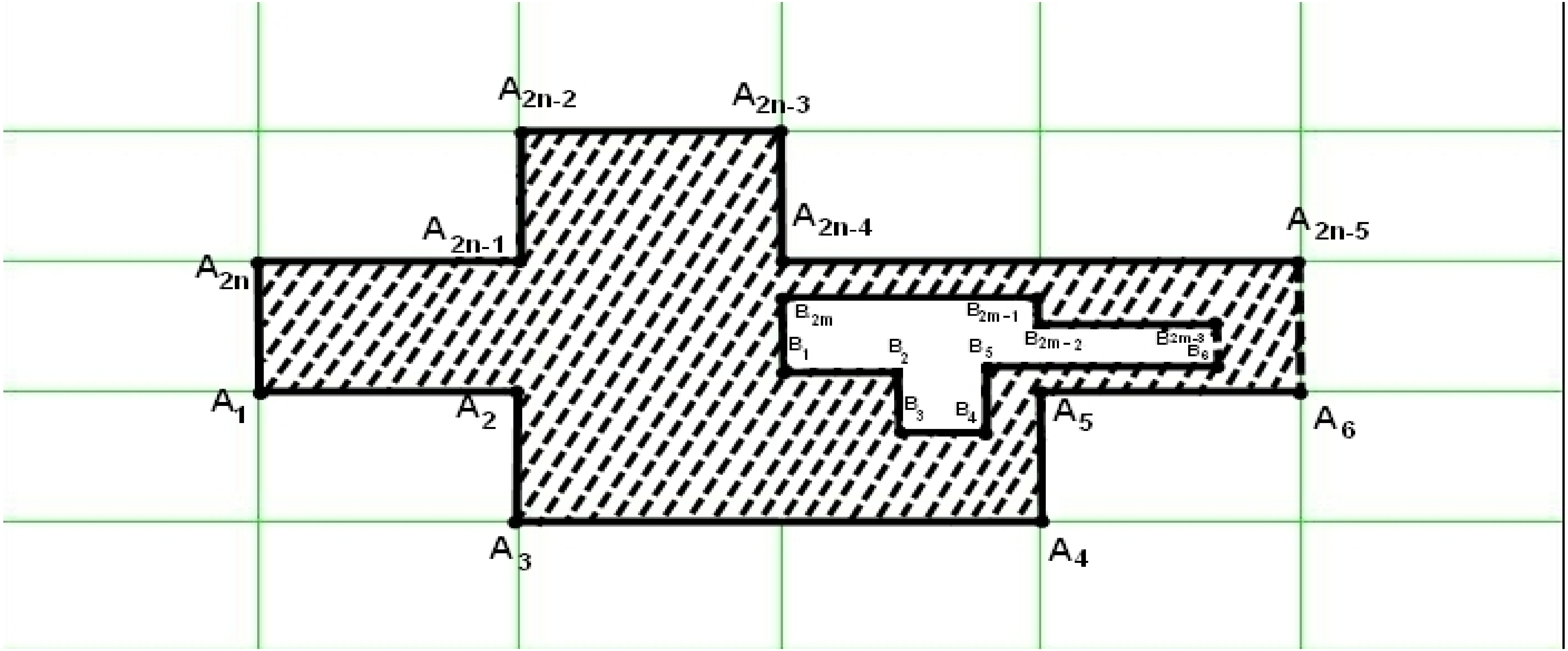
$S = Z(A_1) - Z(A_2) + Z(A_3) - Z(A_4) = \sum_{i=1}^{4} A_i - 2\pi$



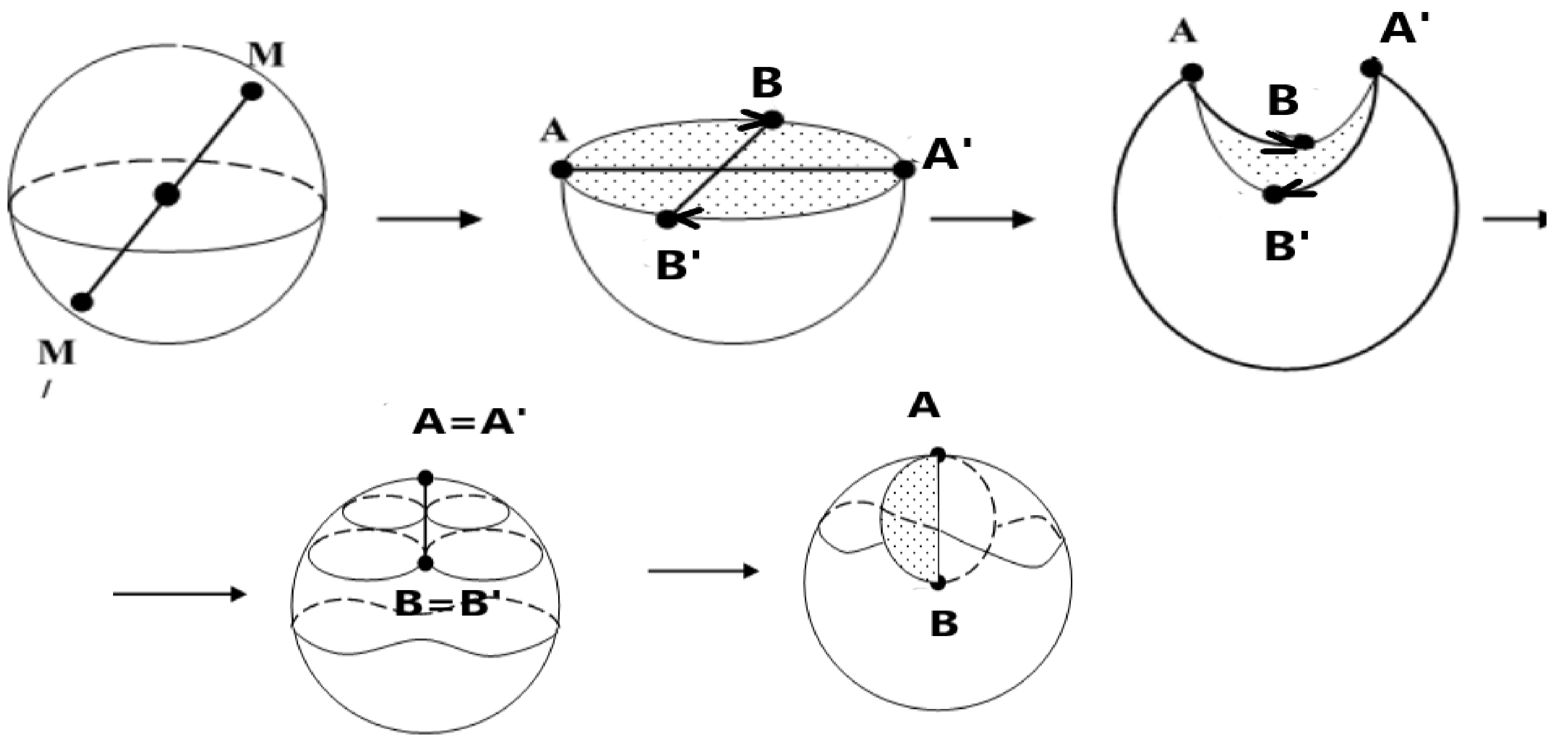
Обобщение формулы Хаццидакиса

- *Пусть F(x,y) – функция , непрерывная в области D. f(P_i)- функция, заданная на множестве сетевых многоугольников области D, такая, что на любом сетевом четырёхугольнике* $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_1), A_3(x_2, y_2), A_4(x_1, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,
- $f(A_1A_2A_3A_4) = F(A_1) - F(A_2) + F(A_3) - F(A_4)$.
- *Тогда для любого односвязного сетевого многоугольника* $P = A_1A_2 \ldots A_{2n-1}\,A_{2n}$ *, у которого вершина* $A_1(x_1, y_1)$ *является минимальным элементом при лексикографическом упорядочивании вершин:* $(A_1(x_1, y_1) < A_k(x_k, y_k),$ *если либо* $x_1 < x_k$, *либо* $x_1 = x_k, y_1 < y_k$), *или удалена от минимального элемента на «чётное расстояние»– чётное число рёбер при обходе границы, имеет место равенство:*
- $f(P) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\,F(A_k)$.

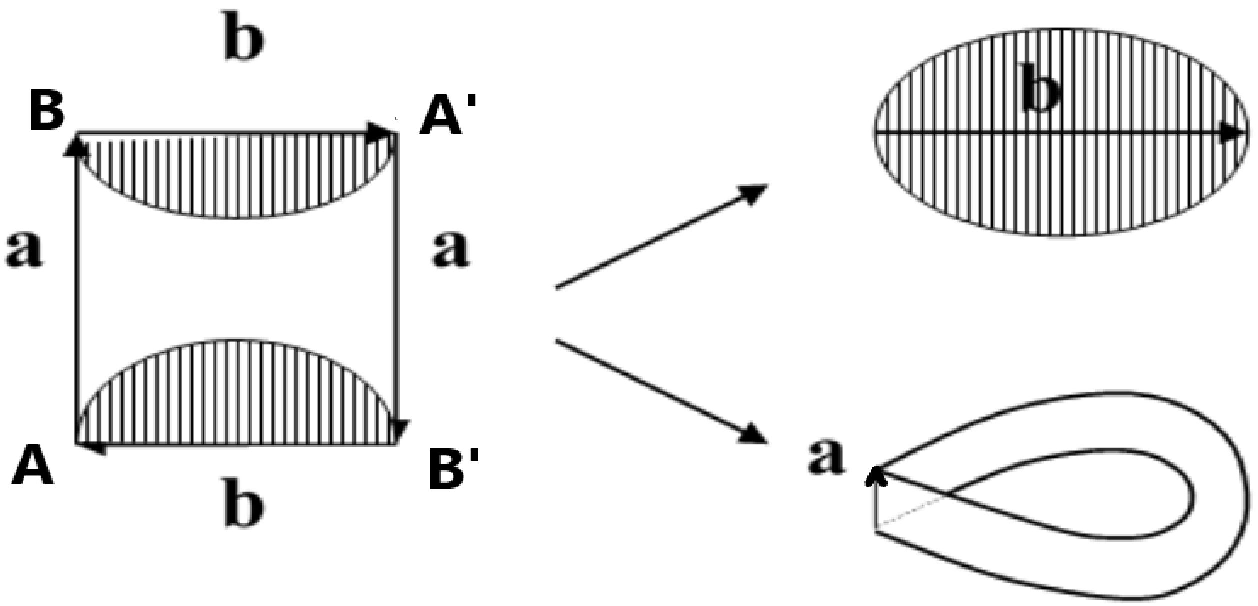
$$f(P) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} F(A_k) - \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} F(B_k).$$



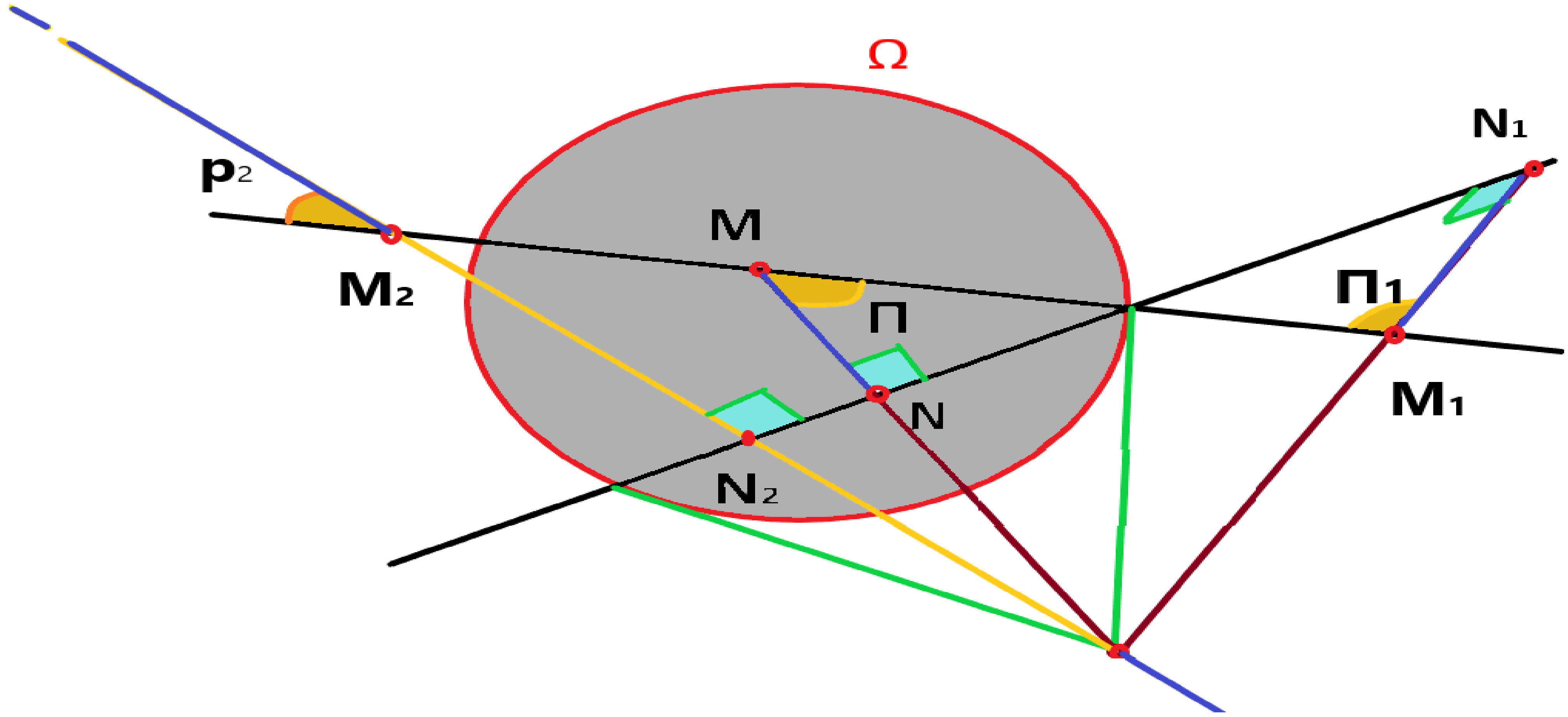
Проективная плоскость



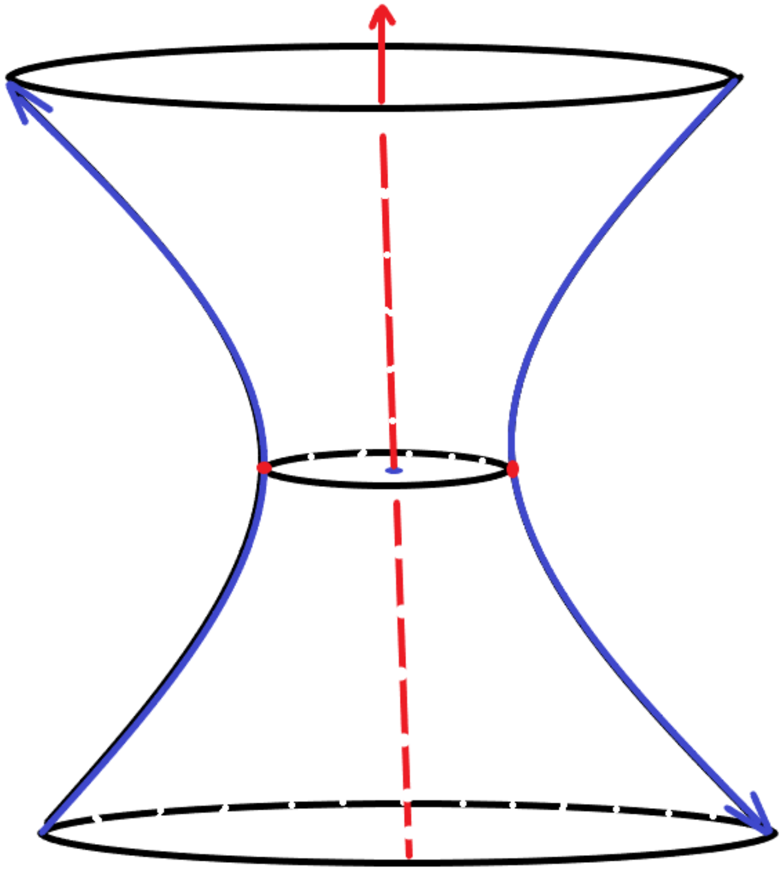
RP^2= диск +лист Мёбиуса



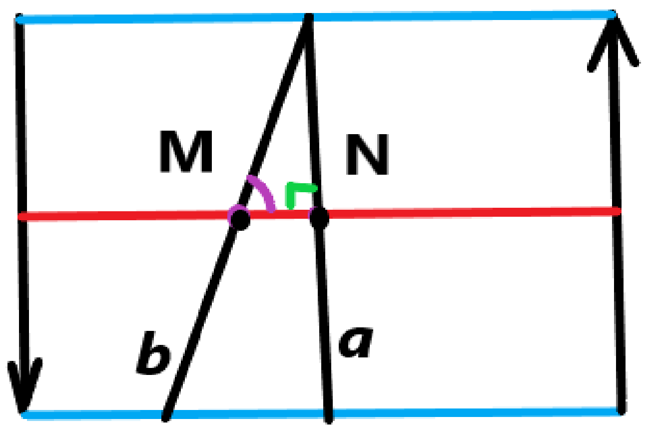
Расширенная гиперболическая плоскость

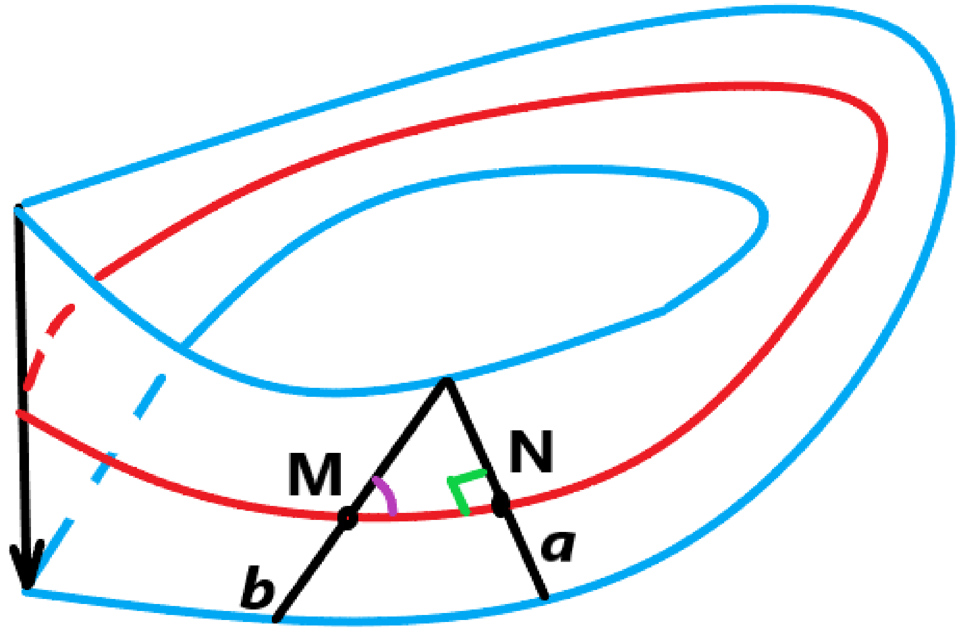


Сфера в пространстве с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$

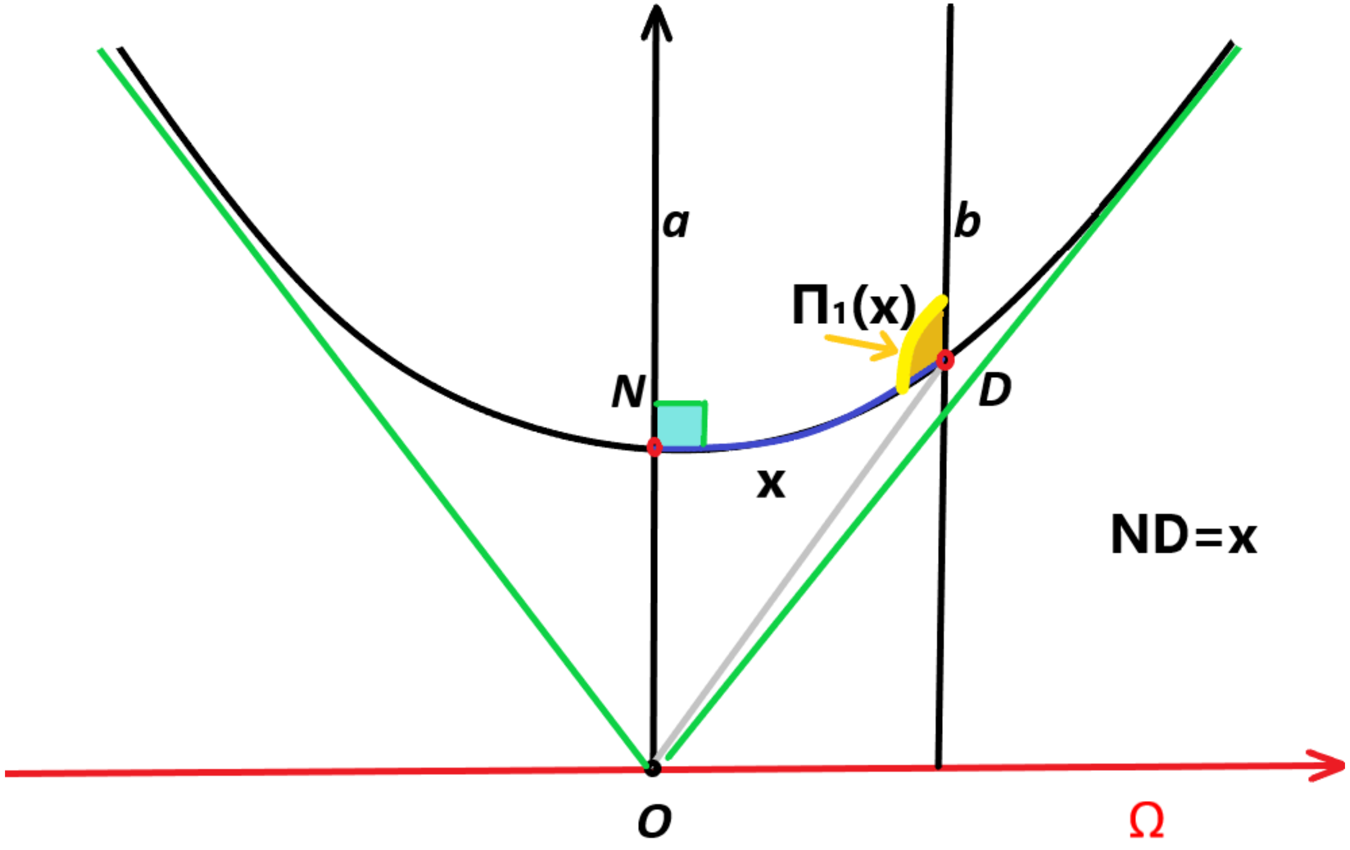


Лист Мёбиуса



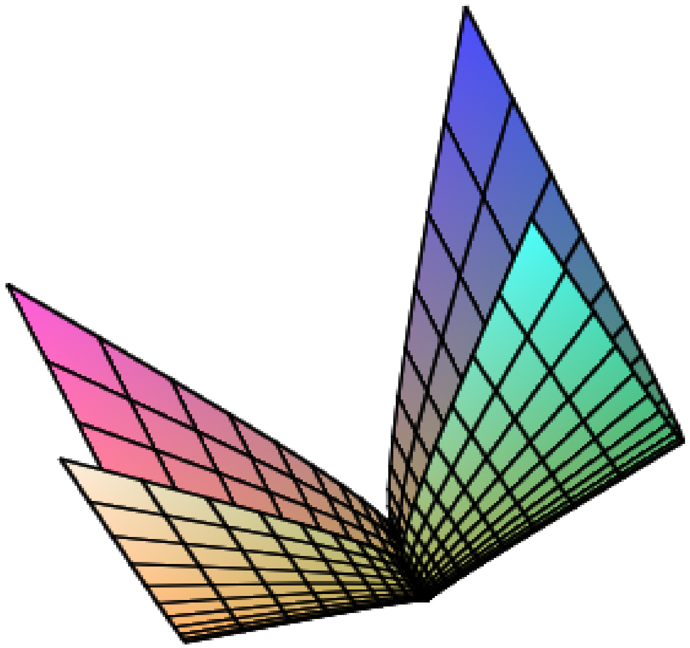


Угол параллельности П1 $ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$

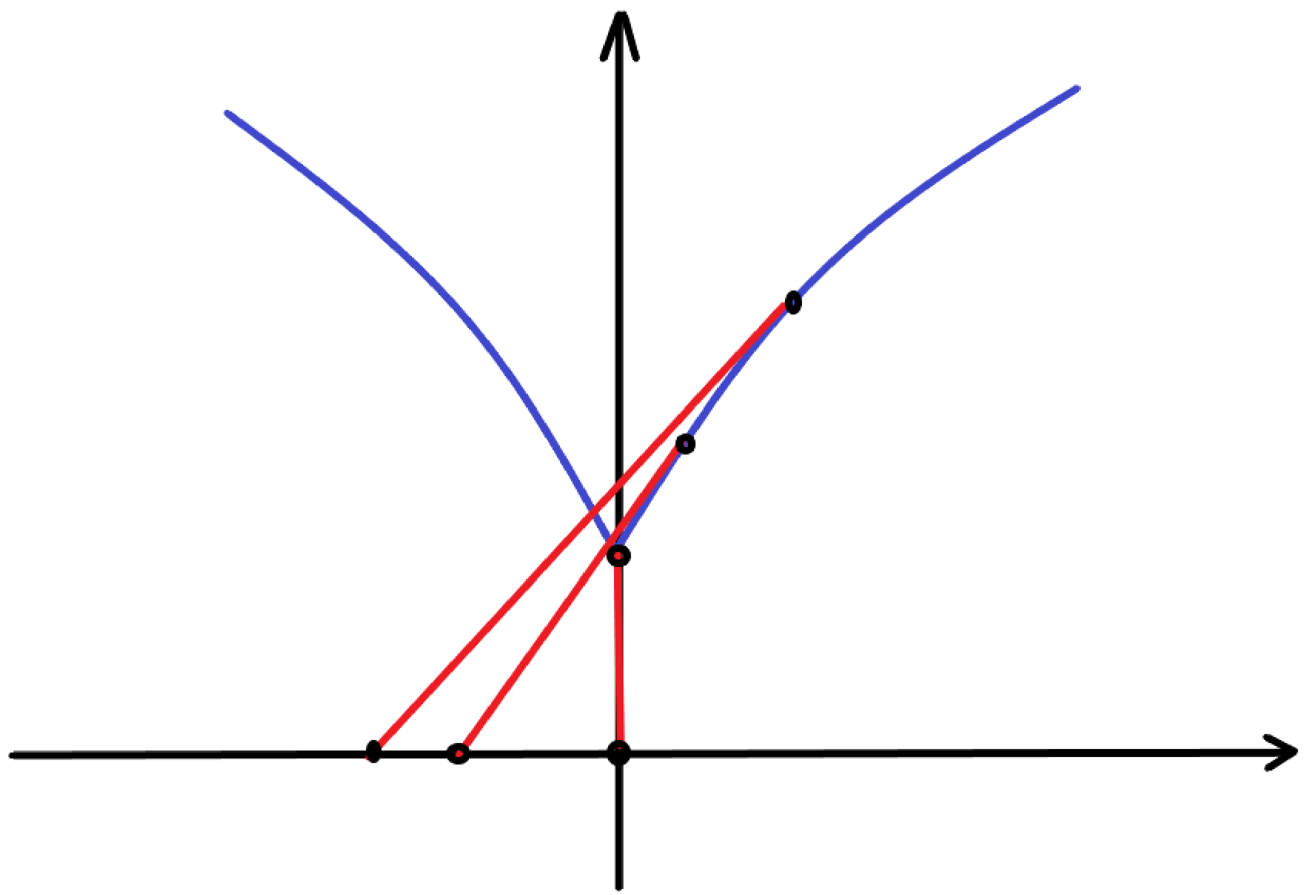


$$ds^2=(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

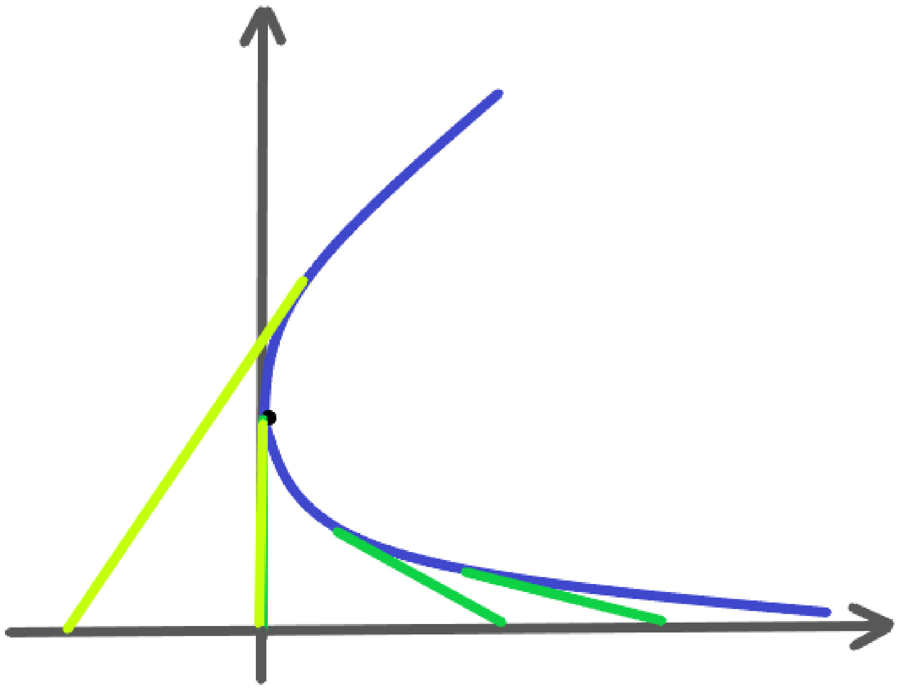
$$\begin{cases} x^1 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)) \\ x^2 = \cosh(u)\sinh(v)\,, \\ x^3 = \cosh(u)\cosh(v)\,. \end{cases}$$



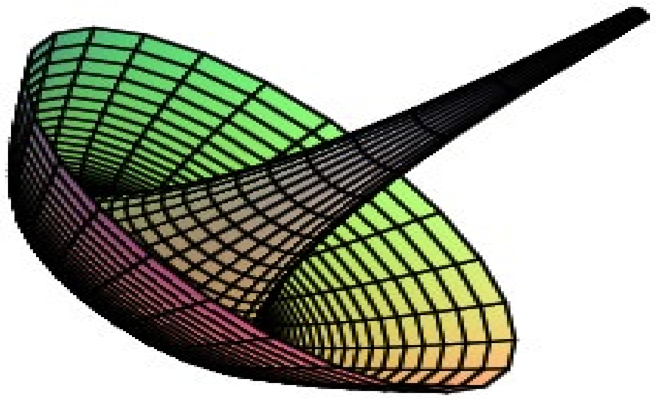
Мередиан бабочки де Ситтера-Широкова



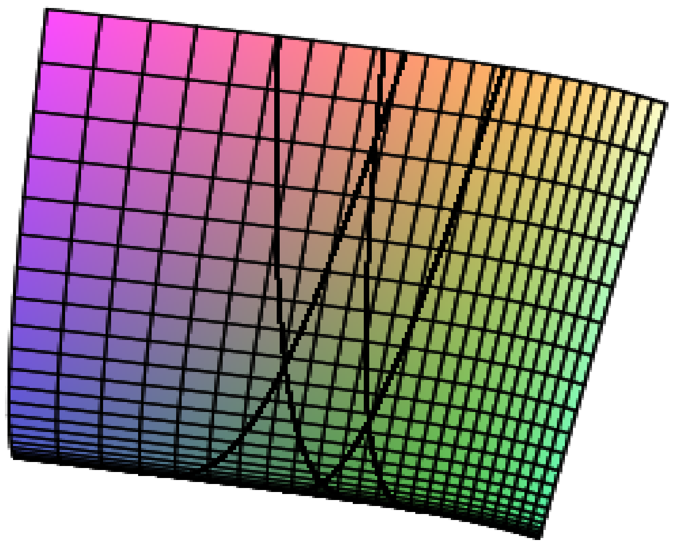
Псевдоевклидово продолжение трактрисы



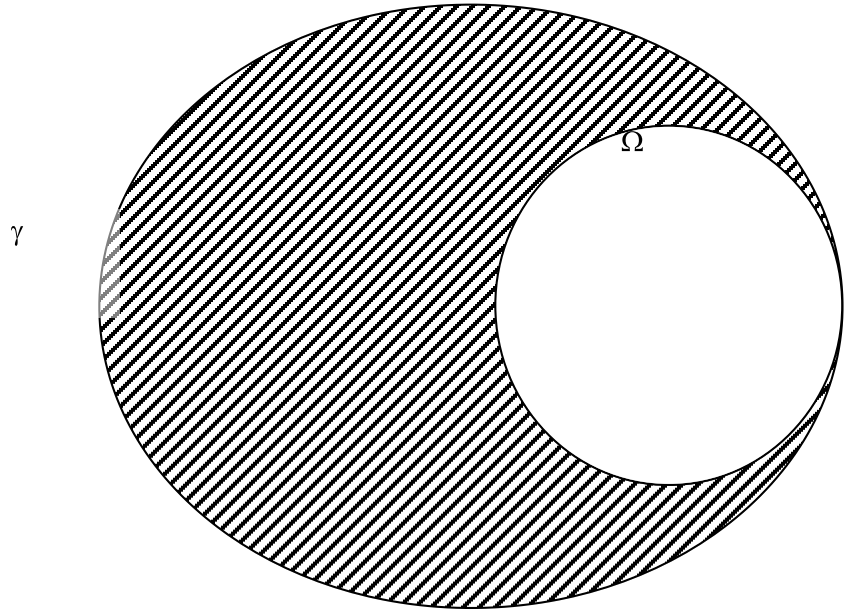
«Полная» псевдосфера

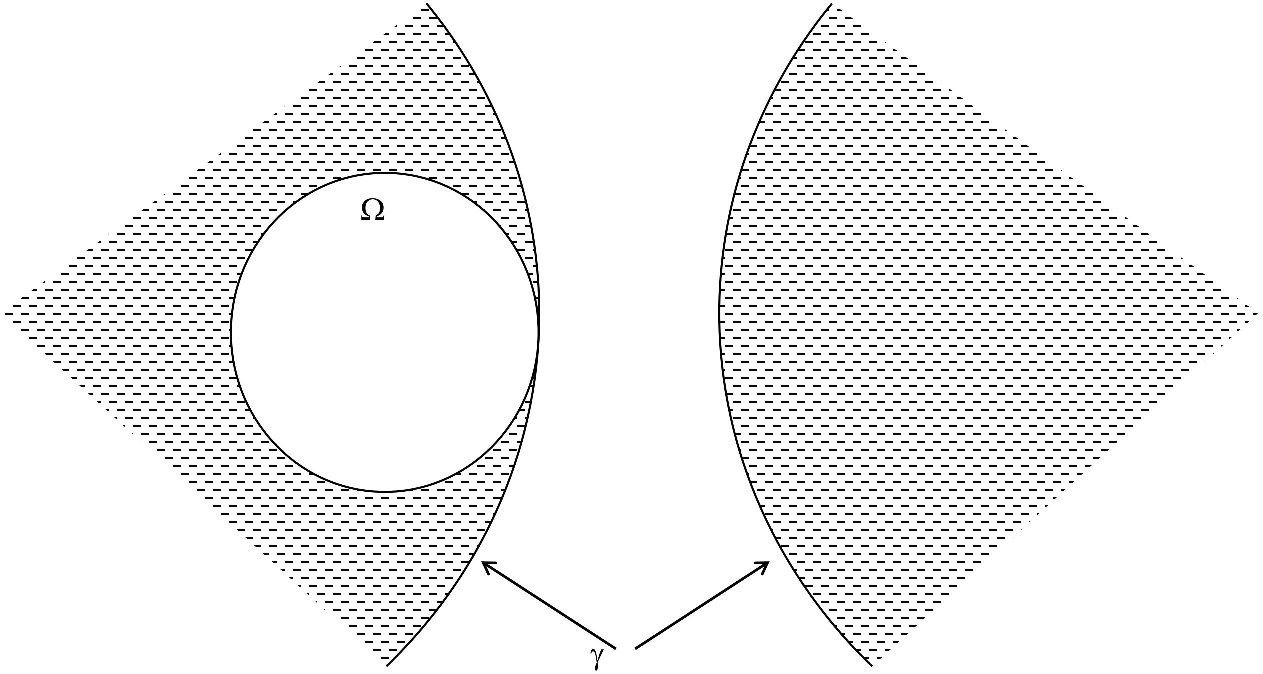


Асимптотические на бабочке

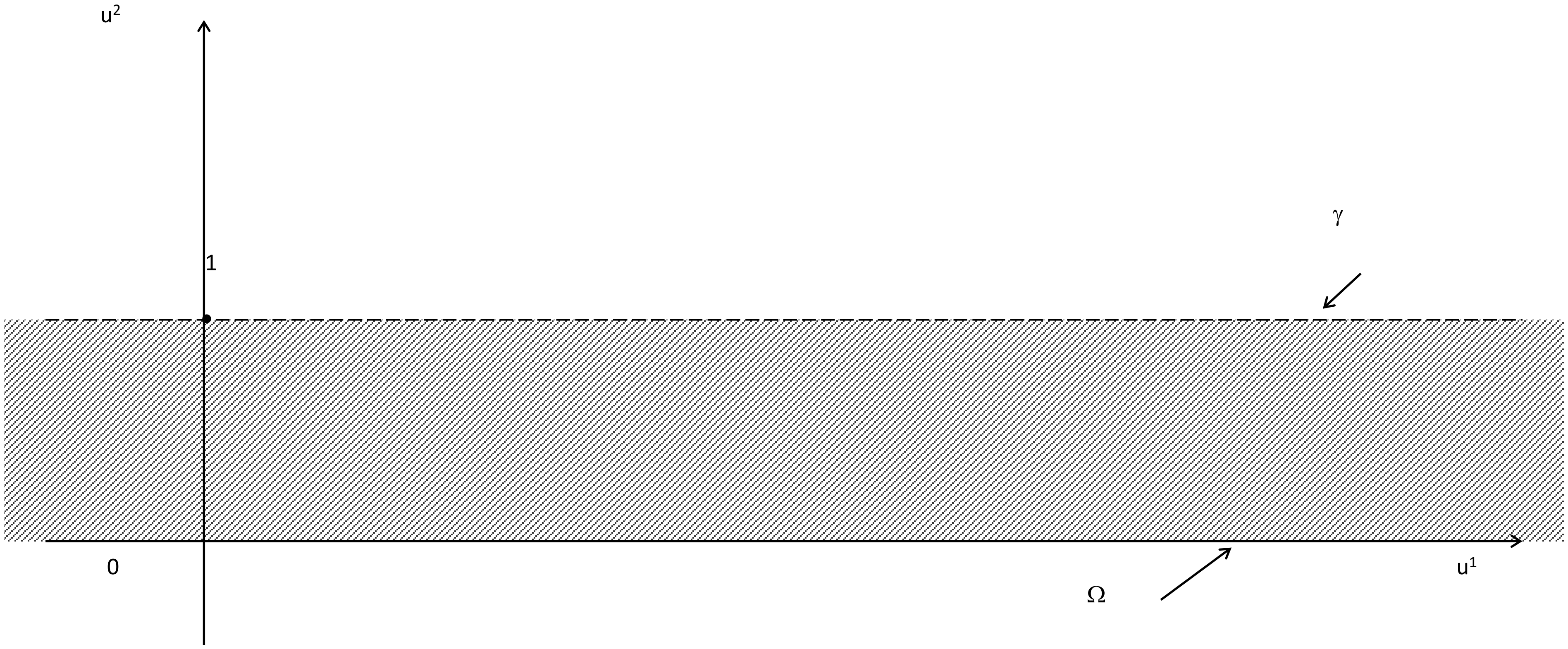


«Крыло» бабочки в проективной модели





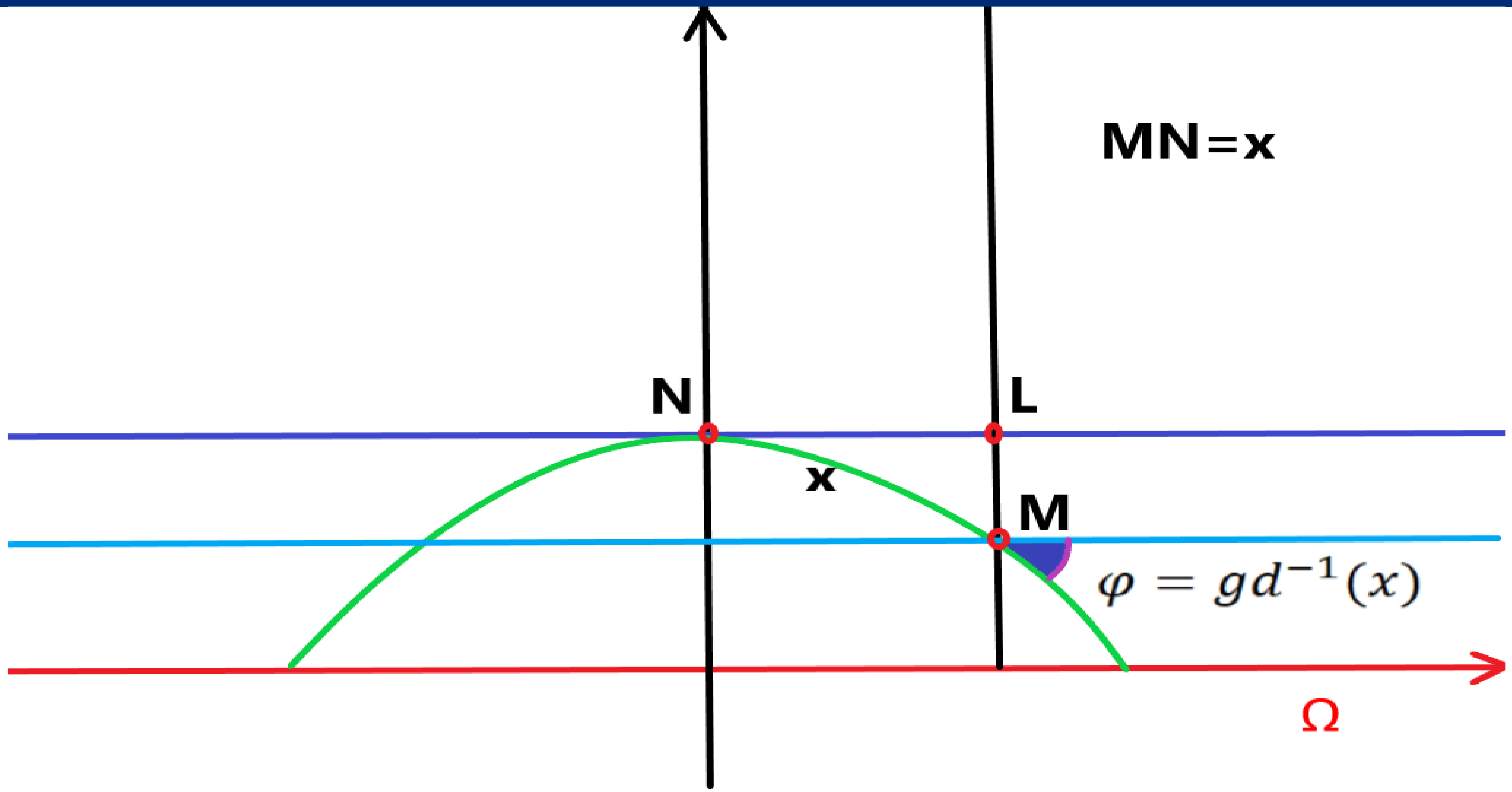
$$I = ds^2 = \frac{(du^1)^2-(du^2)^2}{(u^2)^2}$$



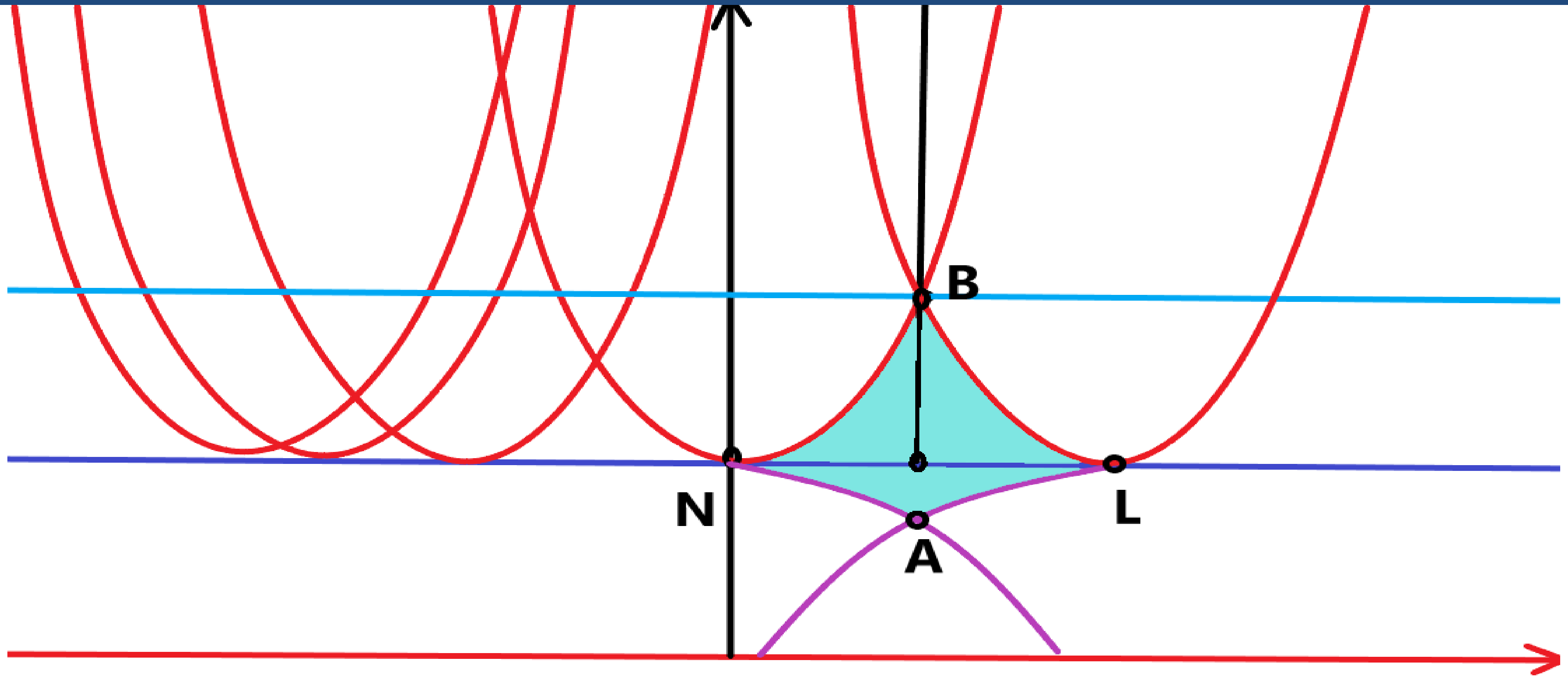
Асимптотические: карта Пуанкаре

- Вторая квадратичная форма поверхности в этих координатах:
- $II = -\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1-(u^2)^2}}(du^2)^2.$
- Приравняв её к нулю, получим уравнения асимптотических линий:
- $u^2 = cos(u^1 - c_1)\,, u^2 = \cos(c_2 - u^1)$

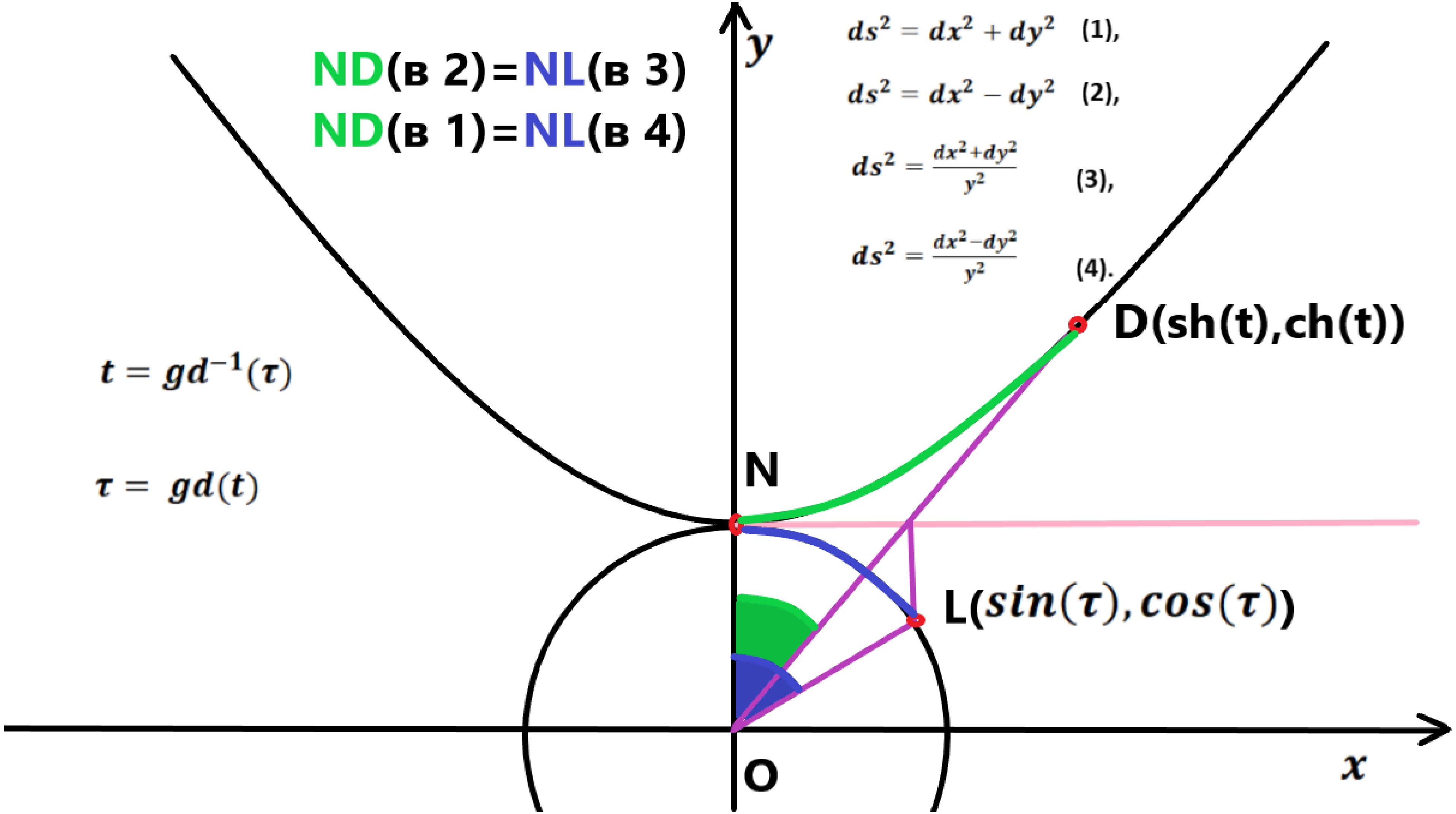
Угол между асимптотической и параллелью



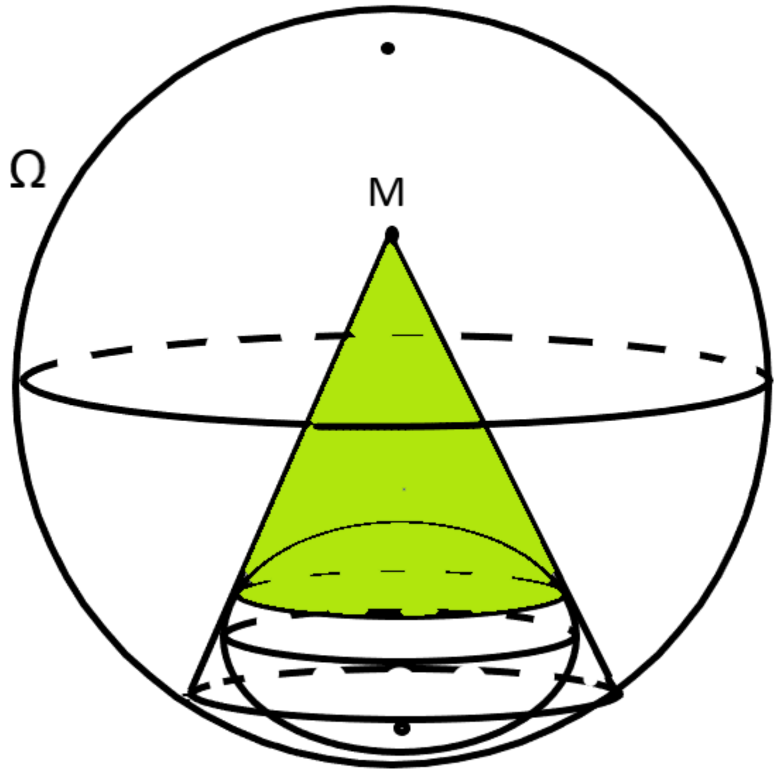
Распространение формулы Хаццидакиса за ребро возврата



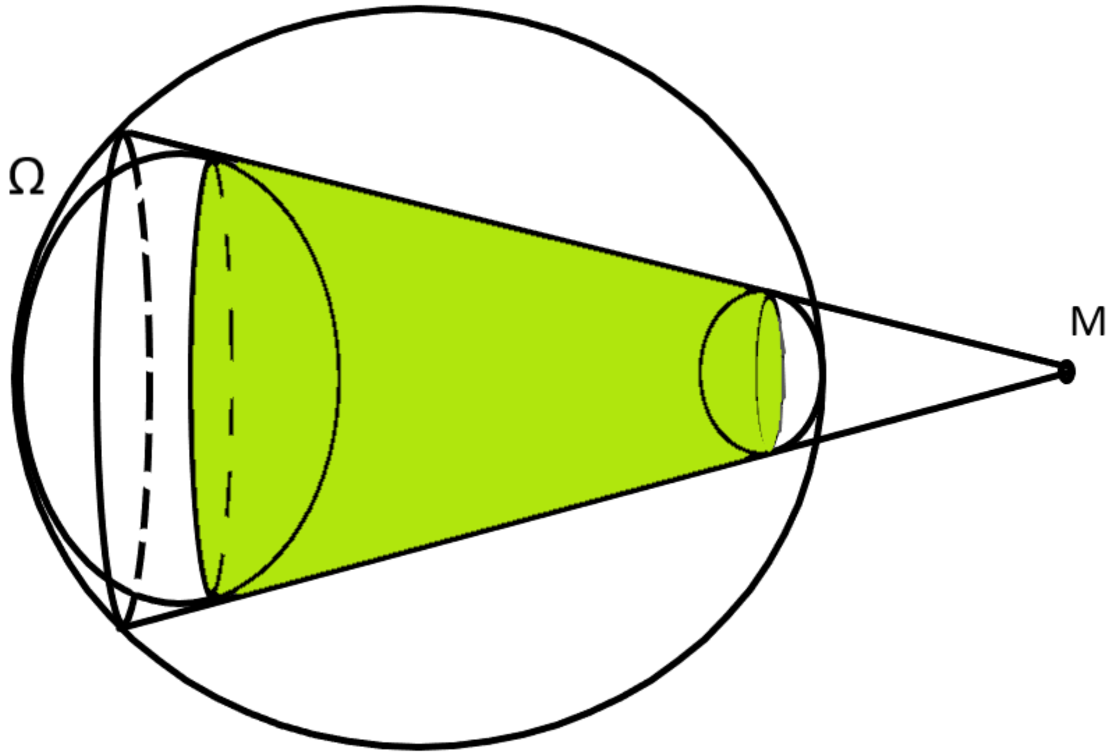
Гудерманиан



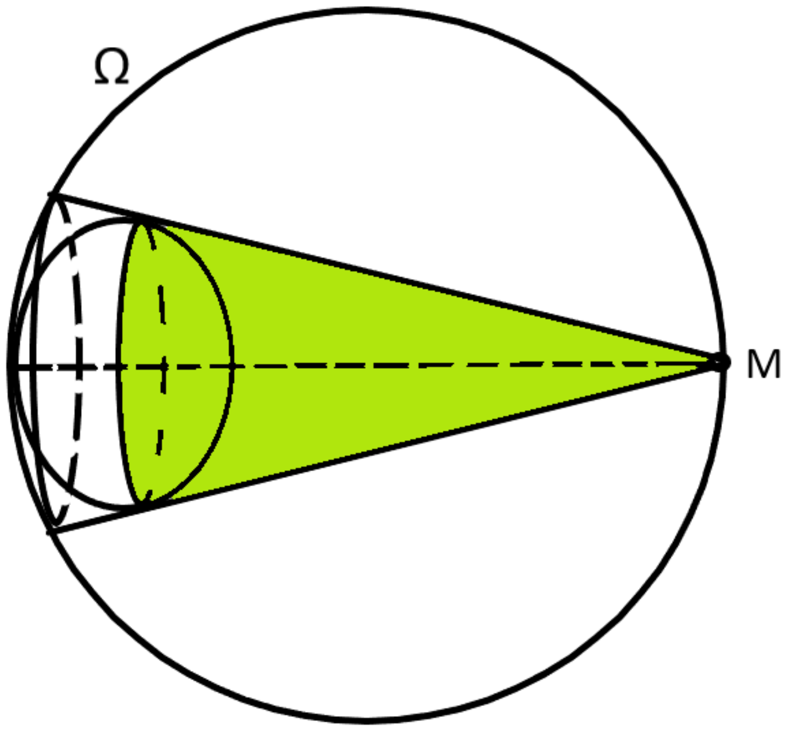
Касательный конус к орисфере в проективной модели



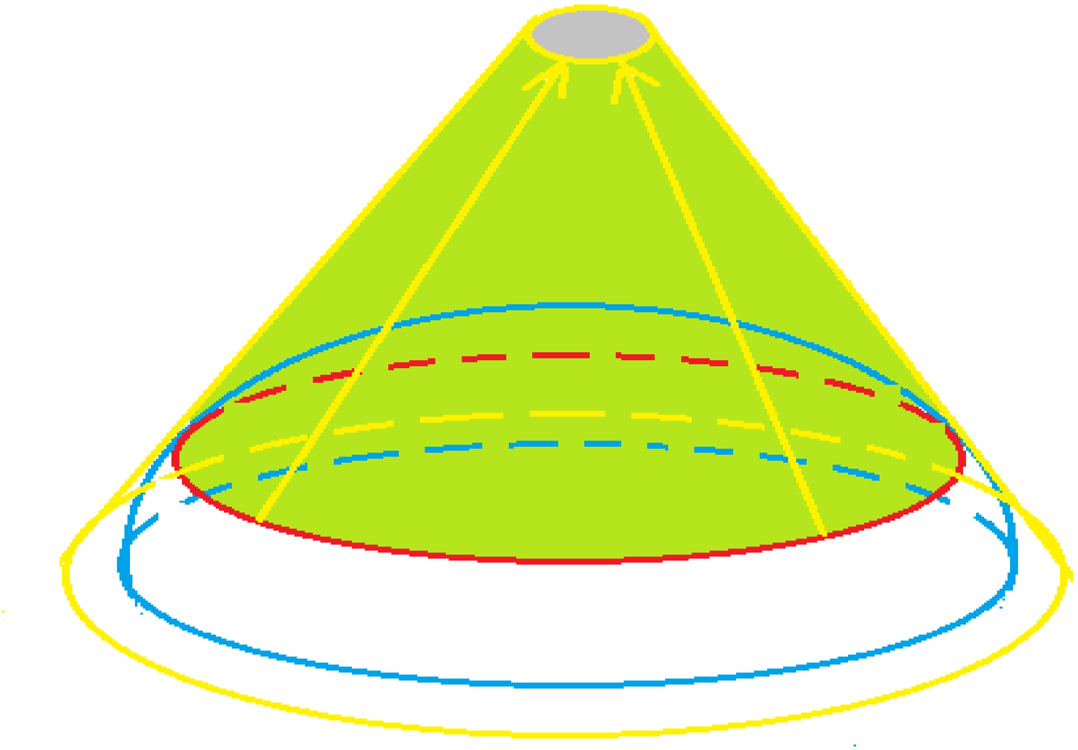
Вершина за абсолютом



Вершина на абсолюте

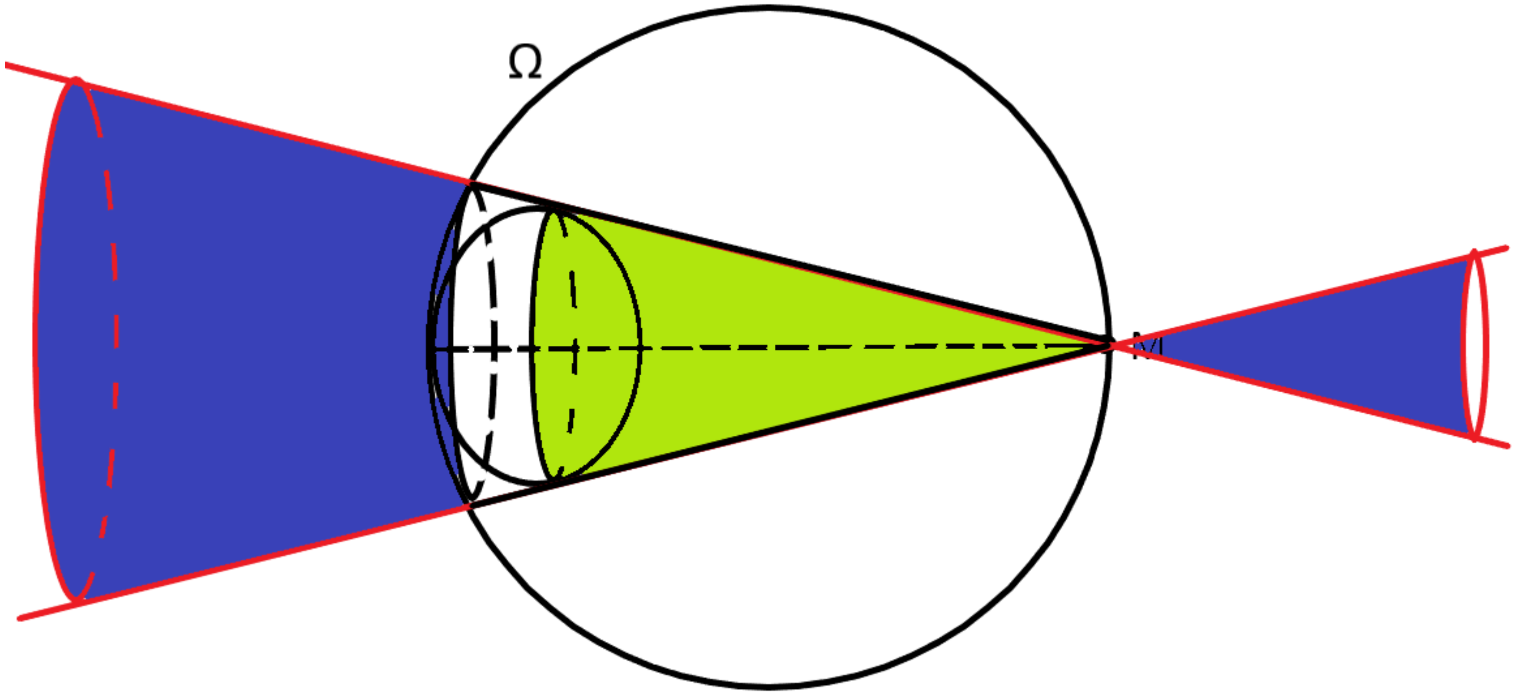


Псевдосфера

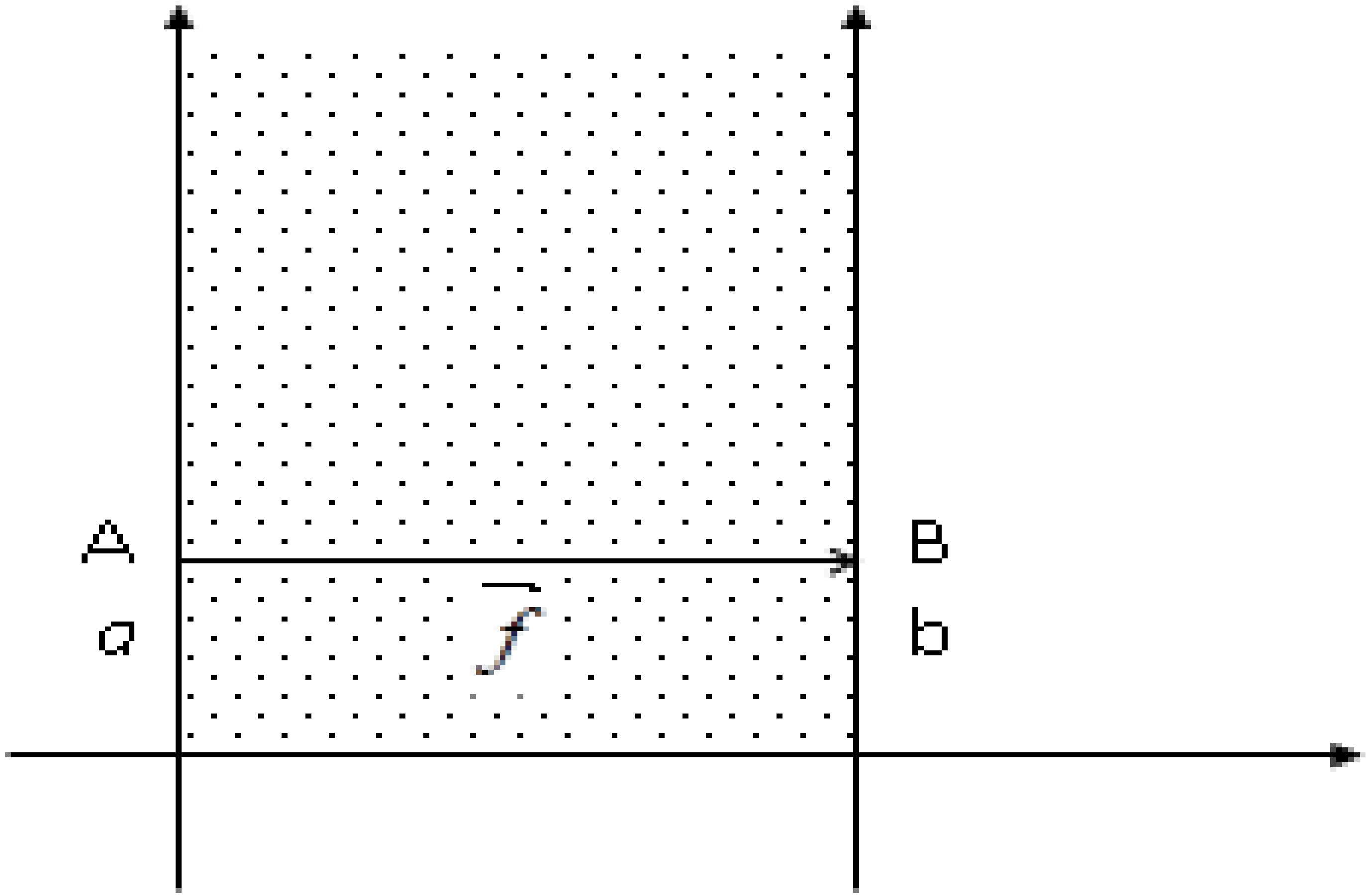


Модель псевдосферы
(Anish Kapoor)

Воронка в проективной модели



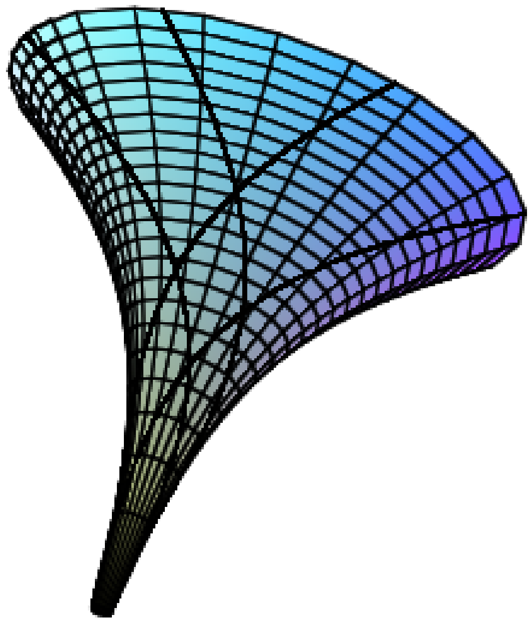
$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$$



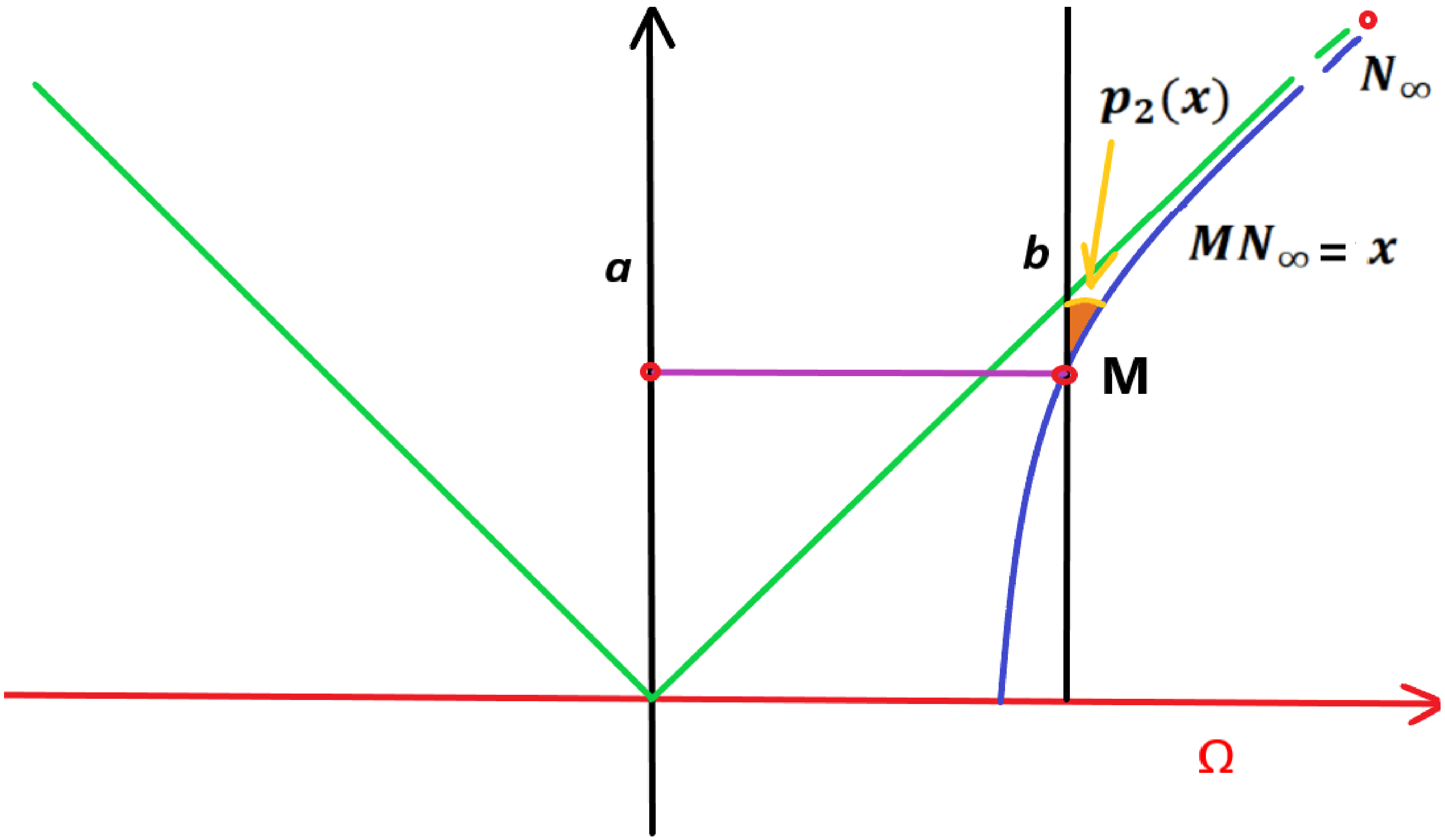
Воронка де Ситтера-Широкова

- В трёхмерном пространстве Минковского с метрикой
- $$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2$$
- рассмотрим поверхность, радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{r}(x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$ которой имеет компоненты:
- $$\begin{cases} x^1 = \lambda \cdot \sinh(u) \cdot \sin(v)\,, \\ x^2 = \lambda \cdot \sinh(u) \cdot \cos(v)\,, \\ x^3 = \lambda \cdot (\ln\left(\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \cosh(u))\,. \end{cases}$$

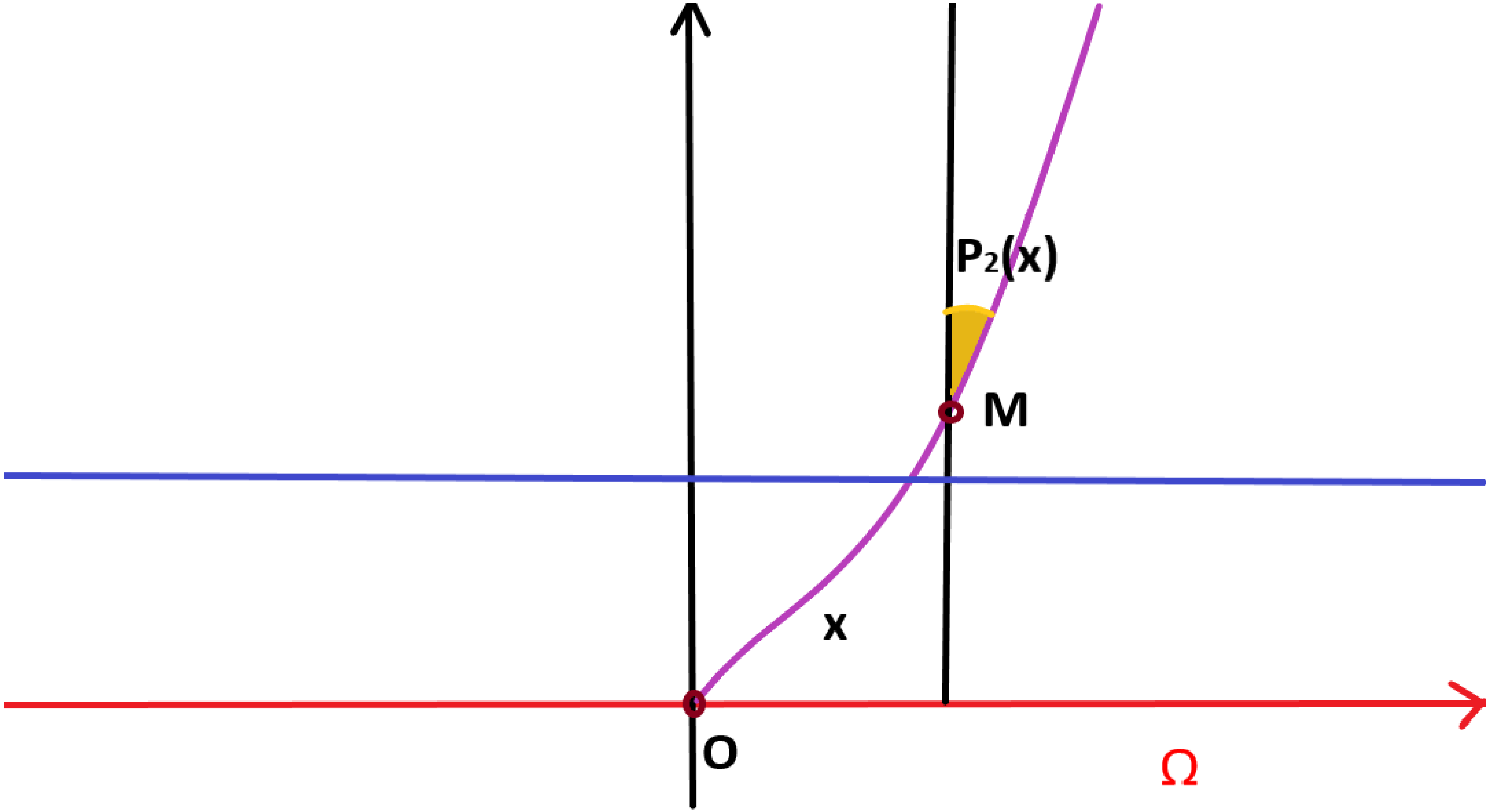
Асимптотические на воронке де Ситтера-Широкова



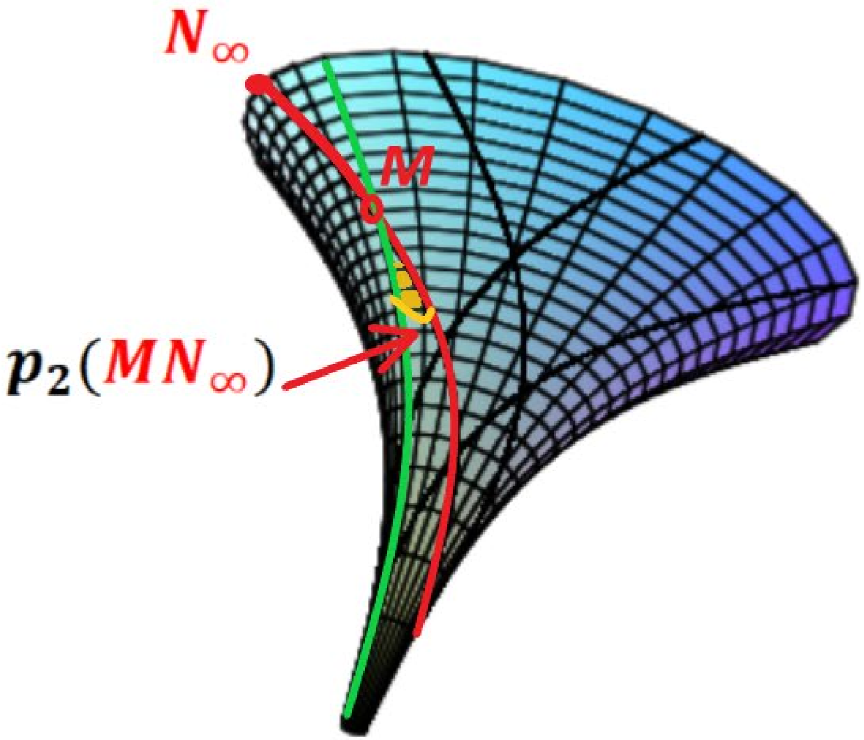
«Двойственный» угол параллельности: $p_2(x) = \int_x^{\infty} \frac{dv}{shv}$



«Двойственный» угол на воронке в модели Пуанкаре



Угол между асимптотической и меридианом на воронке



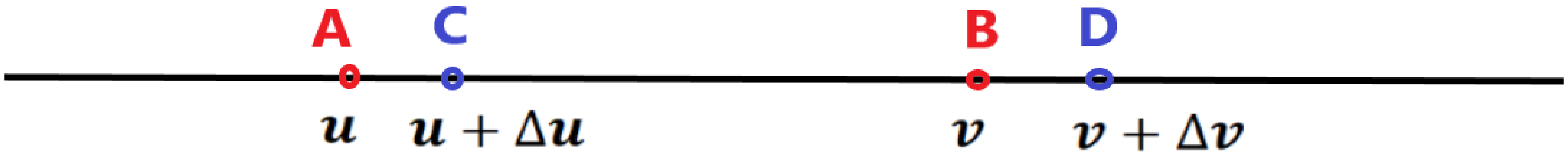
Hesse (1866)

$$tg^2 \frac{s}{2} = -(AB, CD)$$

$$ds^2 = \frac{4dudv}{(u-v)^2}$$

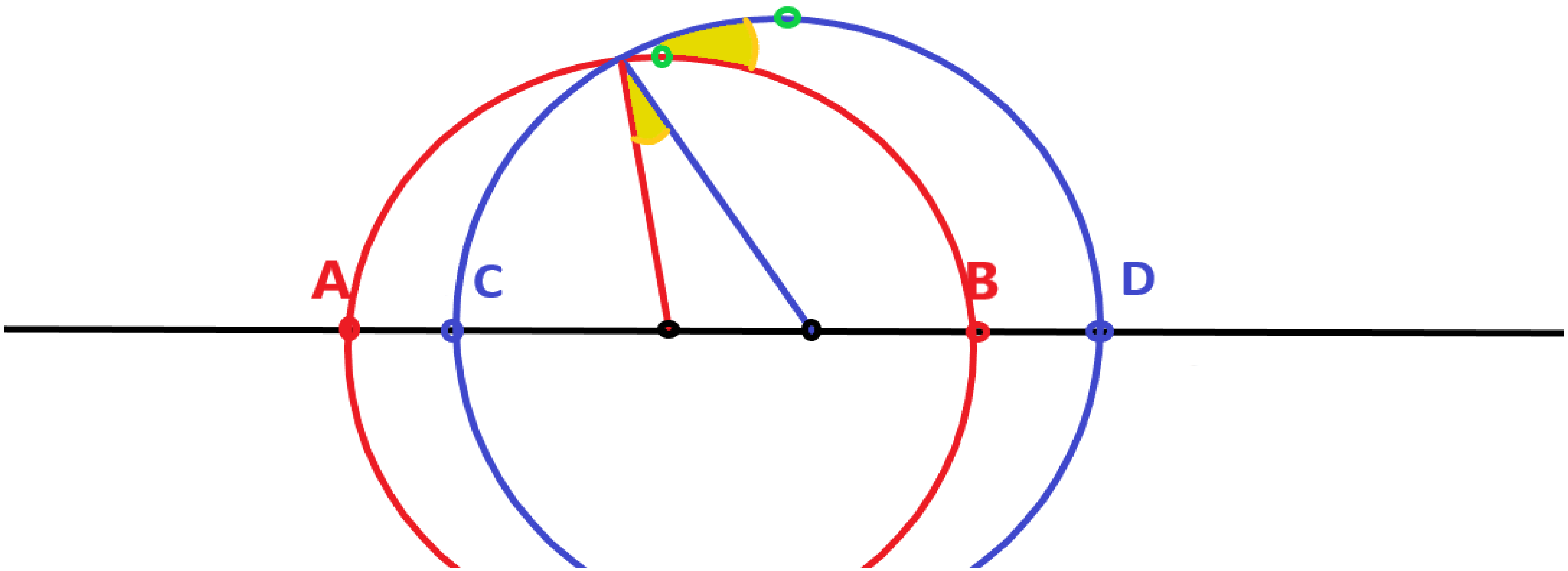
$$u = x - y, v = x + y$$

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$$

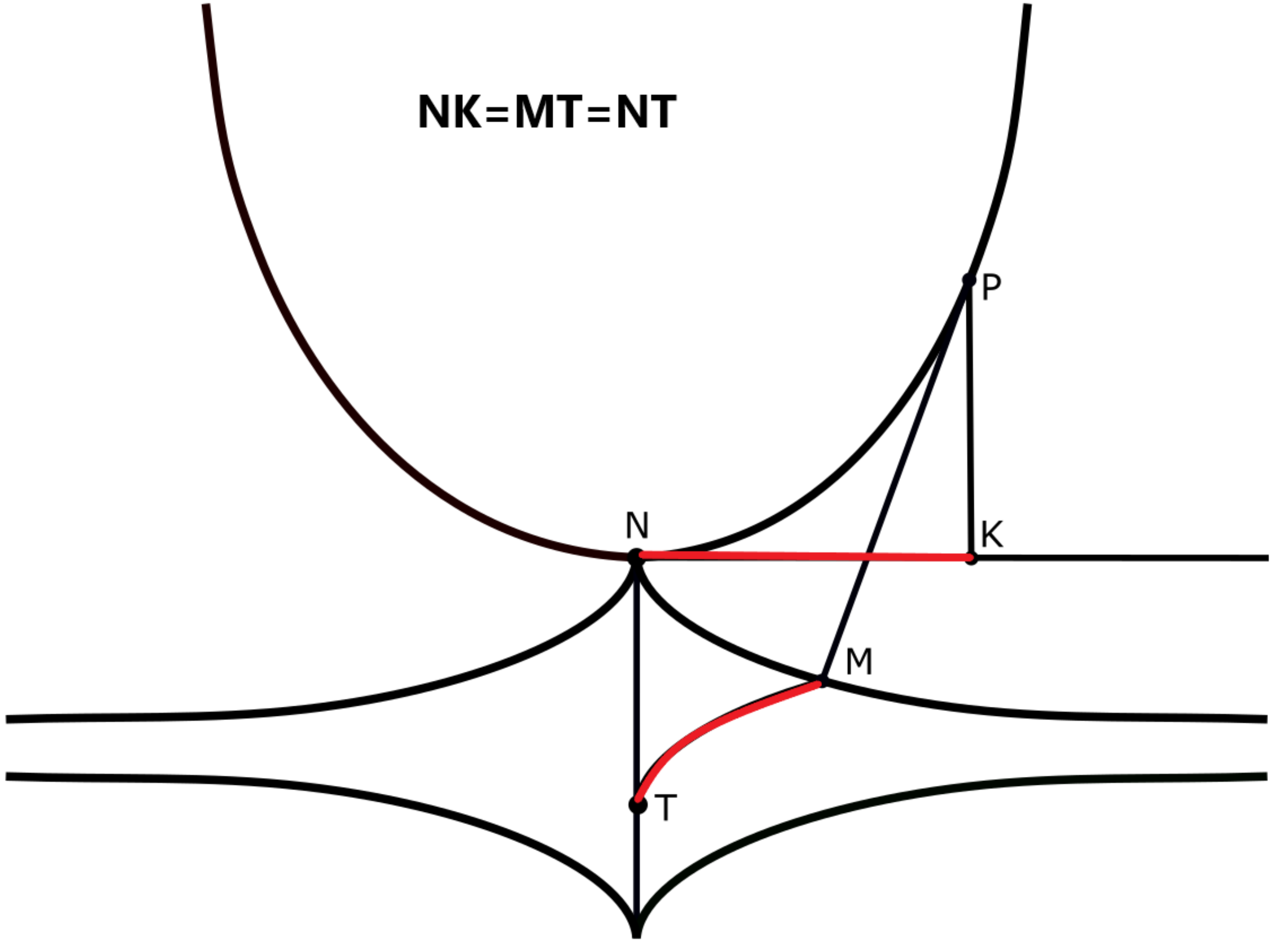


$$P^1 = R^1 + \infty$$

Пары точек в модели Пуанкаре



Асимптотические и эволюты меридианов



Литература

1.Hazzidakis J.N. Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz, Crelles J.,88, s.68–73,1880.

2.Chern S.S. Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation. *Selected Papers*,*V.1-4* -Springer-Verlag,Berlin-New-York-V.4, p.63-69 (1987- 1989)

3. Галеева Р.Ф., Соколов Д.Д. О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики./Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах .Л. ЛГПИ,(1984),с.8-22.

4. Г. К. Брусиловский, “Интегрирование с помощью гиперболических функций и гудерманиана”,*Сборник статей по элементарной и началам высшей математики*, Матем. просв., сер. 1, **13** (1938), 33–46

5. Hesse L.O. Über ein Übertragungsprinzip, J. für reine und agew.Math., **66**,(1866) 15-21

6. Ромакина Л.Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны.// СЭМИ, **10**,(2013), 393-407

7.Kostin, A.V. Asymptotic Lines on Pseudospheres and the Angle of Parallelism. *Russ Math.* **65**, 21–28 (2021).

Костин А.В.
Елабужский институт Казанского федерального университета

Спасибо за внимание!