

Максимальное число частей разбиения гиперпространства полугиперплоскостями

Пётр Ким, Алексей Суворов, Михаил Гарковенко,
Дмитрий Кондрашов
научный руководитель Алексей Яковлевич Канель-Белов

August 2023 - October 2025

Аннотация

Имеется классическая задача о разбиении гиперпространства гиперплоскостями на максимальное число частей. Аналогичная задача для полугиперплоскостей в общем случае до сих пор не решена. Размерность 2 тривиальна, размерность 3 является основным результатом данной статьи. Интересно, что в ней ответ находится не в общем положении. Ответ таков: $\lfloor \frac{\frac{1}{2}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + 3k + 3}{3} \rfloor$

Введение

В классической задаче с помощью рекуррентных соотношений для числа разбиений пространства размерности N на k частей была получена следующая формула: $G_N(k) = \sum_{i=0}^N \binom{k}{i}$

Нас же интересует разбиение полуплоскостями. Для максимального числа частей разбиения лучами плоскости ответ $\frac{k(k-1)}{2} + 1$. Удивительно, что вопрос о пространстве оказался открытым. Мы: Алексей Суворов и Петр Ким нашли решение. Предполагается решение в многомерных случаях, но даже и трехмерный оказался нетривиальным, далее рассмотрим его подробнее.

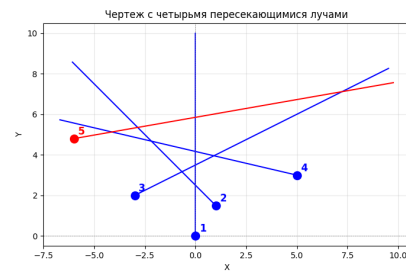
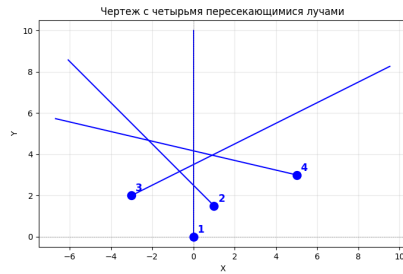
Разбиение плоскости лучами

Пусть N - размерность гиперпространства, k - количество полугиперплоскостей, тогда $F_N(k)$ - число частей разбиения гиперпространства полуги-

перпелоскостями. Таким образом, нахождение $F_3(k)$ есть основной результат данной статьи. Но для начала нам понадобится найти $F_2(k)$.

Это известный результат, получается он, например, рекурсией: $F_2(k) = F_2(k-1) + k - 1$ (по аналогии с прямыми, но каждый раз добавляется на одну часть меньше), из которой следует формула

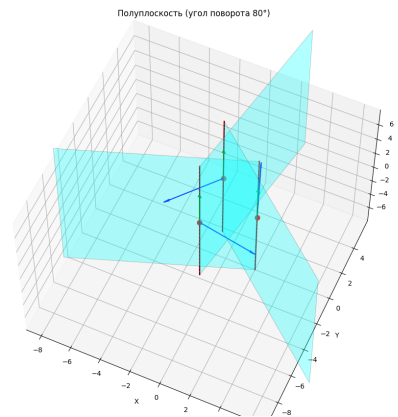
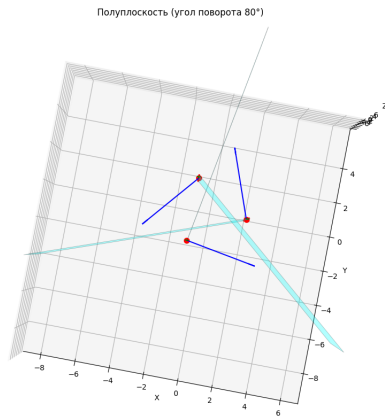
$$F_2(k) = \frac{k(k-1)}{2} + 1$$



Перейдём к доказательству основного результата.

$$F_3(k) = \left\lfloor \frac{\frac{1}{2}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + 3k + 3}{3} \right\rfloor$$

То есть $\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + k + 1$, если k делится на 3,
 $\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{3}$, если $k = 1(mod 3)$,
 $\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{2}{3}$, если $k = 2(mod 3)$.



Выпишем явно полином для $G_3(k)$

$$G_3(k) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = 1 + k + \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} + \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{3} = \frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1$$

Начнем с примера для k , кратного трём. Он строится так: сначала в пространстве выбирается произвольная плоскость A и одно из полупространств B , на которые пространство ей разбивается, затем на A выбираются k прямых так, что они быются на тройки параллельных. Далее через каждую прямую проводится плоскость общего положения. И наконец, пересечением каждой плоскости данного набора с B получается искомый пример. Примеры для k , не кратного трём, строятся удалением одной, либо двух полуплоскостей из вышеприведённой конструкции.

Далее сделаем несколько допущений и предложений.

Можно считать, что никакие две полуплоскости не параллельны, никакие три не пересекаются по одной прямой, а любые две пересекаются, так как в противном случае можно малым шевелением увеличить число частей.

Предложение 1

Количество неограниченных частей разделения пространства полуплоскостями некоторого набора, увеличенного на некоторую полуплоскость, равняется сумме количества неограниченных частей разделения пространства полуплоскостями исходного набора и количества неограниченных частей разделения этой полуплоскости пересечением полуплоскостей набора с ней.

Предложение 2

Количество же ограниченных частей разделения пространства полуплоскостями увеличенного набора в свою очередь равняется сумме количества ограниченных частей разделения пространства полуплоскостями исходного набора и количества ограниченных частей разделения этой полуплоскости пересечением полуплоскостей набора с ней.

Перейдем к оценке. Давайте назовём полуплоскости $p_1, p_2, \dots, p_k$, их граничные прямые - $l_1, l_2, \dots, l_k$. Разобьём эти прямые на множества параллельных и назовём количества прямых в каждом множестве - $a_1, a_2, \dots, a_r$.

Количество неограниченных частей, на которые $p_1, p_2, \dots, p_k$ делят пространство, не превосходит $2 - r + \frac{(k-1)k}{2}$. Чтобы сделать это очевидным рассмотрим индукцию по r .

Докажем базу индукции. Для $r = k$, все граничные прямые не параллельны. Проведём сферу с центром в какой-нибудь конечной области, на грани-

це которой нет точек конечных областей. Тогда количество неограниченных областей равняется количеству частей, на которые дуги, являющиеся пересечениями сферы с этими полуплоскостями, делят сферу. Из индукции по k следует, что количество таких частей не превосходит $\frac{(k-2)(k-1)}{2} + 1$.

Произведем переход. Пусть прямые $l_1, l_2, \dots, l_m$ параллельны. Повернём прямую l_m на малый угол. Образ p_m назовём p'_m . Заметим, что тогда по предложению 1 количество бесконечных областей после этого увеличится на разность следующих величин. m - количество неограниченных частей, полученных делением полуплоскости p_m $m - 1$ прямой, параллельной её границе и количество неограниченных частей, полученных делением полуплоскости p'_m пересечениями $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ с p'_m . Как мы уже заметили, эти пересечения - $m - 1$ луч, образующий на полуплоскости не более $m - 1$ неограниченной части.

Теперь примем во внимание, что количество конечных частей, на которые полуплоскости $p_1, p_2, \dots, p_r$ делят пространство не превосходит

$$\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} - \sum_{i=1}^r \frac{(a_i-1)(a_i-2)(a_i-3)}{6}$$

Видим это, опираясь на следующую индукцию.

В качестве базы возьмем $r = k$, $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$, тогда количество конечных частей меньше или равно $\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}$. Для $k = 1$, понятно. При добавлении одной полуплоскости по предложению 2 добавится не более $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ конечных областей. Получаем:

$$\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} + \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

Разберем переход. Пусть одно из множеств параллельных прямых - $l_1, l_2, \dots, l(m+1)$. Заметим, что полуплоскости, опирающиеся на эти прямые не образуют конечных областей. Если повернуть прямую $l(m+1)$ на достаточно малый угол, $p(m+1)$ переходит в $p'(m+1)$, причем добавляется не больше, чем $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ конечных областей. Получено: $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$

Таким образом число частей, на которые $p_1, p_2, \dots, p_k$ делят пространство не превосходит $\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} - \sum_{i=1}^r \frac{(a_i-1)(a_i-2)(a_i-3)}{6} + 2 - r + \frac{(k-1)k}{2}$

В то же время для любого $x \geq 0$: $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} \geq \frac{x}{3} - 1$, так как $(x-1)(x-2)(x-3) - 2x + 6 = x(x-3)^2 \geq 0$
В результате: $\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} - \sum_{i=1}^r \frac{(a_i-1)(a_i-2)(a_i-3)}{6} + 2 - r + \frac{(k-1)k}{2} \leq \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} - \sum_{i=1}^r \left(\frac{a_i}{3} + 1\right) + 2 - r + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6} - \frac{k}{3} + 2 + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + k + 1$
Основная теорема доказана.

Благодарности

Отдельную благодарность хотим выразить Ивану Часовских за позитивный вклад в решение задачи.