Characteristic polynomials of circulant graphs and their generalizations

Ilya mednykh[1.2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics

[2]Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russia

October 1, 2024

Введение

Доклад освяшает результаты полученные в совместных исследованиях с Йонг Су Квоном и А.Д. Медных.
В предыдущих работах авторов [MedMed18, GrunMed22, MedMed2020] были изучены структурные теоремы, описывающие свойства числа остовных деревьев, корневых остовных лесов и индекса Кирхгофа для семейства циркулянтных графов. Все эти величины являются спектральными инвариантами, то есть зависят от собственных значений характеристического полинома матрицы Лапласа. Структура самого полинома оставалась неизвестной. В недавних работах [Xiaogang Liu и Sanming Zhou (2012), Xiaogang Liu и Pengli Lu (2016)] было обнаружено, что характеристической полином для ряда известных семейств графов, таких как тета-граф, гантельный граф и граф пропеллера эффективно выражается через полиномы Чебышева. Эти результаты дали ключ к пониманию структуры характеристического полинома для циркулянтных графов, которая и описывается в данном сообщении.

Введение

Более точно, характеристический полином представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Это позволят установить периодичность таких полиномов в предписанных целых точках, что представляет интерес с точки зрениями дискретной топологической динамики [Natascha Neumaerker (2012)]. Устанавлено, что с точностью до явно указанных линейных множителей, характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами. Это дает возможность получить новое доказательство теорем о числе корневых остовных лесов в циркулянтном графе.

Предварительные сведения

Под *графом* G будем понимать конечный, связный граф, допускающий кратные ребра, но не имеющий петель. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер графа G соответственно. Матрица $A = A(G) = (a_{u,v})_{u,v \in V(G)}$, где $a_{u,v}$ — число ребер между u и v, называется *матрицей смежности* графа G. Обозначим через $d(v)$ степень вершины $v \in V(G)$ и рассмотрим диагональную матрицу $D = D(G)$ с элементами $d_{v,v} = d(v)$. Матрица $L = L(G) = D(G) - A(G)$ называется *матрицей Лапласа* или *лапласианом* графа G. *Характеристическим полиномом Лапласа* графа G называется полином $\chi_G(\lambda) = \det(L(G) - \lambda I)$, где I — единичная матрица, имеющая порядок, совпадающий с числом вершин графа G.

Предварительные сведения

Граф G на n вершинах называется *циркулянтным*, если существует последовательность целых чисел $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq \frac{n}{2}$ такая, что вершина с номером j смежна с вершинами $j \pm s_1, j \pm s_2, \ldots, j \pm s_k$, где номера вершин берутся по модулю n.

Если $s_k \ < \ n/2$, то все вершины графа имеют четную валентность $2k$. В случае, когда n четно и $s_k \ = \ n/2$, все вершины графа имеют нечетную валентность $2k-1$.

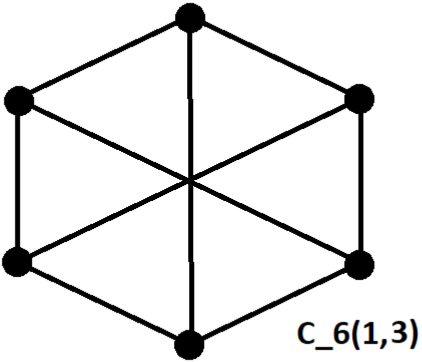
Циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ связен, если

$$\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1.$$

Это условие, в рамках сообщения, всегда предполагаем выполненным.

С каждым циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ мы свяжем *ассоциированный полином Лорана.* Он имеет вид

$$P(z) = 2k - \sum_{\ell=1}^{k}(z^{s_\ell} + z^{-s_\ell}).$$



Circulant graph $C_6(1,3)$.

Характеристический полином для циркулянтных графов с четной валентностью

Собственные значения циркулянтного графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ с четной валентностью вычисляются с помощью ассоциированного полинома Лорана

$$\lambda_j = P(\varepsilon_n^j) = 2k - \sum_{\ell=1}^{k} (\varepsilon_n^{j\,s_\ell} + \varepsilon_n^{-j\,s_\ell}),\ j = 0, 1, \ldots, n-1,\ \text{где } \varepsilon_n = e^{\frac{2\pi \mathtt{i}}{n}}.$$

Соответственно, *характеристический полином матрицы Лапласа* это

$$\chi_G(\lambda) = \det(L(G) - \lambda I_n) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j).$$

Характеристический полином для циркулянтных графов с четной валентностью

Theorem (1)

Пусть $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — циркулянтный граф четной валентности. Тогда характеристический полином $\chi_n(\lambda)$ матрицы Лапласа графа G_n, с точностью до знака, вычисляется по формуле

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(w_\ell) - 2),$$

где $T_n(w)$ — полином Чебышева первого рода степени n, а величины w_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, s_k$ — корни полинома $Q_\lambda(w) = \lambda - 2k + 2\sum\limits_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(w)$.

Схема доказательства 1

Прежде всего, заметим, что алгебраическая функция $\prod\limits_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(w_\ell)-2)$ является целочисленным полиномом от λ. Это следует из теоремы Виета, примененной к корням полинома $Q(w)$. Далее, напомним базовые свойства результантов двух полиномов. Пусть

$f(x) = a_0(x-x_1)\dots(x-x_l)$ и $g(y) = b_0(y-y_1)\dots(y-y_m)$, где $a_0 b_0 \neq 0$.

Имеют место следующие соотношения (см. книгу Прасолова "Полиномы", т. 1.3.1):

$$\mathrm{Res}(f,g) = a_0^m \prod_{j=1}^{l} g(x_j) = b_0^l \prod_{i=1}^{m} f(y_i)$$

и

$$\mathrm{Res}(f,g) = (-1)^{\deg f \cdot \deg g}\mathrm{Res}(g,f).$$

Схема доказательства 1

Положим $f(w) = 2T_n(w) - 2$ и $g(w) = Q_\lambda(w)$. Тогда $a_0 = 2^n$ и $b_0 = 2^{s_k}$. Полагая $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, запишем характеристический полином с точностью до знака

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2k + \sum_{\ell=1}^{k}(\varepsilon_n^{j\,s_\ell} + \varepsilon_n^{-j\,s_\ell})) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k}\cos(\frac{2\pi\,j\,s_\ell}{n})) = \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(\cos(\frac{2\pi\,j}{n})) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} Q_\lambda(\cos(\frac{2\pi\,j}{n})) = 2^{-n\,s_k}\mathrm{Res}(Q_\lambda(w), 2T_n(w) - 2) =$$

$$(-1)^{n\,s_k}2^{-n\,s_{s_k}}\mathrm{Res}(2T_n(w) - 2, Q_\lambda(w)) = (-1)^{n\,s_k}\prod_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(w_\ell) - 2).$$

Схема доказательства 1

Фактически,

$$\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = (-1)^{n\,(s_k-1)} \prod_{\ell=1}^{s_k} (2\,T_n(w_\ell) - 2).$$

$\square$

Примеры 1

Example (Циклический граф $C_n = C_n(1)$)

Изложенная теория приводит к необходимости нахождения корней уравнения $\lambda - 2 + 2T_1(w) = 0$ или $\lambda - 2 + 2w = 0$. Таким корнем является $w = \frac{2-\lambda}{2}$. Подставляя полученное значение в формулу для характеристического полинома, получим $\chi_n(\lambda) = 2T_n(\frac{2-\lambda}{2}) - 2$.

Используя представление полинома Чебышева в тригонометрической форме $T_n(w) = \cos(n \arccos(w))$, можно показать, что последовательности $\chi_n(1)$, $\chi_n(2)$, $\chi_n(3)$ и $\chi_n(4)$ являются периодическими с периодами $6, 4, 3$ и 2 соответственно.

Примеры 1

Example (Циркулянтный граф $C_n(1,2)$)

Как и ранее, ищем корни соответствующего уравнения $\lambda - 2 + 2T_1(w) + 2T_2(w) = \lambda + 4w^2 + 2w - 6$. Это величины $w_1 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{25 - 4\lambda}\right)$ и $w_2 = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{25 - 4\lambda}\right)$. Соответственно, $\chi_n(\lambda)$ имеет вид $(2T_n(w_1) - 2)(2T_n(w_2) - 2)$.

Заметим, что последовательности $\chi_n(4)$, $\chi_n(5)$ и $\chi_n(6)$ — периодичны с периодами $6, 5$ и 12 соответственно.

Характеристический полином для циркулянтных графов с нечетной валентностью

В случае циркулянтных графов $C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ с нечетной валентностью вершин удобно ввести следующий ассоциированный полином Лорана $P(z) = 2k + 1 - \sum_{\ell=1}^{k}(z^{s_\ell} + z^{-s_\ell})$. Тогда, спектр матрицы Лапласа имеет вид $\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) - (-1)^j$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, где $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}$.
Справедлива следующая теорема.

Характеристический полином для циркулянтных графов с нечетной валентностью

Theorem (2)

Пусть $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ *— циркулянтный граф нечетной валентности. Тогда характеристический полином* $\chi_n(\lambda)$ *матрицы Лапласа графа* G_n *вычисляется по формуле*

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(u_\ell) - 2)(2T_n(v_\ell) + 2),$$

где $T_n(w)$ *— полином Чебышева первого рода степени* n, *а величины* u_ℓ, v_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, s_k$ *— все корни полиномов*
$Q_\lambda(u) = \lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(u)$ *и* $R_\lambda(v) = \lambda - 2k - 2 + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(v)$.

Схема доказательства 2

Оно, по-прежнему, основано на свойствах результантов. Пологая $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi\mathtt{i}}{n}}$, имеем

$$(-1)^{2n}\prod_{j=0}^{2n-1}(\lambda-\lambda_j)=\prod_{j=0}^{2n-1}(\lambda-2k-1+(-1)^j+\sum_{\ell=1}^{k}(\varepsilon_{2n}^{j\,s_\ell}+\varepsilon_{2n}^{-j\,s_\ell}))=$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda-2k+\sum_{\ell=1}^{k}(\varepsilon_{n}^{j\,s_\ell}+\varepsilon_{n}^{-j\,s_\ell}))\times\frac{\prod\limits_{j=0}^{2n-1}(\lambda-2k-2+\sum\limits_{\ell=1}^{k}(\varepsilon_{2n}^{j\,s_\ell}+\varepsilon_{2n}^{-j\,s_\ell}))}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(\lambda-2k-2+\sum\limits_{\ell=1}^{k}(\varepsilon_{n}^{j\,s_\ell}+\varepsilon_{n}^{-j\,s_\ell}))}=$$

Схема доказательства 2

$$2^{-2n\,s_k}\,\mathrm{Res}(Q_\lambda(u),\,T_n(u)-1)\frac{\mathrm{Res}(R_\lambda(v),\,T_{2n}(v)-1)}{\mathrm{Res}(R_\lambda(u),\,T_n(v)-1)} =$$

$$2^{-2n\,s_k}\,\mathrm{Res}(T_n(u)-1,\,Q_\lambda(u))\frac{\mathrm{Res}(T_{2n}(v)-1,\,R_\lambda(v))}{\mathrm{Res}(T_n(v)-1,\,R_\lambda(v))} =$$

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(u_\ell)-2)\frac{T_{2n}(v_\ell)-1}{T_n(v_\ell)-1} = \prod_{\ell=1}^{s_k}(2T_n(u_\ell)-2)(2T_n(v_\ell)+2).$$

В конце мы используем следующее тождество между полиномами Чебышева $T_{2n}(w)-1 = 2(T_n(w)+1)(T_n(w)-1)$. □

Примеры 2

Example (Циркулянтный граф $C_{2n} = C_{2n}(1, n)$. Лестница Мебиуса)

Решаем два уравнения $\lambda - 2 + 2T_1(u) = \lambda - 2 + 2u = 0$ и $\lambda - 4 + 2T_1(v) = \lambda - 4 + 2v = 0$. Их решения — это $u = \frac{2-\lambda}{2}$ и $v = \frac{4-\lambda}{2}$. Отсюда

$$\chi_n(\lambda) = (2T_n(\frac{2-\lambda}{2}) - 2)(2T_n(\frac{4-\lambda}{2}) + 2)$$

Заметим, что последовательности $\chi_n(2)$, $\chi_n(3)$ и $\chi_n(4)$ — периодичны с периодами $4, 3$ и 2 соответственно.

Примеры 2

Example (Циркулянтный граф $C_{2n}(1,2,n)$)

Имеем следующие полиномы
$Q_\lambda(u) = \lambda - 4 + 2T_1(u) + 2T_2(u) = \lambda + 4u^2 + 2u - 6$ и
$R_\lambda(v) = \lambda - 6 + 2T_1(v) + 2T_2(v) = \lambda + 4v^2 + 2v - 8$. Их корни это
$u_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{25 - 4\lambda}\right)$ и $v_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{33 - 4\lambda}\right)$. Отсюда
характеристический полином $\chi_n(\lambda)$ имеет вид
$(2T_n(u_1) - 2)(2T_n(u_2) - 2)(2T_n(v_1) + 2)(2T_n(v_2) + 2)$.

Можно показать, что последовательность $\chi_n(6)$ — периодична с периодом 12.

Выделение целочисленного квадрата из характеристического полинома

Следующие две теоремы описывают целочисленное разложение характеристического полинома циркулянтного графа на малое число линейных множителей и квадрат подходящего целочисленного полинома.

Theorem (3)

Рассмотрим циркулянтный граф $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ четной валентности. Положим p равным числу нечетных элементов последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда существует последовательность целочисленных полиномов $a_n(\lambda)$ такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа G_n задается формулами: $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$ при четном n и $(-\lambda)a_n(\lambda)^2$ при нечетном n.

Выделение целочисленного квадрата из характеристического полинома

Theorem (4)

Рассмотрим циркулянтный граф $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ *с нечетной валентностью вершин. Положим число* p *равным числу нечетных элементов последовательности* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. *Тогда существует последовательность целочисленных полиномоов* $a_n(\lambda)$ *такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа* G_n *задается следующими формулами:* $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$ *при четном* n *и* $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p - 2)a_n(\lambda)^2$ *при нечетном* n.

Схема доказательства 3

Доказательство основано на следующих рассуждениях. Прежде всего заметим, что число p нечетных элементов последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$ может быть вычислено по формуле $p = \sum_{l=1}^{k} \frac{1-(-1)^{s_l}}{2}$. Собственные значения матрицы Лапласа графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ задаются как $\lambda_j = P(\varepsilon_n^j)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, где $P(z) = 2k - \sum_{l=1}^{k}(z^{s_l} + z^{-s_l})$, а $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Имеем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_j > 0$ для $j = 1, 2, ..., n-1$. Заметим, что $\lambda_{n-j} = \lambda_j$. Пусть n — нечетно. Тогда

$$\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) =$$

$$-\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2}(\lambda - \lambda_j) \prod_{j=(n+1)/2}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2}(\lambda - \lambda_j)^2.$$

Cyclotomic polynomials

Recall the n-th cyclotomic polynomial is defined as $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$, where $\mu(n)$ is the Moebius function. All the roots of this polynomial are $e^{\frac{2\pi\, i\, k}{n}}$, where $1 \le k < n$ runs through all integers coprime to n. One of the basic properties of cyclotomic polynomials is the equality $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Theorem (Periods of cyclotomic decompsition)

Let λ be a given integer. Consider the following degree $2s_k$ polynomial $r(x) = x^{s_k} R(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}))$. Then the sequence $\chi_n(\lambda)$ is periodic with period N if and only if $r(x)$ is a product of cyclotomic polynomials which are divisors of polynomial $x^N - 1$.

Tables of cyclotomic decomosition 1

Periodic sequences	Cyclotomic decomposition of $r(x)$	Period
Graph $C_n(1)$		
$\chi_n(1)$	$\Phi_6(x)$	6
$\chi_n(2)$	$\Phi_4(x)$	4
$\chi_n(3)$	$\Phi_3(x)$	3
$\chi_n(4)$	$\Phi_2^2(x)$	2
Graph $C_n(1,2)$		
$\chi_n(4)$	$\Phi_2^2(x)\Phi_6(x)$	6
$\chi_n(5)$	$\Phi_5(x)$	5
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_4(x)$	12
Graph $C_n(1,3)$		
$\chi_n(3)$	$\Phi_3(x)\Phi_{10}(x)$	30
$\chi_n(4)$	$\Phi_4(x)\Phi_8(x)$	8(4)
$\chi_n(5)$	$\Phi_5(x)\Phi_6(x)$	30

Tables of cyclotomic decomosition 2

Periodic sequences	Cyclotomic decomposition of $r(x)$	Period
	Graph $C_n(1,2,3)$	
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_8(x)$	24
$\chi_n(7)$	$\Phi_7(x)$	7
$\chi_n(8)$	$\Phi_2^2(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)$	6
	Graph $C_n(1,2,4)$	
$\chi_n(6)$	$\Phi_4(x)\Phi_9(x)$	36
$\chi_n(7)$	$\Phi_6(x)\Phi_7(x)$	42
	Graph $C_n(1,3,4)$	
$\chi_n(8)$	$\Phi_2^2(x)\Phi_6(x)\Phi_8(x)$	12(6)
	Graph $C_n(2,3,4)$	
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_{12}(x)$	12

Tables of cyclotomic decomosition 3

Periodic sequences	Cyclotomic decomposition of $r(x)$	Period
	Graph $C_n(2,3,4)$	
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_{12}(x)$	12
	Graph $C_n(1,2,5)$	
$\chi_n(5)$	$\Phi_5(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x)$	60
$\chi_n(6)$	$\Phi_8(x)\Phi_9(x)$	72
	Graph $C_n(1,3,5)$	
$\chi_n(5)$	$\Phi_5(x)\Phi_{14}(x)$	70
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x)$	12
$\chi_n(7)$	$\Phi_7(x)\Phi_{10}(x)$	70
	Graph $C_n(1,4,5)$	
$\chi_n(7)$	$\Phi_7(x)\Phi_{12}(x)$	84
$\chi_n(8)$	$\Phi_2^2(x)\Phi_8(x)\Phi_{10}(x)$	10

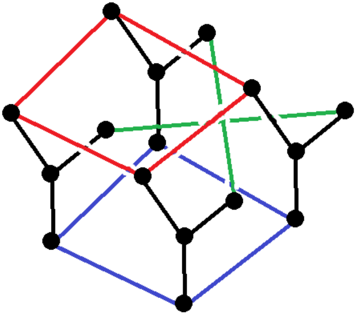
Tables of cyclotomic decomosition 4

Periodic sequences	Cyclotomic decomposition of $r(x)$	Period
Graph $C_n(2,3,5)$		
$\chi_n(8)$	$\Phi_2^2(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{10}(x)$	30
Graph $C_n(3,4,5)$		
$\chi_n(5)$	$\Phi_5(x)\Phi_{18}(x)\Phi_{10}(x)$	90
$\chi_n(6)$	$\Phi_3(x)\Phi_{16}(x)\Phi_{10}(x)$	48
Graph $C_n(2,4,5)$ is not periodic for any positive integer λ		

Examples of periodicity

Family of graphs	Periodic sequence	Period
$C_n(1,k)$	$\chi_n(4)$	$2(k^2-1)$
$C_n(k,l)$	$\chi_n(4)$	$2(l^2-k^2)$
$C_n(1,k,k+1)$	$\chi_n(8)$	$2k(k+1)$
$C_n(1,k,k+2)$	$\chi_n(6)$	$12(k+1)$
$C_n(k,k+1,k+2,k+3)$	$\chi_n(8)$	$4(2k+3)$
$C_n(m-1,m+1,n-1,n+1)$	$\chi_n(??)$	??
$C_n(m-1,m,m+1,n-1,n,n+1)$	$\chi_n(10)$	??
$C_n(1,2,\ldots,k)$	$\chi_n(2k)$	$2k(k+1)$

Circulant foilations



Circulant foilation Y_n.

Here, the base graph is Y-graph

Laplace Matrix or Circulant Foliations

The Laplacian matrix $L = D(H_n) - A(H_n)$ of the circulant foilation H_n is given by the formula

$$L = \begin{pmatrix} L_1(\mathtt{T}_n) & -a_{1,2}I_n & -a_{1,3}I_n & \dots & -a_{1,m}I_n \\ -a_{2,1}I_n & L_2(\mathtt{T}_n) & -a_{2,3}I_n & \dots & -a_{2,m}I_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ -a_{m,1}I_n & -a_{m,2}I_n & -a_{m,3}I_n & \dots & L_m(\mathtt{T}_n) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

where $L_i(z) = 2k_i + d_i - \sum\limits_{j=1}^{k_i}(z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}})$ if $G_i \neq C_n(\emptyset)$ and $L_i(z) = d_i$ if $G_i = C_n(\emptyset)$.

Frame Title

Also we introduce the polynomial

$$Q_\lambda(w) = \det \begin{pmatrix} \omega_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & \omega_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & \omega_m \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

where $\omega_i = 2k_i + d_i - \lambda - \sum\limits_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w),\ i = 1, 2, \dots, m.$

Lemma

Lemma

Let $V' = (v_1, v_2, \ldots, v_{m'})$ be the subset (possibly empty) of vertices of the graph H with trivial circulant fibers $C_n(\emptyset)$. Define H' as a vertex-induced subgraph of graph H formed by V'. Then leading term of the polynomial $P_\lambda(z)$ is given by the following formula $(-1)^{m-m'}\eta\, z^s$, where

$$\eta = \det(L(H', X')),\; s = \sum_{j=1}^{m} s_{j,k_j},\; X' = (d_1 - \lambda, d_2 - \lambda, \ldots, d_{m'} - \lambda),$$

and d_j is a valency of vertex v_j in graph H.

Structural theorem for circulant foilation

Theorem

Characteristic polynomial $\chi_n(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ of the Laplacian matrix $L = L(H_n)$ of graph $H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$, up to sign, is given by the formula

$$\eta^n \prod_{p=1}^{s} (2T_n(w_p) - 2),$$

where $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} + \cdots + s_{m,k_m}$, w_p, $p = 1, 2, \ldots, s$ are all the roots of the equation $Q_\lambda(w) = 0$ and η is the same as in Lemma 2.

Theorem for foliations

Let H be a finite connected graph on m vertices. Consider the circulant foliation $H_n = H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$, where $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Denoted by $Q_\lambda(w)$ the associated with H polynomial.

Theorem

Let $\chi_n(\lambda)$ and $\chi_H(\lambda)$ be the Laplace characteristic polynomials of graphs H_n and H respectively. Then there exists a sequence of integer polynomials $a(n)$ such that

1° $\chi_n(\lambda) = \chi_H(\lambda)\, a(n)^2$, *if n is odd,*

2° $\chi_n(\lambda) = Q_\lambda(-1)\chi_H(\lambda)\, a(n)^2$, *if n is even.*

Frame Title

Theorem (Asymtotics. Part 1)

Consider the sequence $f(n) = |\chi_n(\lambda)|$. *Then*

1. *Suppose that all the root of polynomial* $Q_\lambda(w)$ *are outside of segment* $[-1, 1]$. *Then the asymptotic behavior of sequence* $f(n)$ *is given by the formula*

$$f(n) \sim A_\lambda^n,\ n \to \infty,$$

where $A_\lambda = \exp(\int\limits_0^1 \log|Q_\lambda(\cos 2\pi t)|dt)$.

Frame title

Theorem (Asymtotics. Part 2)

1. *(i) Suppose that all the root of polynomial $Q_\lambda(w)$ are on the segment $[-1, 1]$. Then the sequence $f(n)$ is bounded from above by $\eta\, 4^s$, where s is degree of $Q_\lambda(w)$.*
   (ii) Moreover, if each of the roots of $Q_\lambda(w)$ is of the form $w = \cos(q\pi)$, where q is a rational number, then both sequences $f(n)$ and $\chi_n(\lambda)$ are periodic.

Frame title

Theorem (Asymtotics. Part 3)

1. *Suppose that polynomial* $Q_\lambda(w)$ *has roots on the segment* $[-1,1]$ *and outside of* $[-1,1]$*. Then* $f(n) = f^+(n)f^-(n)$*, where* $f^+(n)$ *is bounded from above by* 4^{s+}*, and* $f^+(n) \sim (A_\lambda^-)^n$*,* $n \to \infty$*, where* s^+ *is degree of* $Q_\lambda^+(w)$ *and* $A_\lambda^- = \exp(\int\limits_0^1 \log|Q_\lambda^-(\cos 2\pi t)|dt)$.