

# Характеристические полиномы дискретных моделей листа Мебиуса и бутылки Клейна

**И.А. Медных**

Институт математики им. С.Л. Соболева

**Конференция по комплексному анализу и  
алгебраической геометрии,  
посвященная 75 –летию А.К. Циха,  
20–26 апреля, 2026 г. Сириус, Сочи**

24 апреля 2026 г.

Римановы поверхности, моделируемые в Евклидовой геометрии, обладают особыми свойствами и являются своеобразными исключениями в теории римановых поверхностей. Их список конечен и хорошо известен. Это тор, бутылка Клейна, лист Мебиуса и сама Евклидова плоскость. За исключением плоскости, фундаментальные группы этих поверхностей являются нехопфовыми и допускают нетривиальные эндоморфизмы. Это обстоятельство приводит к возможности нетривиального накрытия поверхности над собой. В докладе рассматриваются дискретные версии указанных выше евклидовых поверхностей. Они представлены в виде прямоугольных графов-решеток, с подходящим отождествлением сторон. Это конечные графы, у которых большинство вершин имеет валентность 4.

Целью является изучение оператора Лапласа таких графов и вычисление его характеристического полинома. Результаты будут представлены в виде явных формул, выраженных в терминах полиномов Чебышева.

В дальнейшем предполагается использовать описываемый подход для исследования свойств других дискретных моделей объектов маломерной топологии. Например, таких как двумерные орбиолды.

Приведем основные определения и понятия, необходимые для доклада.

Под *графом* понимается понятие простого графа, то есть не ориентированный граф без петель и кратных ребер. Матрицей Лапласа графа  $G$  называется матрица  $L(G) = D(G) - A(G)$ , где  $D(G)$  — матрица степеней (валентностей) вершин  $G$ , а  $A(G)$  — матрица смежности  $G$ . Известно, что матрица Лапласа графа имеет неотрицательный вещественный спектр. Связный граф имеет ровно одно нулевое собственное значение.

**Замечание:** Отметим, что наличие петель в графе не влияет на матрицу Лапласа графа.

Через  $\mathbb{E}_n$  будем обозначать единичную матрицу порядка  $n$ , а через  $J_n$  — антидиагональную единичную матрицу порядка  $n$ .

Обозначение  $K_n$  будет использоваться для квадратной матрицы порядка  $n$ , у которой только два выделенных элемента отличны от нуля. Это элементы на позициях  $(1, n)$  и  $(n, 1)$ , равные 1. Приведем два примера таких матриц для  $n = 2, 3$ .

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В рамках доклада, мы рассматриваем класс циркулянтных матриц. Такие матрицы обозначаются как  $\text{circ}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Циркулянтная матрица — это квадратная матрица порядка  $n$  и строится на основе строки  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  длины  $n$  следующим образом

$$\text{circ}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Полный список собственных значений такой матрицы это

$$\lambda_j = a_1 + a_2 \varepsilon_n^j + \dots + a_n \varepsilon_n^{(n-1)j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

Здесь  $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  — первообразный корень из единицы степени  $n$ .  
Соответствующие собственные вектора

$$v_j = (1, \varepsilon_n^j, \dots, \varepsilon_n^{(n-1)j}), \quad j = 1, \dots, n,$$

Все циркулянтные матрицы над заданным полем  $\mathbb{C}$  могут быть получены как полиномы с коэффициентами из  $\mathbb{C}$  от простейшей циркулянтной матрицы  $T_n = \text{circ}(0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ раз}})$ .

## Предварительные сведения

В докладе используются полиномы Чебышева. Напомним определение и несколько основных свойств.

Полиномы Чебышева первого рода  $T_n(x)$  и второго рода  $U_n(x)$  — это полиномы степени  $n$ , определяемые как

$$T_n(x) = \cos n\theta \text{ и } U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \text{ где } \theta = \arccos x.$$

Также можно ввести в рассмотрение полиномы Чебышева третьего  $V_n(x)$  и четвертого рода  $W_n(x)$ . Их соответствующие тригонометрические формы записи — это

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \theta/2} \text{ и } W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \theta/2}, \text{ где } \theta = \arccos x.$$

Выпишем формулы, связывающих введенные полиномы

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x).$$

Все полиномы Чебышева удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению

$$\mathcal{R}_{n+2}(x) = 2x\mathcal{R}_{n+1}(x) - \mathcal{R}_n(x), \mathcal{R}_0(x) = 1,$$

но с разными начальными данными для  $n = 1$ . А именно,

$$\mathcal{T}_1(x) = x, \mathcal{U}_1(x) = 2x, \mathcal{V}_1(x) = 2x - 1, \mathcal{W}_1(x) = 2x + 1.$$

В частности, из выше приведенных условий вытекает, что полиномы  $2\mathcal{T}_n(\frac{x}{2})$ ,  $\mathcal{U}_n(\frac{x}{2})$ ,  $\mathcal{V}_n(\frac{x}{2})$  и  $\mathcal{W}_n(\frac{x}{2})$  являются полиномами с целыми коэффициентами.

Для нахождения характеристического полинома Лапласа простейших моделей поверхностей важную роль играет теорема М. Фидлера, описывающая характеристический полином Лапласа декартова произведения  $G_1 \times G_2$  двух графов  $G_1$  и  $G_2$ .

## Theorem (М. Фидлер)

*Характеристический полином Лапласа декартова произведения  $G_1 \times G_2$  двух графов  $G_1$  и  $G_2$  может быть представлен в виде*

$$\chi_{G_1 \times G_2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{|V(G_1)|} \prod_{j=1}^{|V(G_2)|} (\lambda - \lambda_i - \mu_j) = \prod_{j=1}^{|V(G_2)|} \chi_{G_1}(\lambda - \mu_j).$$

*Здесь  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, |V(G_1)|}$  и  $\{\mu_j\}_{j=1, \dots, |V(G_2)|}$  — полные наборы корней полиномов  $\chi_{G_1}(\lambda)$  и  $\chi_{G_2}(\mu)$ , соответственно.*

# Простейшие примеры.

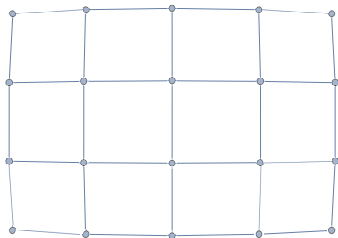


Рис.: Прямоугольная решетка размера  $4 \times 5$  или граф  $P_4 \times P_5$

# Простейшие примеры.

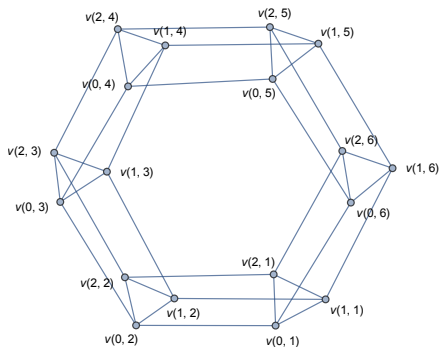


Рис.: Дискретный тор  $T_{3,6} = C_3 \times C_6$

# Простейшие примеры.

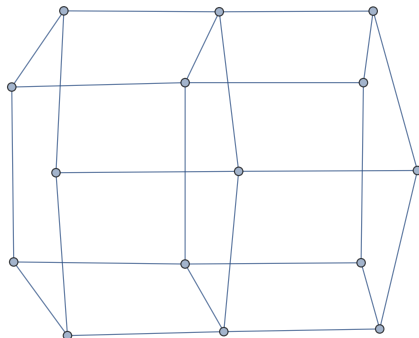


Рис.: Дискретный цилиндр  $DC_{3,5} = P_3 \times C_5$

## Простейшие примеры.

Характеристические полиномы матриц Лапласа графов  $P_m$  и  $C_n$  :

$$\chi_{P_m}(\lambda) = \lambda U_{m-1}\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)$$

и

$$\chi_{C_n}(\lambda) = 2T_n\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 2.$$

Здесь  $T_n(x)$  и  $U_m(x)$  — полиномы Чебышева первого и второго рода степеней  $n$  и  $m$ .

Корнями  $\chi_{P_m}(\lambda)$  служат числа  $2 - 2 \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m}\right)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Корни полинома  $\chi_{C_n}(\lambda)$  имеют вид  $2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

## Простейшие примеры.

Отсюда, применяя теорему Фидлера, можно получить, например,

**Theorem** (Top  $T_{m,n} = C_m \times C_n$ )

*Характеристический полином матрицы Лапласа дискретного тора  $T_{m,n} = C_m \times C_n$  задается формулой*

$$\chi_{T_{m,n}}(\lambda) = \prod_{j=1}^n (2T_m(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{2\pi j}{n}) - 2).$$

Эта формула была получена в работе (Kwon, Mednykh, Mednykh, Discrete Applied Mathematics, 2025).

Схожие результаты получаются и для прямоугольной решетки и для дискретного цилиндра.

# Дискретный лист Мебиуса.

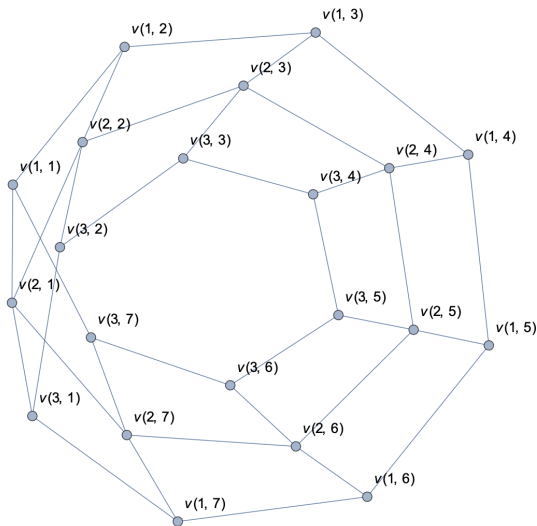
Для построения дискретной модели листа Мебиуса рассмотрим прямоугольную решетку — декартово произведение графов-путей  $P_m \times P_n$ . Обозначим вершины такой решетки через  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ребра прямоугольной решетки задаются объединением двух списков

$$\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n-1} \text{ и } \{v_{i,j}, v_{i+1,j}\}_{i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, n}.$$

Соединим два края решетки длины  $m$ . Один край содержит вершины  $v_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а второй — вершины  $v_{i,n}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Добавим ребра вида  $\{v_{i,1}, v_{m-i+1,n}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Так как вершины, образующие края решетки длины  $m$ , соединены в противоположном порядке, то в результате получим дискретную модель листа Мебиуса  $MS_{m,n}$ .

# Дискретный лист Мебиуса.

Проиллюстрируем случай  $m = 3$ ,  $n = 7$  на следующем рисунке.



# Дискретный лист Мебиуса.

Основным результатом доклада является

## Theorem (Лист Мебиуса $MS_{m,n}$ )

*Характеристический полином матрицы Лапласа дискретного листа Мебиуса  $MS_{m,n}$  задается формулой*

$$\chi_{MS_{m,n}}(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left( 2T_m\left(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{\pi(j-1)}{n}\right) + (-1)^j 2 \right).$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Доказательство. Чтобы найти характеристический полином Лапласа дискретного листа Мебиуса нам необходимо вычислить определитель  $\det(L_{MS_{m,n}} - \lambda \mathbb{E}_{mn})$ . Для этого опишем матрицу Лапласа нашей модели дискретного листа Мебиуса в матрично-блочном виде. Будем строить ее по слоям решетки длины  $m$ . Каждому такому слою соответствует  $m \times m$  блок вида

$$\Pi_m = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

стоящий на диагонали блочной матрицы.

# Дискретный лист Мебиуса.

Каждый слой соединен с соседними слоями. В итоге, матрица Лапласа дискретного листа Мебиуса это блочная матрица вида

$$L(MS_{m,n}) = \begin{pmatrix} \Pi_m & -\mathbb{E}_m & 0 & \cdots & 0 & -J_m \\ -\mathbb{E}_m & \Pi_m & -\mathbb{E}_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{E}_m & \Pi_m & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Pi_m & -\mathbb{E}_m \\ -J_m & 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{E}_m & \Pi_m \end{pmatrix}.$$

Напомним, что  $J_m$  — это антидиагональная матрица составленная из единиц.

# Дискретный лист Мебиуса.

Займемся вопросом одновременной диагонализации блоков. Заметим, что  $\Pi_m = 4\mathbb{E}_m - \Phi_m$ , где матрица  $\Phi_m$  имеет вид

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

То есть,  $\Phi_m$  — это квадратная матрица порядка  $m$ , такая, что ее элементы над и под главной диагональю, а также на позициях  $(1, 1)$  и  $(m, m)$  равны 1, а остальные элементы равны 0.

# Дискретный лист Мебиуса.

Опишем вид матрицы, сопрягающей  $\Phi_m$  к диагональной форме. Для этого найдем собственные вектора и собственные значения матрицы  $\Phi_m$ . Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Phi_m X = \lambda X,$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t$  – ненулевой вектор-столбец, а  $\lambda$  – неизвестный параметр. Такая система может быть записана как

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \lambda x_1, \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2, \\ \dots \\ x_{m-2} + x_m = \lambda x_{m-1}, \\ x_{m-1} + x_m = \lambda x_m. \end{array} \right. \quad (1)$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Исходя из рекуррентных соотношений  $x_j + x_{j+2} = \lambda x_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq m-2$ , будем искать решение в виде линейной комбинации полиномов Чебышева. Положим  $x_j = \alpha \mathcal{U}_{j-1}(\frac{\lambda}{2}) + \beta \mathcal{U}_j(\frac{\lambda}{2})$ . Тогда, в силу базовых свойств полиномов Чебышева, все соотношения системы (1), кроме первого и последнего, выполнены. Выберем  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы выполнялись соотношения  $x_1 + x_2 = \lambda x_1$ ,  $x_{m-1} + x_m = \lambda x_m$ . В силу произвольности первого элемента собственного вектора, положим  $x_1 = 1$ . Отсюда,  $\alpha \mathcal{U}_0(\frac{\lambda}{2}) + \beta \mathcal{U}_1(\frac{\lambda}{2}) = 1$  или  $\alpha + \beta \lambda = 1$ . Положим  $\alpha = 1 - \beta \lambda$ . Из соотношения  $x_1 + x_2 = \lambda x_1$  получим  $1 + \lambda(1 - \beta \lambda) + \beta(-1 + \lambda^2) = \lambda$ . Откуда,  $\beta = 1$ . В результате, применяя базовую рекурсию полиномов Чебышева  $\mathcal{U}_k(z) = 2z\mathcal{U}_{k-1}(z) - \mathcal{U}_{k-2}(z)$  для половинного аргумента и формулу  $\mathcal{V}_j(z) = \mathcal{U}_j(z) - \mathcal{U}_{j-1}(z)$ , получим

$$x_j = (1 - \lambda)\mathcal{U}_{j-1}(\frac{\lambda}{2}) + \mathcal{U}_j(\frac{\lambda}{2}) = \mathcal{V}_{j-1}(\frac{\lambda}{2}),$$

где  $\mathcal{V}_k(z)$  — полином Чебышева 3-го рода.

## Дискретный лист Мебиуса.

Последнее соотношение системы  $x_{m-1} + (1 - \lambda)x_m = 0$  задает полином от  $\lambda$ , чьими корнями является искомые собственные значения. Имеем

$$(1 - \lambda)U_{m-2}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + U_{m-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + (1 - \lambda)\left((1 - \lambda)U_{m-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + U_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right).$$

Пользуясь базовой рекурсией для полиномов Чебышева, перепишем полином для собственных значений как  $(2 - \lambda)U_{m-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$ .

Поскольку это полином степени  $m$ , его корнями являются все собственные значения системы (1). Другими словами

$$\chi_{\Phi_m}(\lambda) = (2 - \lambda)U_{m-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Корнями этого полинома являются числа

$$\lambda_j = 2 \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m}\right), j = 1, \dots, m.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Соответствующими собственными векторами матрицы  $\Phi_m$  являются

$$X_j = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1(\frac{\lambda_j}{2}) \\ \mathcal{V}_2(\frac{\lambda_j}{2}) \\ \vdots \\ \mathcal{V}_m(\frac{\lambda_j}{2}) \end{pmatrix}.$$

В векторе  $X_j$  выделим его  $k$ -ый элемент  $X_j[k] = \mathcal{V}_{k-1}(\frac{\lambda_j}{2})$ .  
Матрица  $\omega_m$ , составленная из вектор-столбцов  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , сопрягает  $\Phi_m$  к диагональной форме. То есть,

$$\omega_m^{-1} \Phi_m \omega_m = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

Соответственно, матрица  $\omega_m$  сопрягает матрицу  $\Pi_m = 4\mathbb{E}_m - \Phi_m$  к диагональной матрице  $D_1 = \text{diag}(4 - \lambda_1, 4 - \lambda_2, \dots, 4 - \lambda_m)$ .

# Дискретный лист Мебиуса.

Вспомним, что для рассматриваемой модели листа Мебиуса, ее матрица Лапласа содержит два блока вида  $-J_m$ . Докажем следующее утверждение

$$\omega_m^{-1} J_m \omega_m = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, (-1)^{m-1}).$$

Это проверяется непосредственно.

Обозначим матрицу  $\text{diag}(1, -1, 1, \dots, (-1)^{m-1})$  через  $\tilde{E}_m$ .

# Дискретный лист Мебиуса.

Теперь рассмотрим блочно-диагональную матрицу  $\Omega$  размера  $n \times n$ , с диагональными элементами  $\omega_m$ . Для такой матрицы верно следующее соотношение

$$\Omega^{-1} L(MS_{m,n}) \Omega = \begin{pmatrix} D_1 & -\mathbb{E}_m & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\mathbb{E}}_m \\ -\mathbb{E}_m & D_1 & -\mathbb{E}_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{E}_m & D_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_1 & -\mathbb{E}_m \\ -\tilde{\mathbb{E}}_m & 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{E}_m & D_1 \end{pmatrix}.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Последняя матрица распадается на  $m$  квадратных матриц размера  $n \times n$  вида

$$B_j = \begin{pmatrix} 4 - \lambda_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^j \\ -1 & 4 - \lambda_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 - \lambda_j & -1 \\ (-1)^j & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 - \lambda_j \end{pmatrix}.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Для этих матриц верно тождество

$B_j = (4 - \lambda_j)\mathbb{E}_n - \tilde{\Phi}_n(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Здесь  $\tilde{\Phi}_n(j)$  обозначает  $n \times n$  матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{j-1} \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (-1)^{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Для нечетных  $j$ , матрица  $\tilde{\Phi}_n(j)$  совпадает с матрицей смежности графа-цикла  $C_n$ . Ее характеристический полином Лапласа (с точностью до знака) это

$$\chi_{\tilde{\Phi}_n(j)}(\mu) = 2\mathcal{T}_n\left(\frac{\mu}{2}\right) - 2.$$

Отсюда, для нечетных  $j$ , характеристический полином матрицы  $B_j$  задается формулой

$$\chi_{B_j}(\lambda) = 2\mathcal{T}_n\left(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m}\right)\right) - 2.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Для четного  $j$  применим ту же схему нахождения собственных значений и собственных векторов, что и для матрицы  $\Phi_n$ . Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\tilde{\Phi}_n(j) Y = \mu Y,$$

где  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$  — ненулевой вектор–столбец, а  $\mu$  — неизвестный параметр. Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} y_2 - y_n = \mu y_1, \\ y_1 + y_3 = \mu y_2, \\ \dots \\ y_{n-2} + y_n = \mu y_{n-1}, \\ -y_1 + y_{n-1} = \mu y_n. \end{cases} \quad (2)$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Решая систему (2) указанным выше методом, получим, что

$$\chi_{\tilde{\Phi}_n(j)}(\mu) = 2\mathcal{T}_n\left(\frac{\mu}{2}\right) + 2$$

является характеристическим полином матрицы  $\tilde{\Phi}_n(j)$  для четного  $j$ . Его корнями служат числа

$$\mu_i = 2 \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда заключаем, что для четных  $j$ , характеристический полином матрицы  $B_j$  задается формулой

$$\chi_{B_j}(\lambda) = \chi_{\tilde{\Phi}_n(j)}\left(4 - \lambda_j - \lambda\right) = 2\mathcal{T}_n\left(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m}\right)\right) + 2.$$

# Дискретный лист Мебиуса.

Теперь, для получения полного характеристического полинома Лапласа графа  $MS_{m,n}$  достаточно перемножить характеристические полиномы всех блоков  $B_j, j = 1, \dots, m$ . Следовательно,

$$\chi_{MS_{m,n}} = \prod_{j=1}^m \left( 2T_n \left( 2 - \frac{\lambda}{2} - \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m}\right) \right) + (-1)^j 2 \right).$$

# Дискретная бутылка Клейна.

Для построения дискретной модели бутылки Клейна  $KB_{m,n}$  предварительно рассмотрим дискретный прямоугольный цилиндр — декартово произведение графа-пути  $P_m$  на граф-цикл  $C_n$ . Обозначим вершины такого графа через  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ребра дискретного прямоугольного цилиндра задаются объединением трех списков

$$\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n-1}, \{v_{i,j}, v_{i+1,j}\}_{i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, n}, \\ \{v_{i,1}, v_{i,n}\}_{i=1, \dots, m}.$$

Для получения полного списка ребер дискретной бутылки Клейна к предыдущим спискам добавим еще один

$$\{v_{1,j}, v_{m,n-j+2}\}_{j=1, \dots, m}, \text{ полагая } v_{m,n+1} = v_{m,1}.$$

Определенные таким образом ребра соединяют края дискретного цилиндра с изменением ориентации. Причем вершина  $v_{1,1}$  соединяется с вершиной  $v_{m,1}$ .

# Дискретная бутылка Клейна.

Приведем один из возможных способов проиллюстрировать описываемый граф.

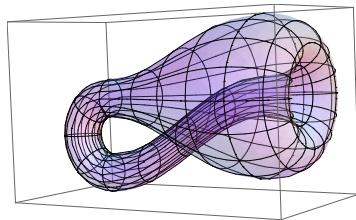


Рис.: Дискретная бутылка Клейна  $KB_{m,n}$

# Дискретная бутылка Клейна.

Справедлива следующая теорема.

## Theorem (Бутылка Клейна $KB_{m,n}$ )

Характеристический полином  $\chi_{KB_{m,n}}(\lambda)$  матрицы Лапласа дискретной бутылки Клейна задается нижеприведенными формулами.

Если  $n$  – нечетно, то  $\chi_{KB_{m,n}}(\lambda)$  равен

$$(2T_m(1 - \frac{\lambda}{2}) - 2) \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (2T_{2m}(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{2\pi j}{n}) - 2).$$

Если  $n$  – четно, то  $\chi_{KB_{m,n}}(\lambda)$  равен

$$(2T_m(1 - \frac{\lambda}{2}) - 2)(2T_m(3 - \frac{\lambda}{2}) - 2) \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (2T_{2m}(2 - \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{2\pi j}{n}) - 2).$$

## Следствия из полученных формул.

В данном разделе приводятся утверждения, описывающие связи между характеристическими полиномами рассмотренных выше графов.

### Замечание

*Для всех рассматриваемых решеток, за исключением дискретного листа Мебиуса, полином вида  $\chi_{\text{Type}_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{\text{Type}_{p,q}}(\lambda)$  для любых целых положительных чисел  $p$  и  $q$ . Это же верно и для дискретного листа Мебиуса, при условии, что  $p + q$  — четно.*

Это является отражением того факта, что евклидовы поверхности (с краем или без) могут нетривиальным образом накрывать сами себя.

## Следствия из полученных формул.

Доказательства этого и приведенных ниже замечаний основаны на явном виде формул, описывающих соответствующие характеристические полиномы, а также формул следующего вида.

$$\mathcal{T}_{2m}(x) - 1 = 2(\mathcal{T}_m(x) - 1)(\mathcal{T}_m(x) + 1).$$

$$\frac{\mathcal{T}_{qm}(x) - 1}{\mathcal{T}_m(x) - 1} = (2\mathcal{T}_m(x) + 2)(\mathcal{U}_{q-1}(\mathcal{T}_m(x)))^2, \text{ если } q \text{ — четно.}$$

$$\frac{\mathcal{T}_{qm}(x) + 1}{\mathcal{T}_m(x) + 1} = (\mathcal{W}_{\frac{q-1}{2}}(\mathcal{T}_m(x)))^2, \text{ если } q \text{ — нечетно.}$$

$$\frac{\mathcal{T}_{qm}(x) - 1}{\mathcal{T}_m(x) - 1} = (\mathcal{V}_{\frac{q-1}{2}}(\mathcal{T}_m(x)))^2, \text{ если } q \text{ — нечетно.}$$

## Замечание 1.

На что делится характеристический полином дискретного тора:

- 1 полином  $\chi_{DC_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{T_{pm,qn}}(\lambda)$  при условии, что одна из пар параметров  $(pm, qn)$  или  $(qn, pm)$  имеет вид  $(2\alpha m, \beta n)$  для целых  $\alpha, \beta$ .
- 2 полином  $\chi_{MS_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{T_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $p$  и  $q$  — четные.
- 3 полином  $\chi_{KB_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{T_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $p$  — четно.

## Замечание 2.

- 1 Полином  $\chi_{MS_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{DC_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $q$  — четно.
- 2 Полином  $\chi_{DC_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{MS_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $p$  — четно.
- 3 Полином  $\chi_{MS_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{KB_{pm,qn}}(\lambda)$  если  $p + q$  — четно.

## Замечание 3.

*Имеет место следующие свойства делимости характеристических полиномов:*

- 1 полином  $\chi_{P_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{DC_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $q$  — четно.
- 2 полином  $\chi_{P_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{T_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $p$  и  $q$  — четны.
- 3 полином  $\chi_{P_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{MS_{pm,qn}}(\lambda)$ , если  $p$  и  $q$  — четны.
- 4 полином  $\chi_{P_{m,n}}(\lambda)$  делит полином  $\chi_{KB_{pm,qn}}(\lambda)$  если  $p$  и  $q$  — четны.