Решетки, параллелоэдры и гипотеза Вороного

Алексей Гарбер

The University of Texas Rio Grande Valley

Дискретная геометрия и геометрия чисел
18 февраля 2026

План доклада

- Решетки
- Упаковки
- Покрытия
- Параллелоэдры

Объединяющая тема: полиэдральные вычисления иногда полезны

Соавторы моих результатов в данном докладе:

- Mathieu Dutour Sikirić
- Андрей Гаврилюк
- Александр Магазинов
- Achill Schürmann
- Clara Waldmann

Решетки

Определение

(Полномерной) **решеткой** в $\mathbb{R}^d$ называется множество целочисленных линейных комбинаций некоторого базиса.

$$\Lambda := \{a_1e_1 + \ldots + a_de_d \mid e_i \text{ — базис}, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Решетки

Определение

(Полномерной) **решеткой** в $\mathbb{R}^d$ называется множество целочисленных линейных комбинаций некоторого базиса.

$$\Lambda := \{a_1e_1 + \ldots + a_de_d \mid e_i \text{ — базис, } a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Кристаллографические группы

- Решетки это “простейшие” примеры кристаллографичеких групп

Определение

Подгруппа группы изометрий $\mathbb{R}^d$, у которой

- все орбиты дискретны и
- существует компактная фундаментальная область,

называется **кристаллографической группой**.

Мотивация: изучение геометрических и физических свойств кристаллов

18я проблема Гильберта

- Конечность семейства кристаллографических групп в $\mathbb{R}^d$
- Существование d-мерного многогранника, для которого существует разбиение $\mathbb{R}^d$, но который не является фундаментальной областью кристаллографической группы
- Плотнейшая упаковка сфер в $\mathbb{R}^3$ (гипотеза Кеплера)

18я проблема Гильберта

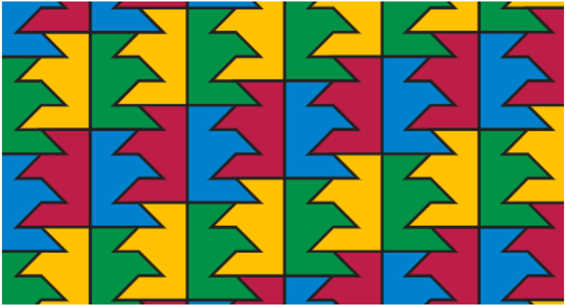
Часть 1: Конечность семейства кристаллографических групп в $\mathbb{R}^d$

- Доказано Bieberbach в 1911-12
- В любой кристаллографической группе в $\mathbb{R}^d$ есть d-мерная нормальная подгруппа трансляций конечного индекса
- Конечное количество вариантов для фактор-группы

18я проблема Гильберта

Часть 2: Существование d-мерного многогранника, для которого существует разбиение $\mathbb{R}^d$, но который не является фундаментальной областью кристаллографической группы

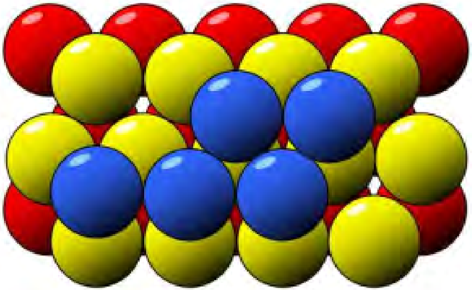
- Примеры Reinhardt, 1928 в $\mathbb{R}^3$ и Heesch, 1935 в $\mathbb{R}^2$;



18я проблема Гильберта

Часть 3: Плотнейшая упаковка сфер в $\mathbb{R}^3$ (гипотеза Кеплера)

- Hales, 2005 и 2017



- Вязовская вместе с Cohn, Kumar, Miller, и Радченко, плотнейшие упаковки в $\mathbb{R}^8$ и $\mathbb{R}^{24}$, 2017

Где используются решетки?

- Пост-квантовая криптография
- Коды, исправляющие ошибки
- Науки о материалах
- Целочисленные и рациональные многогранники
- и многое другое

Упаковки сфер

Задача

Для данной размерности d найти решетку Λ в $\mathbb{R}^d$, которая дает наиболее эффективную **упаковку** *равных шаров с центрами в точках Λ.*

- $\det(\Lambda)$ это объем параллелепипеда, построенного на векторах какого-то базиса Λ
- $\lambda_1(\Lambda)$ это длина кратчайшего вектора Λ

Цель: максимизировать $\dfrac{\lambda_1^d(\Lambda)}{\det(\Lambda)}$

Небольшие размерности

- Гексагональная решетка A_2 в $\mathbb{R}^2$
- Решетка $\mathsf{A}_3 = \mathsf{D}_3$ в размерности $d = 3$, Gauss, 1831
- Решетки D_4 и D_5 для $d = 4, 5$, Коркин и Золотарев, 1873 и 1877
- Решетки E_6, E_7, и E_8 при $d = 6, 7, 8$, Blichfeldt, 1935
- Решетка Лича Λ_{24} в размерности $d = 24$, Cohn и Kumar, 2009
- Слоистая решетка Λ_9 при $d = 9$, Dutour-Sikirić и van Woerden, 2025+

"Плотнейшие" решетки

- $\mathbb{Z}^d = \{(a_1, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}^d\}$
- $\mathsf{A}_d = \{(a_1, \ldots, a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} \mid a_1 + \ldots + a_{d+1} = 0\}$
- $\mathsf{D}_d = \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d \mid a_1 + \ldots + a_d \text{ четно}\}$
- $\mathsf{E}_8 = \mathsf{D}_8 \cup (\mathsf{D}_8 + (1/2, \ldots, 1/2))$
- E_7 и E_6 строятся пересечением E_8 и плоскости ортогональной кратчайшему вектору или гексагональной подрешетке, соответственно.
- Слоистые решетки Λ_d строятся последовательным размещением слоев, полученных из подходящих $(d-1)$-мерных решеток.

Алгоритм Вороного: от решеток к ПКФ

Определение

Пусть S^d это множество всех симметричных $d \times d$ матриц. Обозначим через $S^d_{>0}$ конус **положительных квадратичных форм** (ПКФ) в S^d,

$$S^d_{>0} = \{Q \in S^d \mid x^t Q x > 0 \text{ для всех ненулевых } x \in R^d\}$$

- Для любой решетки Λ, матрица Грама $G = ((e_i, e_j))$ произвольного базиса $B = (e_i)$ дает некоторую ПКФ. Для любой ПКФ, можно построить решетку с соответствующей матрицей Грама.

Упаковки шаров для ПКФ: Среди всех ПКФ $Q \in S^d_{>0}$, максимизировать *инвариант Эрмита*

$$\gamma(Q) = \frac{\lambda_1(Q)}{\det(Q)^{1/d}}$$

Алгоритм Вороного: совершенные формы

Определение

Для данного $\lambda > 0$, **полиэдр Рышкова** $P_\lambda \subset S^d_{>0}$ это множество всех ПКФ Q, для которых $\lambda_1(Q) \geq \lambda$. Вершины полиэдра Рышкова называются **совершенными формами**.

Теорема (Вороной, 1908)

Семейство совершенных форм конечно и одна из них оптимальна для упаковок шаров.

Алгоритм: Выберем одну совершенную форму. Из неравенств $x^tQx \geq \lambda$ для $x \in \mathbb{Z}^d$ получим ребра полиэдра Рышкова. Среди соседей, найдем "новые" совершенные. Повторям процесс для всех новых форм пока они появляются. Выбираем форму с плотнейшей упаковкой.

Совершенные формы в малых размерностях

- $d = 2$, Lagrange, 1770. Одна совершенная форма.
- $d = 3$, Gauss, 1831. Одна совершенная форма.
- $d = 4$, Коркин и Золотарев, 1877. Две формы.
- $d = 5$, Коркин и Золотарев, 1877. Три формы.
- $d = 6$, Barnes, 1957. 7 форм.
- $d = 7$, Jaquet-Chiffelle, 1993. 33 формы.
- $d = 8$, Dutour Sikirić, Schürmann, Vallentin, 2005. **10 916** формы.
- $d = 9$, Dutour Sikirić, van Woerden, 2025+. **2 237 251 040** совершенные формы.
  - У одной из вершин полиэдра Рышкова более $5 \cdot 10^{15}$ соседей.

Покрытия сферами

Задача

Для данной размерности d найти решетку Λ в $\mathbb{R}^d$, которая дает наиболее эффективное **покрытие** *равными шарами с центрами в точках Λ.*

- $R(\Lambda)$ — радиус покрытия для решетки Λ. $R(\Lambda)$ максимальное расстояние от точки $\mathbb{R}^d$ до Λ.

Цель: минимизировать $\dfrac{R^d(\Lambda)}{\det(\Lambda)}$

Упаковки в маленьких размерностях

- $\mathbb{R}^2$: Kershner, 1939 и решетка A_2^*;
- $\mathbb{R}^3$: Bambah, 1954 и решетка A_3^*;
- $\mathbb{R}^4$: Делоне и Рышков, 1963 и решетка A_4^*;
- $\mathbb{R}^5$: Рышков и Барановский, 1975 и решетка A_5^*;
- $\mathbb{R}^d$, $d = 6, 7, 8$ (гипотеза!): Schürmann и Vallentin, 2006 не решетки A_d^*.

Определение

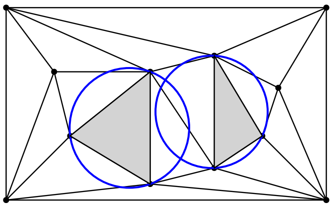
Для данной $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, ее **дуальная решетка** Λ^* это решетка, порожденная базисом, дуальным к базису Λ.

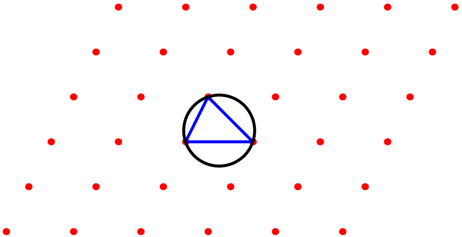
Триангуляции Делоне

Definition

Для (дискретного) множества A, **триангуляция Делоне** множества A это набор симплексов с вершинами в A с пустыми описанными сферами.

- Если A решетка "общего положения", то получится периодическая триангуляция $\mathbb{R}^d$.





L-типы

- Вернемся к ПКФ!
- Выберем базис (матрицу Грама) и запишем целочисленные координаты всех вершин симплексов. Триангуляция Делоне запишется как триангуляция $\mathbb{Z}^d$ относительно ПКФ.

Определение

Для данной триангуляции Делоне $\mathcal{D}$, множество всех ПКФ Q, которые соответствуют $\mathcal{D}$, является выпуклым конусом в $S^d_{>0}$. Этот конус называется **областью L-типа** $\mathcal{D}$ или **вторичным конусом** $\mathcal{D}$.

Теорема (Вороной, 1908)

Число неэквивалентных областей L-типов конечно.

Вычислительный подход

Теорема (Делоне, Долбилин, Рышков, Штогрин, 1970)

Для каждого L-типа, существует ровно одна ПКФ, оптимизирующая покрытия.

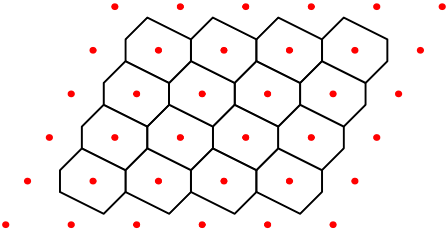
Алгоритм: Выберем один L-тип. Неравенства получаются из локального свойства Делоне. Среди соседей, найдем "новые" L-типы. Повторям процесс для всех новых типов пока они появляются. Для каждого типа находим наилучшее покрытие и выбираем оптимальное (задача выпуклой оптимизации).

- $\mathbb{R}^2$: Вороной, 1908, один тип;
- $\mathbb{R}^3$: Вороной, 1908, один тип;
- $\mathbb{R}^4$: Вороной, 1908, три тип;
- $\mathbb{R}^5$: Барановский, Рышков, 1978, Engel, 1998, 222 L-типа;
- $\mathbb{R}^6$, Бабурин и Engel, 2013, более $5 \cdot 10^8$ L-типов.

Многогранники Вороного

Определение

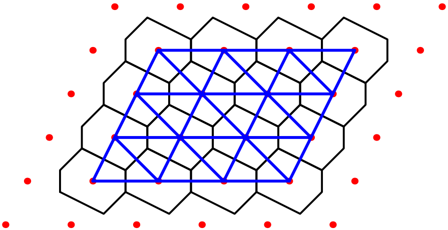
Для данной решетки Λ построим многогранник из точек, которые ближе к данной точке $O \in \Lambda$ чем к остальным точкам Λ. Это **многогранник Вороного** решетки Λ.



Многогранники Вороного

Определение

Для данной решетки Λ построим многогранник из точек, которые ближе к данной точке $O \in \Lambda$ чем к остальным точкам Λ. Это **многогранник Вороного** решетки Λ.

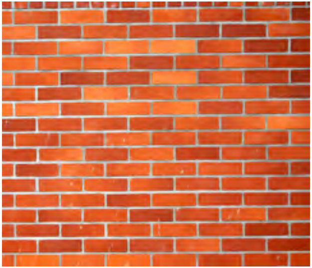


Разбиения Вороного и Делоне дуальны друг другу

Параллелоэдры

Определение

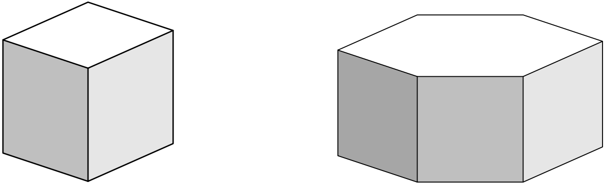
Выпуклый d-мерный многогранник P называется **параллелоэдром** если $\mathbb{R}^d$ можно замостить параллельными копиями P.



Двумерные параллелоэдры

Трехмерные параллелоэдры

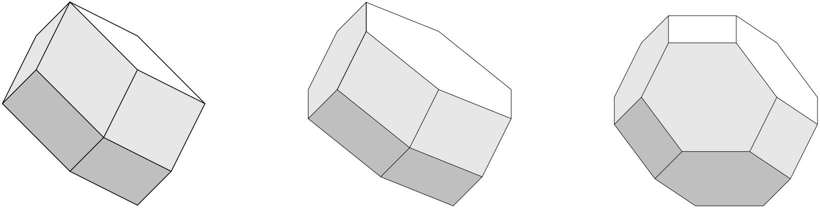
В 1885, Федоров нашел все типы трехмерных параллелоэдров.



Параллелепипед и центрально-симметричная шестиугольная призма

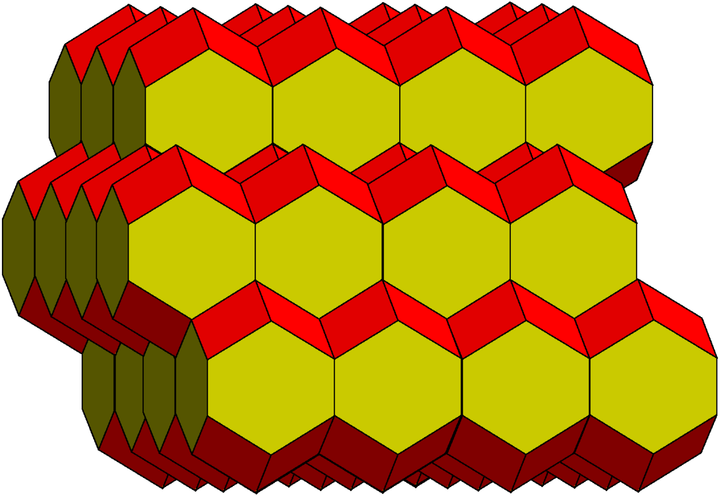
Трехмерные параллелоэдры

В 1885, Федоров нашел все типы трехмерных параллелоэдров.



Ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр, усеченный октаэдр

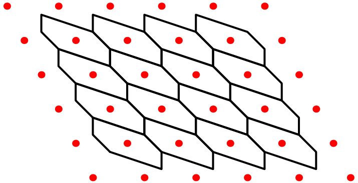
Разбиение $\mathbb{R}^3$ на удлиненные додекаэдры



Гипотеза Вороного

Гипотеза (Вороной, 1908)

Каждый параллелоэдр аффинно эквивалентен многограннику Вороного какой-то решетки Λ.



Гипотеза Вороного в $\mathbb{R}^2$

- Параллелограммы аффинно эквивалентны прямоугольникам.
- Каждый центрально симметричный шестиугольник эквивалентен вписанному шестиугольнику. Все центрально-симметричные вписанные шестиугольники являются многоугольниками Вороного.

Что известно про гипотезу Вороного?

В некоторых случаях верность гипотезы Вороного была установлена

- Для примитивных параллелоэдров, Вороной, 1908
- Для $(d-2)$-примитивных параллелоэдров, Житомирский, 1929
- Для зонотопов, которые являются параллелоэдрами, Erdahl, 1998
- Для 3-неприводимых параллелоэдров, Ордин, 2005
- Для семейства параллелоэдров, которые удовлетворяют **глобальному** комбинаторному условию, **условию GGM**, Г., Гаврилюк, Магазинов, 2015.

Малые размерности

- $\mathbb{R}^2$: фольклор.
- $\mathbb{R}^3$: что-то вроде фольклора. Все трехмерные параллелоэдры известны. Для каждого из них можно **проверить** одно из достаточных условий.

Теорема (Делоне, 1929)

Гипотеза Вороного верна в $\mathbb{R}^4$.

Теорема (Г., 2025; результат получен совместно с Магазиновым)

Гипотеза Вороного верна в $\mathbb{R}^5$.

Гипотеза Вороного в $\mathbb{R}^5$

Набросок доказательства

- Из классификации L-типов можно получить классификацию параллелоэдров Вороного (Dutour Sikirić, Г., Schürmann, Waldmann, 2016)
- Для каждого из этих параллелоэдров можно проверить GGM условие (Dutour Sikirić, Г., Магазинов, 2020)
- С помощью подробного комбинаторного анализа можно доказать, что любой параллелоэдр в $\mathbb{R}^5$ комбинаторно эквивалентен параллелоэдру Вороного. Для этого нужно
  - анализировать локальное строение вокруг двумерных граней,
  - локальное строение вокруг ребер
  - свободные направления, в которых параллелоэдры можно "растягивать"
  - и много всего остального

Классификация параллелоэдров

- $\mathbb{R}^2$: шестиугольник и параллелограм;
- $\mathbb{R}^3$: пять многогранников Федорова;
- $\mathbb{R}^4$: 52 параллелоэдра, Делоне, 1929 и Штогрин, 1974;
- $\mathbb{R}^5$: 110 244 параллелоэдра, Dutour Sikirić, Г., Schürmann, Waldmann, 2016, и Г., 2025.

Насколько доступен шестимерный случай?

C-типы

Определение

Область C-типа это множество всех ПКФ с одинаковым **одномерным** скелетом разбиения Делоне.

Мотивация: одномерный скелет содержит информацию о кратчайших векторах решетки

Алгоритм: Выберем один C-тип. Линейные ограничения получаются из неравенств на длины векторов. Находим все соседние типы. Выбираем все "новые". Повторяем пока находятся новые типы.

$\mathbb{R}^6$: новая надежда

Количество C-типов общего положения

- $\mathbb{R}^2$: один тип;
- $\mathbb{R}^3$: один тип, Федоров, 1885;
- $\mathbb{R}^4$: три типа, Вороной, 1908;
- $\mathbb{R}^5$: 76 типов, Барановский и Рышков, 1970е;
- $\mathbb{R}^6$: 55 083 357 типов, Dutour Sikirić и van Woerden, 2025.

Сложности с E_6^*

- У C-типа решетки E_6^* 216 гиперграней и 157 926 114 экстремальных лучей
- Порядок группы симметрий C-типа равен 103 680
- В разбиении Делоне решетки E_6^* 40 классов джоинов трех треугольников. Теоретически, это дает $3^{40} \approx 10^{19}$ потенциальных триангуляций Делоне
- Тем не менее, Schürmann и Vallentin смогли найти решетку локально оптимальную для покрытия шарами в окрестности E_6^*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!