О сферах с k точками внутри

совместно с
Хербертом Эдельсбруннером и Мортезой Сагафяном
(IST Austria)

Алексей Гарбер

The University of Texas Rio Grande Valley

Семинар по дискретной геометрии и геометрии чисел
12 ноября 2024

Множества точек

Мы будем рассматривать множества точек в $\mathbb{R}^d$, которые находятся в **общем положении**, и являются

- либо конечными, либо
- **слабыми множествами Делоне**.

Определение

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ называется **слабым множество Делоне** если

- в каждом шаре содержится конечное множество точек из A и
- в любом полупространстве содержится хотя бы одна точка из A.

Множество точек общего положения:

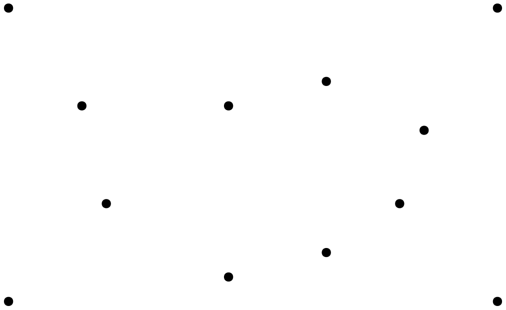
- $d + 1$ точка не лежат на одной гиперплоскости и
- $d + 2$ точки не лежат на одной сфере.

Триангуляции Делоне

Определение

Триангуляция Делоне множества A это набор таких симплексов Δ с вершинами в A, что описанная вокруг Δ сфера не содержит точек A внутри.

- Триангуляция Делоне A это триангуляция выпуклой оболочки $\operatorname{conv} A$ или триангуляция всего $\mathbb{R}^d$.



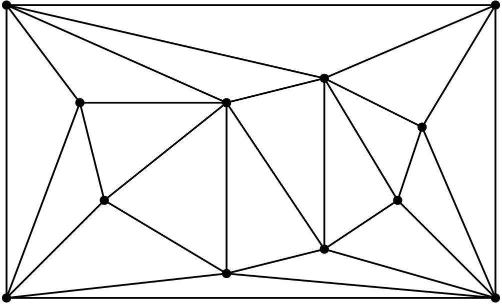
Триангуляции Делоне

Определение

Триангуляция Делоне множества A это набор таких симплексов Δ с вершинами в A, что описанная вокруг Δ сфера не содержит точек A внутри.

- Триангуляция Делоне A это триангуляция выпуклой оболочки conv A или триангуляция всего $\mathbb{R}^d$.

СЛАБОЕ

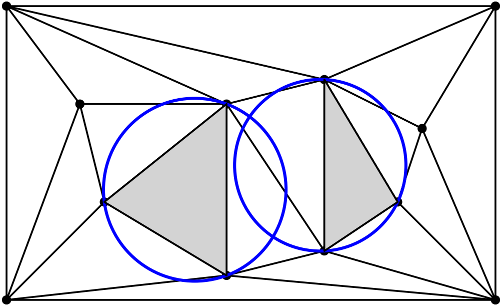


Триангуляции Делоне

Определение

Триангуляция Делоне множества A это набор таких симплексов Δ с вершинами в A, что описанная вокруг Δ сфера не содержит точек A внутри.

- Триангуляция Делоне A это триангуляция выпуклой оболочки $\operatorname{conv} A$ или триангуляция всего $\mathbb{R}^d$.



Подъем на параболоид

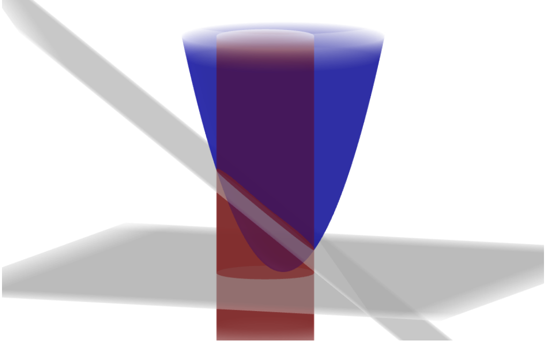
Один из способов построить триангуляцию Делоне

- Поднимаем каждую точку множества $A \subset \mathbb{R}^d$ на параболоид $y = x_1^2 + \ldots + x_d^2$ отображением $a \mapsto (a, ||a||^2)$;
- Проектируем (нижнюю) границу выпуклой оболочки поднятых точек на $\mathbb{R}^d$.

Подъем на параболоид

Один из способов построить триангуляцию Делоне

- Поднимаем каждую точку множества $A \subset \mathbb{R}^d$ на параболоид $y = x_1^2 + \ldots + x_d^2$ отображением $a \mapsto (a, ||a||^2)$;
- Проектируем (нижнюю) границу выпуклой оболочки поднятых точек на $\mathbb{R}^d$.



Мотивация

$k=0 \to$ Делоне

Определение

Допустим A это какое-то конечное или слабое множество Делоне в $\mathbb{R}^d$. Назовем симплекс Δ с вершинами A **k-тяжелым** симплексом множества A если внутри описанной сферы A находится ровно k точек A.

Вопрос

Что можно сказать о семействе всех k-тяжелых симплексов множества A?

A a_1 a_n

x

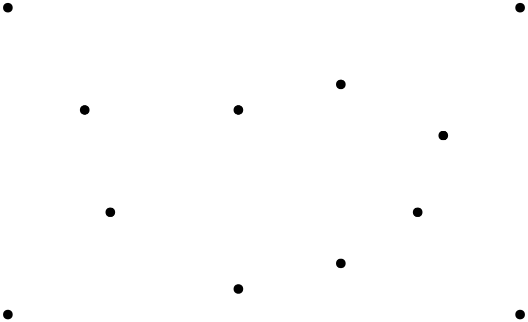
$d_i = d(x, a_i)$

$\underline{d_1 \le d_2} \le \dots \le d_n$

Эксперимент

Вопрос

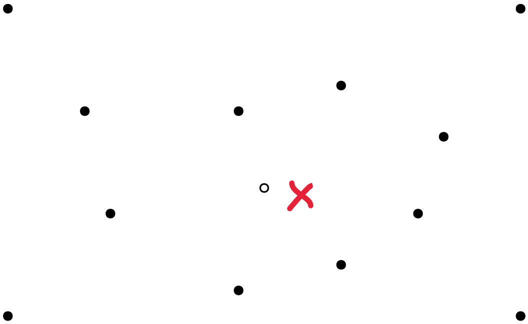
Пусть $\underline{d = 2}$ *и* $\underline{k = 1}$*. Сколько* 1*-тяжелых треугольников* A *содержит точку* x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

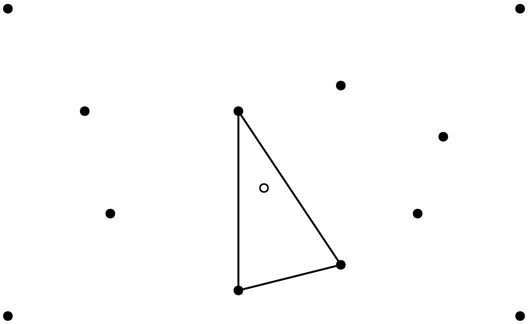
Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

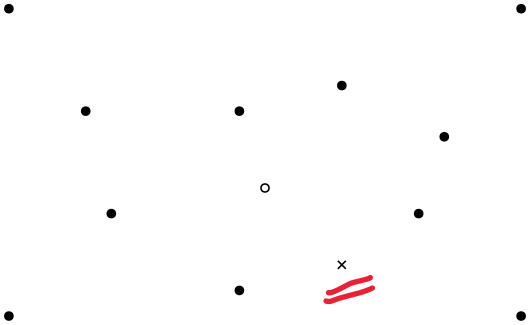
Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

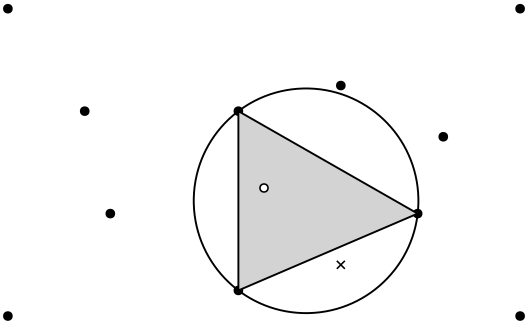
Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

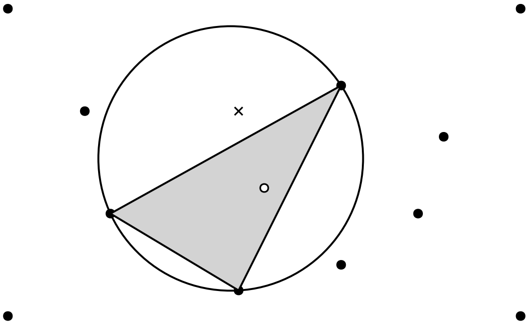
Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

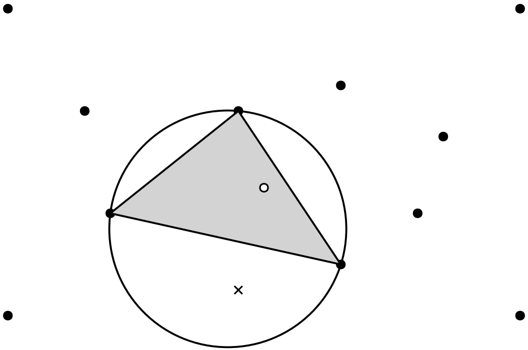
Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



Эксперимент

Вопрос

Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*



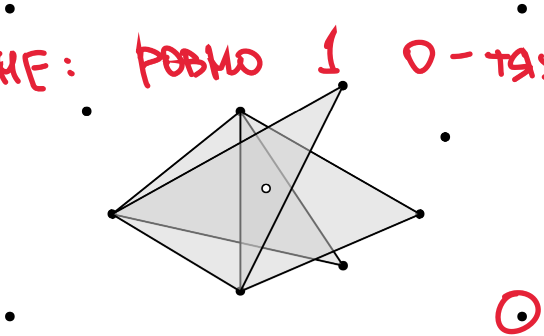
Эксперимент

ровно 3 1-тяж треугольник

Вопрос

Пусть $d = 2$ и $k = 1$. Сколько 1-тяжелых треугольников A содержит точку x **общего положения***?*

Делоне: ровно 1 0-тяж.



Основная теорема

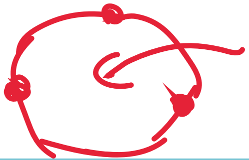
Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Пусть A это произвольное слабое множество Делоне в $\mathbb{R}^d$ и пусть x произвольная точка общего положения в $\mathbb{R}^d$. Тогда x содержится **в точности** *в $\binom{d+k}{d}$ k-тяжелых симплексах множества A.*

$k=0 \to 1$

$k=1 \to d+1$

k-тяж



Основная теорема

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Пусть A это произвольное слабое множество Делоне в $\mathbb{R}^d$ и пусть x произвольная точка общего положения в $\mathbb{R}^d$. Тогда x содержится **в точности** *в $\binom{d+k}{d}$ k-тяжелых симплексах множества A.*

Доказательство.

- Для каждого A найдется фиксированная “кратность” покрытия.
- Кратность не зависит от выбора множества A.
- Можно найти множество, для которого кратность почти очевидна.

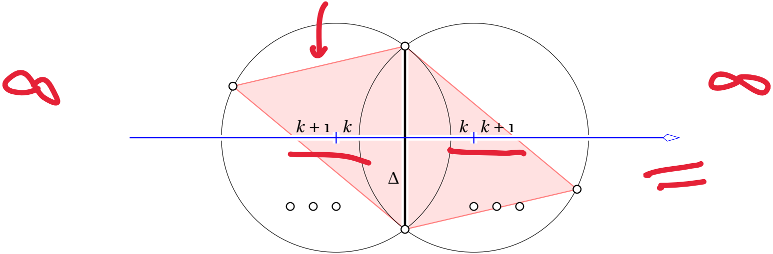
□

Шаг 1: существование константы

Лемма

Для каждого слабого множества Делоне A и точки x найдется такая константа $c(A)$, что количество k-тяжелых сиплексов A, содержащих x, равняется $c(A)$.

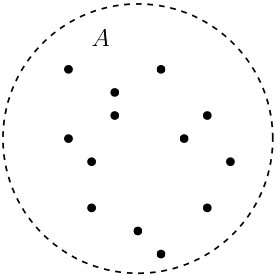
Рассмотрим $(d-1)$-мерный симплекс Δ с d вершинами в A. Достаточно доказать, что по разные стороны от Δ будет поровну k-тяжелых симплексов с гранью Δ.



Шаг 2: константа не зависит от множества

Лемма

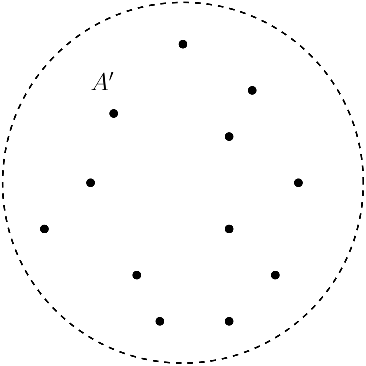
Для двух слабых множеств Делоне A *и* A' *в* $\mathbb{R}^d$, $c(A) = c(A')$.



Шаг 2: константа не зависит от множества

Лемма

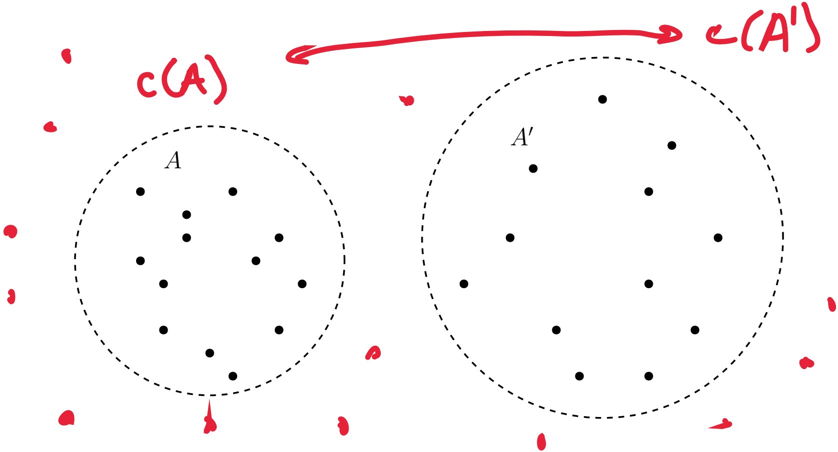
Для двух слабых множеств Делоне A *и* A' *в* $\mathbb{R}^d$, $c(A) = c(A')$.



Шаг 2: константа не зависит от множества

Лемма

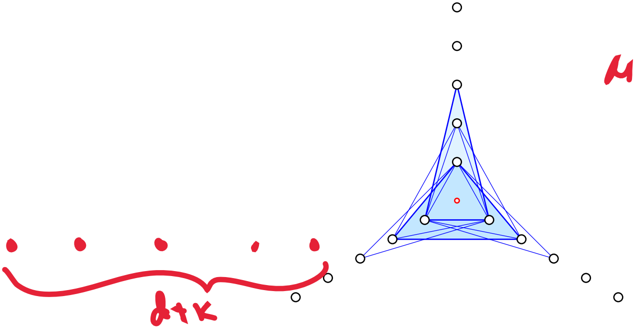
Для двух слабых множеств Делоне A *и* A' *в* $\mathbb{R}^d$, $c(A) = c(A')$.



Шаг 3: найдем константу для одного множества

Лемма

Для **радиального** *слабого множества Делоне* A, $c(A) = \binom{d+k}{d}$.



но не мн-во Делоне

Есть $\underline{\binom{d+k}{d}}$ вариантов поместить k точек в $\underline{d+1 \text{ ящик}}$.

Конечные множества

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Для конечного множества A в $\mathbb{R}^d$, точка общего положения $x \in \mathbb{R}^d$ содержится в **не более чем** $\binom{d+k}{d}$ *k-тяжелых симплексах A.*

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Точка x содержится **в точности** *в* $\binom{d+k}{d}$ *k-тяжелых симплексах A если и только если любая гиперплоскость через x содержит не менее $k+1$ точки A по каждую из сторон.*

k-Hull К- ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА

Локальная версия

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Пусть A есть слабое множество Делоне в $\mathbb{R}^d$ *и пусть a произвольная точка A. Тогда k-тяжелые симплексы A* **инцидентные** *точке a покрывают достаточно малую окрестность a в точности в* $\binom{d+k-1}{d-1}$ *слоев.*

Доказательство.

$$\binom{d+k-1}{d-1} = \binom{d+k}{d} - \binom{d+k-1}{d}.$$

□

k-тяж

(k-1)-тяж для A-{a}

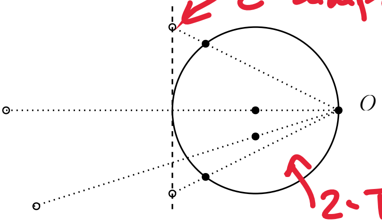
k-ГИПЕРГРАНИ И СФЕРЫ

k-facet, k-sets

Определение

Пусть A конечное множесто точек общего положения в $\mathbb{R}^d$. Подмножества $B \subset A$ из d точек называется ***k*-гиперграныю** множества A если гиперплоскость, проведенная через точки B, отделяет k точек A от остальных.

Наблюдение. Инверсия с центром O переводит k-гипергрань в k-тяжелый симплекс множества $A \cup \{O\}$ если O по правильную сторону от гиперплоскости.



2-гипергрань

k точек
B
остаток

2-тяж

k-ГИПЕРГРАНИ НА ПЛОСКОСТИ

k-гип $\leq O(nk^{3})$

Теорема (Alon, Györi, 1986)

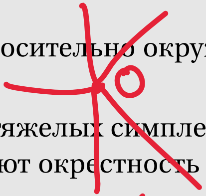
Для множества A из n точек общего положения на плоскости общее количество 0-, 1-, …, k*-гиперграней не превосходит* $(k+1)n$.

Новое доказательство для $k \leq \frac{n}{3}$.

- Выберем точку O на нужной стороне всех i-гиперграней для $i \leq k$.

$\binom{2+k-1}{2-1} = k+1$

- Сделаем инверсию относительно окружности с центром O.
- Оценим количество i-тяжелых симплексов для $i =\leq k$, зная, что они покрывают окрестность O не более $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ раз.



$1+2+\ldots+(k+1)$

□

Лемма Ловаса

Теорема (Bárány, Füredi, Lovász, 1990)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ состоит из $2n + d$ точек и пусть ℓ прямая общего положения относительно A. Тогда ℓ пересекает не более $O(n^{d-1})$ ***n-гиперграней*** *A.*

Теорема (“Точная лемма Ловаса” by Welzl, 2001)

В аналогичной ситауции, количество **ориентированных** *k-гиперграней пересеченных одной прямой не более $\binom{d+k-1}{d-1}$.*

Новое доказательство.

Выберем точку $O \in \ell$. Инверсия переводит k-гиперграни, пересекаемые ℓ, в k-тяжелые симплексы с вершиной O, пересекаемые ℓ. Локальная версия основной теоремы дает нужную оценку. □

Гиперсимплексы и числа Эйлера

- **d-мерный гиперсимплекс $\Delta_d^{(k)}$ порядка** k это

$$\Delta_d^{(k)} := \operatorname{conv}\left(\sum_{i\in I} e_i \mid I \subset \{1,\ldots,d+1\}, |I| = k\right) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

  Пусть $v(d,k) := d! \cdot \operatorname{vol} \Delta_d^{(k)}$.

- Эйлерово число I рода $A(d,k)$ это количество перестановок множества $\{1,\ldots,d\}$ с k спусками.

Теорема (de Laplace, 1886)

$$\underline{v(d,k) = A(d,k-1).}$$

- Новое доказательство с помощью k-тяжелых симплексов.

Снова подъем на параболоид

- Пусть A получено **малым шевелением** $\mathbb{Z}^d$. Поднимем точки $a \in A$ на параболоид $a \mapsto (a, ||a||^2) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Множество A' это множество всех поднятых точек.

Снова подъем на параболоид

- Пусть A получено **малым шевелением** $\mathbb{Z}^d$. Поднимем точки $a \in A$ на параболоид $a \mapsto (a, ||a||^2) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Множество A' это множество всех поднятых точек.
- Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для каждого подмножества из n точек A', строим среднее арифметическое.

Снова подъем на параболоид

- Пусть A получено **малым шевелением** $\mathbb{Z}^d$. Поднимем точки $a \in A$ на параболоид $a \mapsto (a, ||a||^2) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Множество A' это множество всех поднятых точек.
- Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для каждого подмножества из n точек A', строим среднее арифметическое.
- Берем выпуклую оболочку все средних и проектируем границу на $\mathbb{R}^d$.

Снова подъем на параболоид

- Пусть A получено **малым шевелением** $\mathbb{Z}^d$. Поднимем точки $a \in A$ на параболоид $a \mapsto (a, ||a||^2) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Множество A' это множество всех поднятых точек.
- Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для каждого подмножества из n точек A', строим среднее арифметическое.
- Берем выпуклую оболочку все средних и проектируем границу на $\mathbb{R}^d$.
- В итоговом разбиении (которое называется триангуляцией Делоне порядка n множества A) используются гиперсимплексы порядков $1, 2, \ldots, d$, полученные из $(n-1)$-, $(n-2)$-, $\ldots$, $(n-d)$-тяжелых симплексов A.

Тождество Ворпицкого

Подсчет объемов всех многогранников в большом шаре дает

$$\sum_{p=1}^{d} v(d,p)\binom{d+n-p}{d} = n^d.$$

Тождество Ворпицкого

Подсчет объемов всех многогранников в большом шаре дает

$$\sum_{p=1}^{d} v(d,p)\binom{d+n-p}{d} = n^d.$$

Это слегка модифицированное тождество Ворпицкого для чисел Эйлера.

$$\sum_{k=0}^{d-1} A(d,k)\binom{x+k}{d} = x^d.$$

$\mathbb{H}^d$ и $\mathbb{S}^d$

- В $\mathbb{H}^d$ верны глобальная и локальная версия с теми же константами, что и в $\mathbb{R}^d$.

$\mathbb{H}^d$ и $\mathbb{S}^d$

- В $\mathbb{H}^d$ верны глобальная и локальная версия с теми же константами, что и в $\mathbb{R}^d$.

Определение

Множество $A \subset \mathbb{S}^d$ называется **k-сбалансированным** если каждая открытая полусфера содержит не менее $k+1$ точки A.

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

$d=2$ $k=1$

Для k-сбалансированного множества $A \subset \mathbb{S}^d$

1. *каждая точка $\mathbb{S}^d$ содержится в $\binom{d+k}{d}$ k-тяжелых симплексах A;*
2. *Малая окрестность любой $a \in A$ накрыта k-тяжелыми симплексами A инцидентными a в $\binom{d+k-1}{d-1}$ слоев.*

2

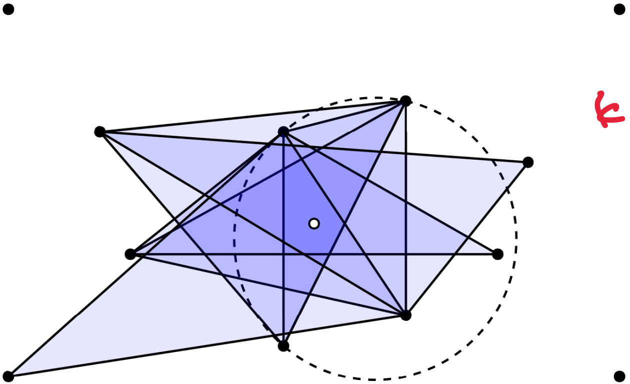
Точки с весами

- Каждой точке слабого множества Делоне A можно сопоставить вес;
- Точки с весами можно интерпретировать как сферы разного радиуса;
- Описанные сферы это сферы ортогональные точкам с весами.

Теорема (Edelsbrunner, G., Saghafian, 2024+)

Пусть (A, w) *взвешенное слабое множество Делоне в* $\mathbb{R}^d$ *с ограниченной функцией весов* w. *Тогда каждая точка общего положения в* $\mathbb{R}^d$ *содержится в точности в* $\binom{d+k}{d}$ k*-тяжелых симплексах множества* (A, w).

Спасибо за внимание!



k=2