

УДК 519.1

М. М. Галламов

Графическое представление цепных дробей с учётом чётности их элементов

§ 1. Граф $G_0(\alpha)$ цепной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

Подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$ порядка n цепной дроби α задаются формулами:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n, a_0 \in \mathbb{N}_0 (= \{0\} \cup \mathbb{N}), \\ \mathbb{N} &= \{1, 2, \dots\}; \quad p_{-2} = 0, \quad q_{-2} = 1, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вначале построим *граф четности* $G_0(\alpha)$. Пусть m^-, m^+ обозначают соответственно нечетность, чётность числа $m (\in \mathbb{N})$, индекс \mp у m^\mp указывает, что нам важна только его чётность

Вершины графа $G_0(\alpha)$ есть пары $(q_n^\mp; p_n^\mp)$, полученные через (1.1) при $a_n = a_n^\mp$, то есть при $a_n = a_n^-$ и $a_n = a_n^+$, а каждое ребро — направленный отрезок с весом a_n^\mp , за исключением первого ребра без веса в виде отрезка, соединяющего первую $(q_{-2}^-; p_{-2}^+)$ и вторую вершину $(q_{-1}^+; p_{-1}^-)$. Далее из каждой вершины $(q_n^\mp; p_n^\mp)$ исходят два направленных ребра — левое с весом a_n^- , правое с весом a_n^+ , $n \in \mathbb{N}_0$. Поэтому $(q_n^\mp; p_n^\mp)$ назовём *исходящей вершиной* и обозначим её через $(q_n^\mp; p_n^\mp)^O$, а вершину $(q_{n+1}^\mp; p_{n+1}^\mp)^L$, в которую входит левое ребро с весом a_{n+1}^- — *левой входящей*, а другую $(q_{n+1}^\mp; p_{n+1}^\mp)^R$, в которую входит ребро с весом a_{n+1}^+ — *правой входящей*. Изложенный способ построения полностью описывает граф $G_0(\alpha)$ при любых выбранных элементах $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{N}$, который назовём *графом четности цепной дроби* $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ Если все a_n зафиксированы, то мы получаем единственный бесконечный путь, который начинается в $(q_{-2}^-; p_{-2}^+)$, а далее из $(q_{-1}^+; p_{-1}^-)$ определяется направлением стрелок, задаваемых четностью соответствующего элемента конкретной цепной дроби. Верно и обратное утверждение. В качестве примера, см. рис. 1

Вершины $(q_n^\mp; p_n^\mp)$ и $(q_m^\mp; p_m^\mp)$ равны, если их четности по компонентно совпадают и при этом будем писать: $(q_n^\mp; p_n^\mp) = (q_m^\mp; p_m^\mp)$. В связи с чем удобно ввести обозначения такого сорта $(\mp; \mp)_n$ вместо $(q_n^\mp; p_n^\mp)$, причем пара $(+; +)_n$ исключается в силу взаимной простоты чисел q_n и p_n .

Так как первые две вершины: $(-; +)_{-2}$ и $(+; -)_{-1}$ различны, то исходящая вершина $(\mp; \mp)_n^O$ и две входящие $(\mp; \mp)_{n+1}^L$, $(\mp; \mp)_{n+1}^R$, когда в них входят рёбра, исходящие из $(\mp; \mp)_n^O$, попарно различны согласно (1.1). Тройку вершин $(\mp; \mp)_n^O$, $(\mp; \mp)_{n+1}^L$, $(\mp; \mp)_{n+1}^R$, связанных рёбрами, исходящими из $(\mp; \mp)_n^O$, назовём *основным треугольником* графа $G_0(\alpha)$, который обозначим $\Delta(\mp; \mp)_{n, n+1}^{OLR}$. Порядок n подходящей дроби p_n/q_n назовем *порядком вершины* $(q_n^\mp; p_n^\mp)$ и будем записывать её в виде: n -вершина для $n \in \mathbb{N}_{-2} = \{-2, -1\} \cup \mathbb{N}_0$.

Свойства графа чётности $G_0(\alpha)$.

$1_{G_0}^\circ$. Свойство о количестве вершин порядка n .

Количество вершин порядка n равно 2^{n+1} .

В силу построения n -вершин в количестве 2^{n+1} штук пронумеруем, при этом номер i , полученный при таком пересчёте припишем n , которое участвует в обозначении n -вершины, в качестве нижнего индекса. Так, например, 0_i -вершина при фиксированном $i = 1, 2$ есть соответственно $(-; -)_0 = (-; -)_{0_1}$, а 0_2 -вершин $(-; +)_0 = (-; +)_{0_2}$. Более того, если n -вершины в количестве 2^{n+1} штук записаны в таком виде: $(\mp; \mp)_{n_1}, (\mp; \mp)_n, \dots, (\mp; \mp)_{n_{2^{n+1}}}$, тогда $(n+1)$ -вершины согласно индукции записываются следующим образом: $(\mp; \mp)_{(n+1)_{2i-1}}, (\mp; \mp)_{(n+1)_{2i}}$, где $i \in \overline{1, 2^{n+1}} = \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$. Отсюда получаем, что n_i -вершина есть левая входящая, а n_{i+} -вершина – правая входящая. Поэтому основной треугольник $\Delta(\mp; \mp)_{n, n+1} = \Delta(\mp; \mp)_{(n+1)_{2i-1}}^{n_i, (n+1)_{2i}}$.

$2_{G_0}^\circ$. Свойство о попарном отличии вершин в основном треугольнике.

Вершины у любого $\Delta(\mp; \mp)_{n, n+1}^{OLR}$ все различны. Доказательство основана не методом математической индукции и формуле (1.1).

$3_{G_0}^\circ$. Свойство о количестве основных треугольников.

ТЕОРЕМА 1. *Существует шесть различных видов основных треугольников: $\Delta \mathbf{1}_i = \Delta(-; -)_i^O(-; +)_{i+1}^L(+; -)_{i+1}^R$, $\Delta \mathbf{2}_j = \Delta(-; -)_j^O(+; -)_{j+1}^L(-; +)_{j+1}^R$, $\Delta \mathbf{3}_k = \Delta(-; +)_k^O(-; -)_{k+1}^L(+; -)_{k+1}^R$, $\Delta \mathbf{4}_l = \Delta(-; +)_l^O(+; -)_{l+1}^L(-; -)_{l+1}^R$, $\Delta \mathbf{5}_{ml} = \Delta(+; -)_m^O(-; -)_{m+1}^L(-; +)_{m+1}^R$, $\Delta \mathbf{6}_{nl} = \Delta(+; -)_n^O(-; +)_{n+1}^L(-; -)_{n+1}^R$.*

Порядок числе от $\Delta \mathbf{1}$ до $\Delta \mathbf{6}$ отражают лексикографический порядок записи вершин относительно минуса и плюса, используемых в обозначения этих треугольников. Для порядков $i, j, k, l, m, n \geq 2$ все типы основных треугольников существуют.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из свойства $2_{G_0}^\circ$ и комбинаторного перебора.

$4_{G_0}^\circ$. Свойство об общих вершинах основных треугольников.

Только двенадцать следующих пар пересечений различных основных треугольников имеют отличны от пустого множества: $\Delta \mathbf{1}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{4}_{(n+1)_{2i-1}} = (-; +)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{1}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{6}_{(n+1)_{2i}} = (+; -)_{(n+1)_{2i}}$, $\Delta \mathbf{2}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{6}_{(n+1)_{2i-1}} = (+; -)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{2}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{4}_{(n+1)_{2i}} = (-; +)_{(n+1)_{2i}}$, $\Delta \mathbf{3}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{2}_{(n+1)_{2i-1}} = (-; -)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{3}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{5}_{(n+1)_{2i}} = (+; -)_{(n+1)_{2i}}$, $\Delta \mathbf{4}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{5}_{(n+1)_{2i-1}} = (+; -)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{4}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{2}_{(n+1)_{2i}} = (-; -)_{(n+1)_{2i}}$, $\Delta \mathbf{5}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{1}_{(n+1)_{2i-1}} = (-; -)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{5}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{3}_{(n+1)_{2i}} = (-; +)_{(n+1)_{2i}}$, $\Delta \mathbf{6}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{3}_{(n+1)_{2i-1}} = (-; +)_{(n+1)_{2i-1}}$, $\Delta \mathbf{6}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{1}_{(n+1)_{2i}} = (-; -)_{(n+1)_{2i}}$.

$5_{G_0}^\circ$. Свойство локальности о совпадении вершин.

Если $\Delta \mathbf{X}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-1}} \neq \emptyset$ и $\Delta \mathbf{X}_{n_i} \cap \Delta \mathbf{Z}_{(n+1)_{2i}} \neq \emptyset$, то в силу (1.1) для $\Delta \mathbf{X}_{n_i}$ и $\Delta \mathbf{Y}_{(n+1)_{2i-1}}$ справедливо $(\mp; \mp)_{n_i} = (\mp; \mp)_{(n+2)_{4i-2}}$, $(\mp; \mp)_{(n+1)_{2i}} = (\mp; \mp)_{(n+2)_{4i-3}}$, а для $\Delta \mathbf{X}_{n_i}$ и $\Delta \mathbf{Z}_{(n+1)_{2i}}$ – $(\mp; \mp)_{n_i} = (\mp; \mp)_{(n+2)_{4i}}$, $(\mp; \mp)_{(n+1)_{2i-1}} = (\mp; \mp)_{(n+2)_{4i-1}}$.

§ 2. Надграф $G_1(\alpha)$ цепной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

Надграф $G_1(\alpha)$ цепной дроби α есть граф, который получается из $G_0(\alpha)$ удалением в $G_0(\alpha)$ (-2) -вершин и первого ребра. Далее вершину $(\mp; \mp)_{n_i}$ заменим

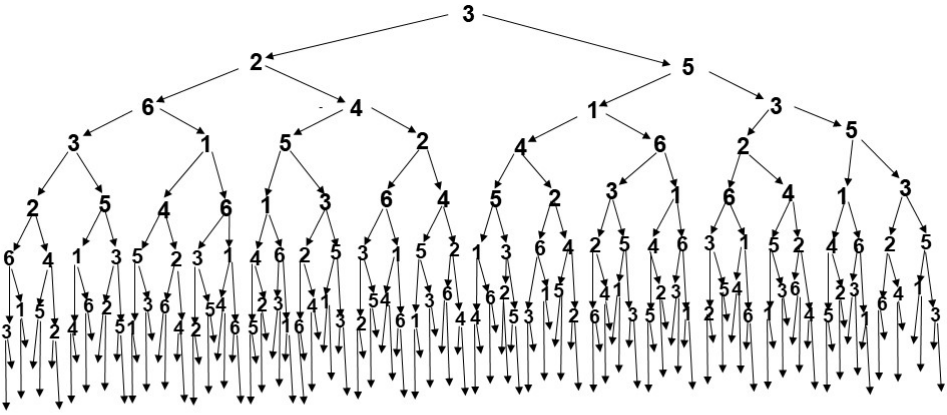


Рис. 2. Надграф $G_1(\alpha_6)$ $\alpha_6 = [0; a_1, \dots, a_6]$, который естественным образом допускает продолжение, исходя из $G_0(\alpha_0)$.

вершиной \mathbf{X}_{n_i} такую, что $(\mp; \mp)_{n_i}$ является исходящей вершиной $\Delta\mathbf{X}_{n_i}$. Число n также называется *порядком для \mathbf{X}_{n_i}* , а i играет ту же роль, что в $G_0(\alpha)$. Вершины \mathbf{X}_n и \mathbf{Y}_m считаются *равными*, если $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ и также будем писать $\mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_m$.

Надграф $G_1(\alpha)$ имеет только ориентированные рёбра. Каждое из них исходит из некоторой вершины \mathbf{X}_{n_i} так, что левое входит в вершину $\mathbf{Y}_{(n+1)2i-1}$, правое – в $\mathbf{Z}_{(n+1)2i}$ и при этом, тогда исходящие вершины $\Delta\mathbf{X}_{n_i}$, $\Delta\mathbf{Y}_{(n+1)2i-1}$ и $\mathbf{Z}_{(n+1)2i}$ на $G_0(\alpha)$ образуют один из основных треугольников, см. свойство $3_{G_0}^\circ$. Проще говоря, граф $G_1(\alpha)$ получается из $G_0(\alpha)$, если основные треугольник объявляются вершинами, а точки их пресечения – ребрами, см. рис. 2. Если в названии графа $G_1(\alpha)$ мы захотим отразить способ его построения, то $G_1(\alpha_6)$ следовало бы назвать *граф графа чётности цепной дроби α* , но для краткости мы его называем *надграфом цепной дроби α* .

Если n_i -путь на $G_0(\alpha)$ с началом в $(+; -)_{-1}$ и концом $(\mp; \mp)_{n_i}$, то ему соответствует единственный \mathbf{X}_{n_i} -путь на $G_1(\alpha)$ с началом $\mathbf{5}_{-1}$ и концом \mathbf{X}_{n_i} . Это соответствие биективное. Теперь рассмотрим пути с началом в \mathbf{X}_{n_i} , а далее каждый из них получается за счёт движение по ребрам надграфа, причём движение по левому ребру указывается через приписывание справа к \mathbf{X}_{n_i} буквы L , а если вправо, то – R . Например, $\mathbf{X}_{n_i} R L R^t L^s \mathbf{Y}_{m_j}$ есть путь с началом в \mathbf{X}_{n_i} ,

далее проходим одно правое ребро, одно левое, s левых, t правых и завершается в \mathbf{Y}_{m_j} таким, что $m = n + s + t + 2$ и $j = 2^s(2^t(2^{2i} - 1) - 1) + 1$.

Путь, который имеет попарно неравные вершины, кроме крайних, назовём *звенном*. Каждое из них имеет не более шести рёбер и не менее двух, а звеньев с пятью рёбрами нет, см. [1]. Звенья при фиксированном $\mathbf{X}_{n_i} \in \overline{\mathbf{1}_{n_i}, \mathbf{6}_{n_i}}$ для $n \geq 2$, а i определяется выбором \mathbf{X}_{n_i} следующей

ТЕОРЕМА 2. *Различных звеньев на $G_1(\alpha)$ ровно сорок два, среди которых по шесть звеньев в каждом виде: 1) $\mathbf{X}_{n_i} R^2 \mathbf{X}_{(n+2)_{2^{2i}}}$, 2) $\mathbf{X}_{n_i} L^3 \mathbf{X}_{(n+3)_{2^3(i-1)+1}}$, 3) $\mathbf{X}_{n_i} LRLRX_{(n+4)_{2(2(2(2i-1))-1)}}$, 4) $\mathbf{X}_{n_i} RLRLX_{(n+4)_{2(2(2(2i-1))-1)}}$, 5) $\mathbf{X}_{n_i} L^2 RL^2 RX_{(n+6)_{2(2(2(2(2i-1))-1)-1)-1}}$, 6) $\mathbf{X}_{n_i} LRL^2 RLX_{(n+6)_{2(2(2(2(2i-1))-1)-1)-1}}$, 7) $\mathbf{X}_{n_i} RL^2 RL^2 \mathbf{X}_{(n+6)_{2(2(2(2(2i-1))-1)-1)-1}}$.*

Доказательство непосредственно следует из свойств $1^\circ_{G_0} - 5^\circ_{G_0}$ и $1^\circ_{G_1} - 4^\circ_{G_1}$ ([1]).

§ 3. Применение графов $G_0(\alpha)$ и $G_1(\alpha)$

Формулировка задачи Колягина о шахматной раскраске. В прямоугольной системе координат OXY единичные квадраты с целыми вершинами её первого квадранта $IOXY$ раскрашены в шахматном порядке (такие квадраты назовём *клетками*). Разность $\mu(t)$ между количествами белых и черных клеток треугольника $\Delta(t) = OA(t/\alpha)B(t)$, отсекаемого прямой $L(t) : y = -\alpha x + t$, $t > 0$, от $IOXY$, не ограничена ни снизу, ни сверху при $t \rightarrow \infty$ для любого иррационального $\alpha (> 0)$, см. рис. 3..

Эта задача решена в частном случае и её решение есть доказательство

ТЕОРЕМА 3. *Задача Колягина о шахматной раскраске имеет решение для произвольно заданного $\alpha(a_{2m-1}^+) = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{2m-2}, a_{2m-1}^+, \dots]$ с чётными $a_{2m-1}^+, a_{2m}^+, \dots$ и при любом фиксированном t из множества натуральных чисел \mathbb{N} .*

Доказательство существенно опирается на знание четностей a_n^\mp и компонент пар $(q_n^\mp; p_n^\mp) (= (\mp; \mp)_n)$ при $n \geq 2m - 1$, так как для вычисления разностей через рекуррентные формулы (3.1), см. ниже, достаточно знать чётности их аргументов согласно. [3; Пункт 4.1. Предложение 2]. Ибо для нахождения строго возрастающей последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(t_k) = \mp \infty$ осуществляется через рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \mu_{2m+3}(q_N; 0) &= \mu_{2m+1}(q_N; 0) + \\ \sum_{k_{2m+3}=0}^{a_{2m-1}} \mu_{2m+2}(q_N - (q_{2m-2} + k_{2m+3}q_{2m-1}); p_{2m-2} + k_{2m+3}p_{2m-1}), \\ \mu_{2m+2}(q_N - q_{2m-2}; p_{2m-2}) &= \sum_{k_{2m+2}=0}^{a_{2m-1}-1} \mu_{2m+1}(q_N - (k_{2m+2} + 1)q_{2m-2}; \\ (k_{2m+2} + 1)p_{2m-2}) &+ \mu_{2m}(q_N - (a_{2m-1} + 1)q_{2m-2}; (a_{2m-1} + 1)p_{2m-2}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где q_N задаётся посредством (1.1) так, что первый аргумент у каждой разности положителен. Здесь выбор начальных условий осложняется тем, что мы не можем вычислить разности $\mu_{2m+1}(q_N - (k_{2m+2} + 1)q_{2m-2}; (k_{2m+2} + 1)p_{2m-2})$ и $\mu_{2m}(q_N - (a_{2m-1} + 1)q_{2m-2}; (a_{2m-1} + 1)p_{2m-2})$ по причине неизвестности чётности компонент пары $(q_{2m-2}; p_{2m-2})$. Эта трудность преодолевается за счёт

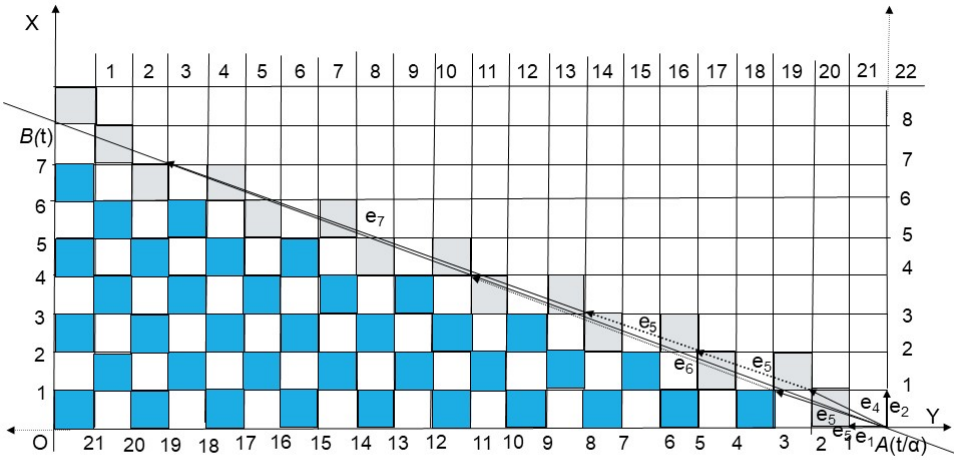


Рис. 3. Отсекаемый треугольник прямой $y = -\alpha x + t$ при $\alpha = e^{-1}$, $t = 22\alpha$; $e^{-1} = [0; 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots, 1, 1, (2m)_{3m} |_{m=2}^{\infty}]$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{8}$, $\frac{p_4}{q_4} = \frac{4}{11}$, $\frac{p_5}{q_5} = \frac{7}{19}$. Задача для $\alpha = e, e^{-1}$ решена ([2], [3])

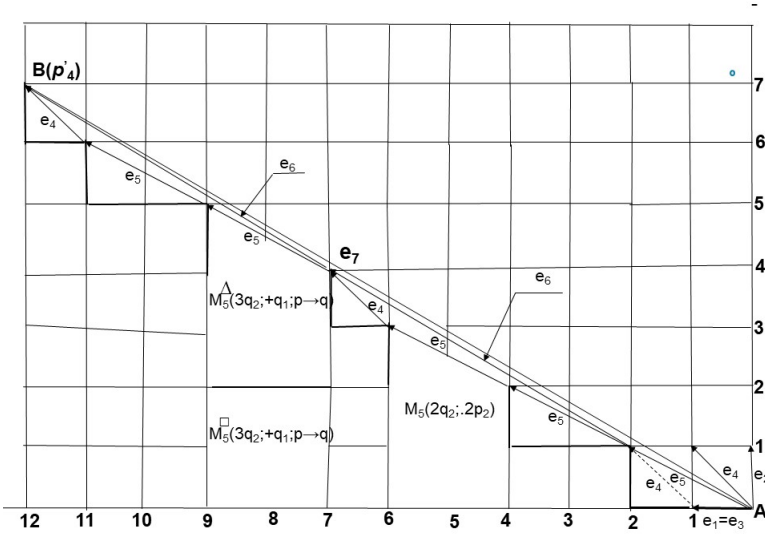


Рис. 4. Геометрическая изображение формул (3.2) и (3.3) в системе координат Ae_1e_2 ; $\frac{p_4}{p_4} = \frac{7}{12} = [0; 1, 1, 2, 2]$.

выбора путей в $G_1(\alpha)$ о чем будет сказано ниже. Тогда в качестве начальными условиями для (3.1) достаточно взять любые целые числа μ_{2m_0} и μ_{2m_0+1} .

Отметим, что разности $\mu_{2m+2}(q_N - (q_{2m-2} + k_{2m+3}q_{2m-1}); p_{2m-2} + k_{2m+3}p_{2m-1})$ вычисляются с помощью формул преобразований, определяемых формулами

$$\begin{aligned} M_{k+3}(q_j + l_1; p_j + l_2) &= M_{k+3}^\Delta(q_j + l_1; p_j) \cup M_{k+3}^\square(q_j + l_1; p_j), \\ M_{k+3}^\Delta(q_j + l_1; p_j) &= \bar{e}_{j+3} + M_{k+3}(l_1; l_1), \quad M_{k+3}^\square(q_j + l_1; p_j) - \\ &\text{прямоугольник с ближ. вершиной } (q_j + l_1; 0) \text{ к } A, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+3}(l_1 + q_j; l_2 + p_j) &= \mu_{k+3}^\square(l_1 + q_j; p_j) + \mu_{k+3}^\Delta(l_1 + q_j; p_j), \\ \mu_{k+3}^\square(l_1 + q_j; p_j) &= (-1)^{l_1+q_j} (-1)^{q_N-1} \delta_{\ominus, (q_k p_j) \mp}, \\ \mu_{k+3}^\Delta(l_1 + q_j; l_2) &= (-1)^{q_j+p_j} (-1)^{q_N-1} \mu_{k+3}(l_1; l_2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\delta_{\ominus, (q_k p_j) \mp}$ – символ Кронекера, а верхний индекс \mp указывает, что при нечётном $q_k p_j$ он равен единице, а при чётном – нулю. Эти формулы следуют из геометрических соображений и [3; 4.1, предложение 2], см. также рис. 4, 4.

Доказательство теоремы 3 разбивается на двенадцать случаев. Это связано со следующим обстоятельством. Так как элементы a_n цепной дроби $\alpha(a_{2m-1}^+)$, начиная с a_{2m-1} являются чётными, то бесконечные пути на $G_1(\alpha)$ с началом в вершине \mathbf{X}_{2m-1} имеют вид $\mathbf{X}_{2m-1}R^\infty$, $\mathbf{X} \in \overline{\mathbf{1}, \mathbf{6}}$. Каждому из них на $G_0(\alpha)$ соответствует единственны путь $(\mp; \mp)_{2m-1}R^\infty$ – выбор знаков в $(\mp; \mp)_{2m-1}$, определяется конкретным значением \mathbf{X} из $\overline{\mathbf{1}, \mathbf{6}}$. Например, при $\mathbf{X} = \mathbf{3}$ вершина $(\mp; \mp)_{2m-1} = (-; +)_{2m-1}$, см. рис. 1.

Для того, чтобы начальные условия для 3.1, а именно: μ_{2m_0} и μ_{2m_0+1} , в качестве начальной вершины пути $\mathbf{X}_{2m-1}R^\infty$ выберем \mathbf{Y}_{2m-3} такую, что существовал путь, связывающий путь \mathbf{Y}_{2m-3} с \mathbf{X}_{2m-1} . В итоге получаем следующую совокупность путей:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{3}_0\mathbf{5}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{6}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{1}_{n_k} R^2\mathbf{1}_{(n+2)_{4k}}, \\
& \mathbf{3}_0\mathbf{3}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{4}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{2}_{n_k} R^2\mathbf{2}_{(n+2)_{4k}}, \\
& \mathbf{3}_0\mathbf{6}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{5}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{3}_{n_k} R^2\mathbf{3}_{(n+2)_{4k}}, \\
& \mathbf{3}_0\mathbf{1}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{2}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{4}_{n_k} R^2\mathbf{4}_{(n+2)_{4k}}, \\
& \mathbf{3}_0\mathbf{4}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{3}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{5}_{n_k} R^2\mathbf{5}_{(n+2)_{4k}}, \\
& \mathbf{3}_0\mathbf{2}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} LR^\infty, \mathbf{3}_0\mathbf{1}_{(2m-3)_{\lfloor 2^{-3}i \rfloor}} R^\infty, \mathbf{6}_{n_k} R^2\mathbf{6}_{(n+2)_{4k}},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где в каждой строке указаны звенья, с помощью которых построены пути из той же строки, причем $n_k = (2m+2(k-2))_{\lfloor 2^{2(k-2)}i \rfloor}$, $k \in \mathbb{N}$. Формул 3.4 получены на основании свойств графа $G_0(\alpha)$ чётности и его надграфа $G_1(\alpha)$.

Выбор вершины \mathbf{Y}_{2m-3} порядка $2m-3$ связан не только с начальными условиями, но и формулой:

$$\begin{aligned}
\mu_{2m}((a_{2m-1}+1)q_{2m-2}; p \rightarrow q) &= \mu_{2m}(q_{2m-4} + a_{2m-2}q_{2m-3} + a_{2m-1}q_{2m-2}; \\
p \rightarrow q) &= (-1)^{a_{2m-2}(q_{2m-3}+p_{2m-3})+a_{2m-1}(q_{2m-2}+p_{2m-2})} \mu_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}).
\end{aligned}$$

Так как для вычисления разности по этой формуле необходимо знать чётности компонент пар $(q_{2m-3}; p_{2m-3})$ и $(q_{2m-2}; p_{2m-2})$, а $\mu_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}) = \mu_{2m}$. Аналогично дело обстоит со вторым начальным условием $\mu_{2m+1} = \mu_{2m+1}(q_N; 0)$.

Список литературы

- [1] М. М. Галламов Шахматная раскраска и прямые $y = -\alpha(a_{2m-1}^+) \cdot x + t$, $\alpha(a_{2m-1}^+)$, $t > 0$, $\alpha(a_{2m-1}^+) = [a_0; a_1, \dots, a_{2m-2}, a_{2m-1}^+, \dots]$ с чётными a_{2m-1}^+, \dots при произвольно фиксированном m / Семинар МИРАН им. В. А. Стеклова «Современные проблемы теории чисел», 5 марта 2026 г. 12:30 . [Video record] https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=48845 https://www.mathnet.ru/PresentFiles/49358/gallamov_dorlad5_3_2026.pdf https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=49358&option_lang=rus
- [2] Галламов М. М. *Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.
- [3] М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38. <https://www.mathnet.ru/links/1c404cf68db756dde5e042ca67b33703/cheb1220.pdf>

М. М. Галламов
E-mail: gallamov@gmail.com

Поступила в редакцию
5-5-2026 г.