М. М. Галламов

О некоторых подходах к решению задачи С. В. Конягина о шахматной раскраске

`Задача Конягина о шахматной раскраске.` Пусть единичные квадраты с целыми вершинами первой четверти I_{OXY} прямоугольной системы координат OXY, раскрашены в шахматном порядке, а прямая $l(t) : y = -\alpha x + t$, $t > 0$, отсекает от I_{OXY} треугольник ΔOAB. Разность $u(t)$ между числами белых и черных клеток, (целиком) входящих в ΔOAB не ограничена ни снизу, ни сверху при $t \to \infty$ для любого положительного иррационального α.

0.1. Основной результат доклада. Пусть OXY — прямоугольной системе координат с целочисленной решеткой, AB — отрезок с целыми концами $A = (q; 0)_{OXY}$ и $B = (0; p)_{OXY}$ такими, что разложение $\frac{p}{q}$ в цепную дробь имеет вид $[0; a_1, 1, a_3, ..., a_N]$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, где индекс OXY говорит о том,что координаты указаны в OXY, $N = 2N' + 1$, $a_1, a_3, ..., a_N, p, q, N' \in \mathbb{N}$; $\mathtt{НОД}(p, q) = 1$.

Рассмотрим множество $\mathbf{S}_{AB}$ единичных квадратов (*клеток*) этой решетки, внутренность каждая ого из них имеет непустое пересечение с AB, тогда граница этого множества представима в виде объединения ломаных $\mathtt{S}^-_{AB}$ и $\mathtt{S}\ ^+_{AB}$ таких, что их крайними вершинами служат точки A и B. Здесь индекс минус (плюс) указывает на то, что $\mathtt{S}^-_{AB}$ ($\mathtt{S}^+_{AB}$) лежит по левую (правую) сторону от отрезка AB при движение от A к B, см. рис. 1.

Ломаная $\mathtt{S}^-_{AB}$ ($\mathtt{S}^+_{AB}$) назовем *левой (правой) (целочисленной) ступенчатой аппроксимацией отрезка* AB. Для краткости такие ломаные будем называть *маршами.*

В этом определении термин “*целочисленный*” по двум причинам: $\mathtt{S}^-_{AB}$ и $\mathtt{S}^+_{AB}$ имею целые вершины и внутри $\mathbf{S}_{AB}$ нет целых точек.

`Основной результат:` *получены формулы для координат* $(x_1; y_1)$,... , $(x_I; y_I)$ *правых вершин* A_{s_1}, ... , A_{s_I}*, горизонтальных звеньев (ступеней) наименьшей длины (ширины).*

`Пояснения.` Пусть клетки раскрашены в шахматном порядка. Если нам известны координаты вершины некоторой клетки, то по этим координатам мы можем установить цвет клетки. Ширина ступеней равна a_1 или $a_1 + 1$, где a_1 элемент первого порядка цепной дроби $[0; a_1, 1, a_3, ..., a_{2N'+1}] = \frac{p}{q}$. При нечетном a_1 ширина a_1+1 четна, а поэтому разность между числами белых и черных клеток прямоугольника, принадлежащего ΔOAB, у которого одна из сторон еь ступень ширины $a_1 + 1$, равна нулю. (На рис. 1. один из таких прямоугольников частично выделен пунктиром.) Поэтому разность ΔOAB между числами белых и черных клеток из ΔOAB определяется формулой:

$$u(p) = \sum_{i=1}^{I} (-1)^{x_i} \delta_{\ominus, y_i^{\pm}}, \tag{0.1}$$

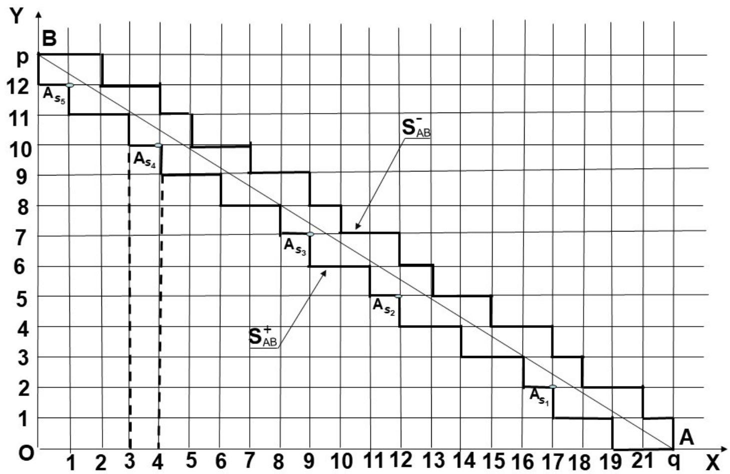

Рис. 1. Ступенчатая целочисленная аппроксимация отрезка AB

где $\delta_{\ominus, y_i^{\pm}}$ — символ Кронекера верхний, а индекс $\pm$ в обозначении $y_i^{\pm}$ указывает на четность ординаты y_i — плюс говорит, что она четна, минус — нечетна, что отразим в виде записи: $y_i^{+} = \oplus$ и $y_i^{-} = \ominus$.

0.2. Формулы целочисленной аппроксимации. Такие формулы вводятся с помощью подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ порядка n цепных дробей $[a_0; a_1 ...]$, которая может быть как конечна, так и бесконечна, $a_0 \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \in \mathbb{N}$. Подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$ вычисляется через рекуррентные формулы И удовлетворяют тождеству:

$$\begin{gathered} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ n \in \mathbb{N}_0; \\ p_{-2} = 0,\ q_{-2} = 1,\ p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0;\ |p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| \equiv (-1)^{n-1} \end{gathered} \tag{0.2}$$

Рассмотрим последовательность векторов $\overline{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отсюда на основании (0.2) получаем следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{gathered} \overline{e}_{n+3} = \overline{e}_{n+1} + a_n \overline{e}_{n+2} = q_n \overline{e}_1 + p_n \overline{e}_2,\ n \in \mathbb{N}_0 \\ \overline{e}_1 = \overline{(q_{-2}; p_{-2})} = \overline{(1; 0)},\ \overline{e}_2 = \overline{(q_{-1}; p_{-1})} = \overline{(0; 1)}. \end{gathered} \tag{0.3}$$

Так как в основе наших исследований лежит прямая $l_{AB} : \ y = -\frac{p}{q} \cdot x + p$, то для удобства введем новую систему координат Ae_1e_2 с началом в точке $A = (q; 0)_{OXY}$, базисом $\overline{e}_1 = \overline{(-1; 0)}_{OXY}$, $\overline{e}_2 = \overline{(0; 1)}_{OXY}$, осью абсцисс Ae_1 и ординат Ae_2. В дальнейшем координаты объектов в Ae_1e_2 будут указываться без индекса Ae_1e_2. Любой вектор, определяемый (0.3), с нечетным четным) индексом лежит по левую (правую) стороны от l_{AB}, конечно, такой вектор должен быть приложен к точке A. Приложим векторы $\overline{e}_{n+1}$ и $\overline{e}_{n+2}$ к точке A и, складывая из по правилу параллелограмма, получим *алгоритм вытягивания* *носов*:

$$\overline{e}_{n+3}(A) = \overline{e}_{n+1}(A) + a_n\overline{e}_{n+2}(A),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{0.4}$$

(Положим для удобства записи: $(l_1 + f(q_1, ..., q_k); l_2 + f(p_1, ..., p_k)) = (l_1 + f(q_1, ..., q_k); l_2 + p \to q) = (l_1 + q \to p; l_2 + f(p_1, ..., p_k))$.)

Теперь осуществим сложение векторов $\overline{e}_{n+1}$ и $\overline{e}_{n+2}$ по правилу треугольника, тогда $n = 2m-2$ и $n = 2m-1$ соответственно получаем

$$\begin{gathered}\overline{e}_{2m+1}(A) = \overline{e}_{2m-1}(A) + a_{2m-3}\overline{e}_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}) = \\ \overline{e}_{2m-1}(A) + \textstyle\sum_{k_{2m+1}=0}^{a_{2m-2}-1} \overline{e}_{2m}(q_{2m-4} + k_{2m+1}q_{2m-3}, ; p \to q), \\ \overline{e}_{2m+2}(A) = a_{2m-1}\overline{e}_{2m+1}(A) + \overline{e}_{2m}(a_{2m-1}q_{2m-2}; p \to q) = \\ \textstyle\sum_{k_{2m+2}=0}^{a_{2m-1}-1} \overline{e}_{2m+1}(k_{2m+2}q_{2m-2}; k_{2m+2}p_{2m-2}) + \overline{e}_{2m}(a_{2m-1}q_{2m-2}; p \to q).\end{gathered} \tag{0.5}$$

Треугольники, получаемые при сложении, во-первых, не содержать внутри себя целых точек, во-вторых,лежат по левую сторону от полученной суммы, причем первый треугольник принадлежит внутренности $\Delta^\circ OAB$, за исключением точки A, AB пересекает второй треугольник по его внутренности. С помощью полученных равенств мы можем заменять каждый вектор-слагаемое суммами, определяемые крайними правыми частями из (0.5) при соответствующей замене индексов и точек приложения векторов-слагаемых, при этом вновь появляющиеся многоугольники будут содержать целые точки только на своей границе согласно тождеству в (0.2) и формуле Пика. Формулы (0.5) запишем в общем виде:

$$\begin{gathered}\overline{e}_{2m+1}(l_1; l_2) = \overline{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + a_{2m-2}\overline{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}), = \\ \overline{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + \textstyle\sum_{k_{2m+1}=0}^{a_{2m-2}-1} \overline{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + k_{2m+1}q_{2m-3}; l_2 + p \to q),\end{gathered} \tag{0.6}$$

$$\begin{gathered}\overline{e}_{2m'+2}(l_1'; l_2') = a_{2m'-1}\overline{e}_{2m'+1}(l_1'; l_2') + \overline{e}_{2m'}(l_1' + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; \\ l_2' + p \to q) = \textstyle\sum_{k_{2m'+2}=0}^{a_{2m'-1}-1} \overline{e}_{2m'+1}(l_1' + k_{2m'+2}q_{2m'-2}; l_2' + k'p_{2m'-2}) + \\ \overline{e}_{2m'}(l_1' + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; l_2' + p \to q).\end{gathered} \tag{0.7}$$

где m, m' $(\in \mathbb{N})$, точки приложения $(l_1; l_2)$ и $(l_1'; l_2')$ векторов задаются теми частными случаями, к которым применяться эти формулы. Формулы (0.6) и (0.7) назовем *формулами целочисленной аппроксимации.* .

0.3. Алгоритмическое построение ступенчатой ломаной $\mathtt{S}_{AB}^-$, определяемое цепной дробью $[0; a_1, 1, a_3, ..., a_{2N'+1}] = \frac{p}{q}$. Это построение основано на индуктивном методе.

`База индукции`. Положим в (0.6) и (0.7) $m = 3$, $(l_1; l_2) = (0; 0)$, $m' = 2$, $(l_1'; l_2') = (q_2 + k_7q_3; p \to q) = (a_3 + 1 + k_7q_3; 1 + k_7p_3)$, тогда

$$\begin{gathered}\overline{e}_7(0; 0) = \overline{e}_5(0; 0) + \textstyle\sum_{k_7=0}^{a_4-1} \overline{e}_6((q_2 + k_7q_3; p \to q)) = \overline{e}_5(0; 0) + \textstyle\sum_{k_7=0}^{a_4-1} \\ \Big(\textstyle\sum_{k_6=0}^{a_3-1} \overline{e}_5(k_7q_3 + (k_6+1)q_2; p \to q) + \overline{e}_4(k_7q_3 + (a_3+1)q_2; p \to q)\Big).\end{gathered} \tag{0.8}$$

Так как здесь ординаты векторов-слагаемых $\overline{e}_4 = \overline{(a_4; 1)}$ и $\overline{e}_5 = \overline{(a_4 + 1; 1)}$ равны единице, так как $a_2 = 1$ (а их абсциссы находятся с помощью (0.2) и, взятые в естественном порядке из правой части последнего равенства, то они дают

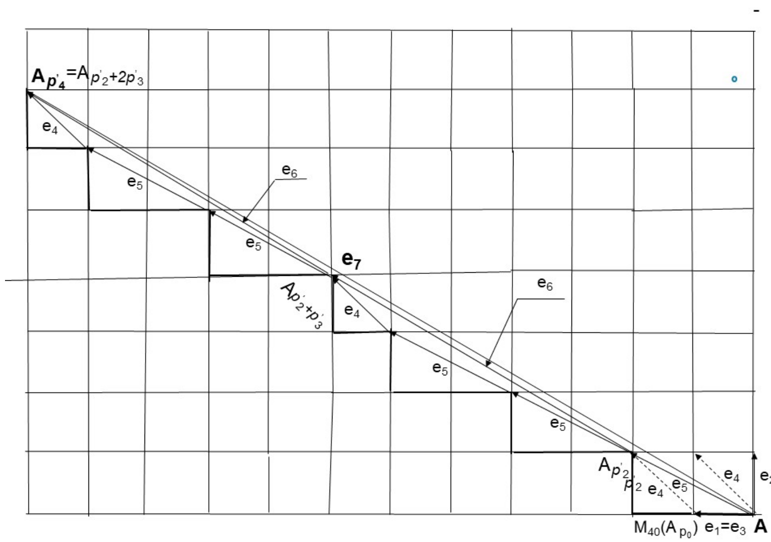

Рис. 2. Построение левой ступенчатой аппроксимации $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$ для вектора $\overline{e}_7(A) = \overline{(q_4;p_4)}_A$. Здесь подходящая дробь $\frac{p_4}{p_4} = \frac{7}{12} = [0;1,1,2,2]$.

единственную ступенчатую ломаную, см. рис. 2. Эта ломаная есть *левая ступенчатая аппроксимация (марш) вектора* $\overline{e}_7(0;0)$, которую запишем в виде упорядоченного набора.

$$\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A) = \langle \mathtt{M}^{-}_{5;0}(A); \mathtt{M}^{-}_{6;0}(A_{p_2}), ..., \mathtt{M}^{-}_{6;a_4-1}(A_{p_4-p_3})\rangle, \tag{0.9}$$

и будем говорить, что она *порождена вектором* $\overline{e}_7(0;0)$. Здесь компоненты этого набора также есть марши соответственно векторов $\overline{e}_5(A)$, $\overline{e}_6(A_{p_2+k_7p_3})$, где $A_{p_2+k_7p_3} = (q \to p; p_2 + k_7p_3)$, $k_7 = \overline{0, a_4 - 1}$.

Марш $\mathtt{M}^{-}_{5;0}(A)$ получается из (0.6) и (0.7) только при $m = 2$ и $m' = 2$. Так как $a_2 = 1$, то $\overline{e}_5(A) = \overline{e}_5(A) + \overline{e}_4(A_{p_0})$, что нам дает

$$\mathtt{M}^{-}_{5;0}(A) = \langle \mathtt{M}^{-}_{3;0}(A); \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})\rangle, \quad \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A) = -\overline{e}_3 + \mathtt{M}_{4;0}(A_{p_0}). \tag{0.10}$$

где $\mathtt{M}^{-}_{3;0}(A)$ — левая ступенчатая аппроксимация вектора $\overline{e}_3(A)$ в виде горизонтального отрезка длины a_1, совпадающий с $\overline{e}_3(A)$, а $\mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})$ — такая же ломаная, состоящая из одного горизонтального и вертикального звена, трех вершин A_{p_0}, $(q_0 + 1 : p_0) = (a_1 + 1 : 0)$ и $(q_2 : p_2) = (a_1 + 1 : 1)$. Из проделанных построений следует, что марши $\mathtt{M}^{-}_{3;0}(A)$, $\mathtt{M}^{-}_{5;0}(A)$ и $\mathtt{M}_{4;0}(A_{p_0})$ принадлежат $\mathtt{S}^{-}_{AB}$, а марш $\mathtt{M}^{-}_{4;0}(A)$ не принадлежат $\mathtt{S}^{-}_{AB}$, ибо его порождающий вектор $\overline{e}_4(A)$ лежит по правую сторону от прямой l_{AB}, а вектор-слагаемые входящие в (0.8) лежат по левую сторону от l_{AB}, см. рис. 2. *Марш* $\mathtt{M}^{-}_{6;0}(A_{p_2})$ из (0.9) запишем также в виде *упорядоченного набора*:

$$\mathtt{M}^{-}_{6;0}(A_{p_2}) = \langle \mathtt{M}^{-}_{5;0}(A_{p_2}), ..., \mathtt{M}^{-}_{5;a_3-1}(A_{a_3p_2}); \mathtt{M}^{-}_{4;a_3}(A_{p_0+p_3})\rangle, \tag{0.11}$$

где для $k_6 = \overline{1, a_3}$ компоненты

$$\begin{gathered}\mathtt{M}^{-}_{5;k_6-1}(A_{k_6p_2}) = (k_6-1)\overline{e}_5 + \mathtt{M}^{-}_{5;0}(A),\ \mathtt{M}^{-}_{4;a_3}(A_{(a_3+1)p_2}) = (a_3+1)\\ \overline{e}_5 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A) = (a_3+1)\overline{e}_5 - \overline{e}_3 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0}) = a_3\overline{e}_5 +\\ a_2\overline{e}_4 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})|_{a_2=1} = \overline{e}_6 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0}).\end{gathered} \tag{0.12}$$

Далее, при каждом фиксированном $k_7 = \overline{1, a_4}$ марш

$$\mathtt{M}^{-}_{6;k_7-1}(A_{p_2+(k_7-1)p_3}) = (k_7-1)\overline{e}_6 + \mathtt{M}^{-}_{6;0}(A_{p_2}), \tag{0.13}$$

что является завершающим аккордом в построении марша $\mathtt{M}^{-}_{7;0}$ из (0.9), что дает нам базу индукции.

Аналогичная терминология и обозначения применяются ниже без пояснений

Формулы (0.8) — (0.13) дают метод индуктивного перехода с поморью формул (0.6) и (0.7) при $m = N'$ и $p_{2m-4} + (a_{2m-2}-1)p_{2m-3} = p_{2m-2} - p_{2m-3}$ получаем *алгоритмическое задание ломаной* $\mathtt{S}^{-}_{AB}$ в виде рекуррентных формул (0.14) и (0.15):

$$\mathtt{M}^{-}_{2m+1;0}(A) = \langle \mathtt{M}^{-}_{2m-1;0}(A); \mathtt{M}^{-}_{2m;0}(A_{p_{2m-4}}), ., \mathtt{M}^{-}_{2m;a_{2m-2}-1}(A_{p_{2m-2}-p_{2m-3}})\rangle \tag{0.14}$$

где компоненты $\mathtt{M}^{-}_{2m;k_{2m+1}-1}(\cdot)$ для $k_{2m+1} = \overline{1, a_{2m-2}}$ определяются через

$$\begin{gathered}\mathtt{M}^{-}_{2m;k_{2m+1}-1}(A_{p_{2m-4}+(k_{2m}-1)p_{2m-3}}) = \langle \mathtt{M}^{-}_{2m-1;0}(A_{p_{2m-4}+(k_{2m}-1)p_{2m-3}}),\\ ..., \mathtt{M}^{-}_{2m-1;a_{2m-3}-1}(A_{a_{2m-3}p_{2m-4}+(k_{2m}-1)p_{2m-3}});\\ \mathtt{M}^{-}_{2m-2;a_{2m-3}}(A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}+(k_{2m}-1)p_{2m-3}})\rangle,\end{gathered} \tag{0.15}$$

для $m = \overline{3, N'}$ с начальными условиями (0.9), причем N' такое, что $N = 2N'+1$.

Технически алгоритм (0.14) реализуется следующим образом. Начальные условия (0.9) дают марш $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$ из (0.14) при $m = 3$. Компоненты из (0.14) и (0.15) находятся подобно (0.12) и (0.13) через параллельный сдвиг:

$$\begin{gathered}\mathtt{M}^{-}_{2m-1;k_{2m}-1}(A_{k_{2m}p_{2m-4}}) = k_{2m}\overline{e}_{2m-1} + \mathtt{M}^{-}_{2m-1;0}(A), k_{2m} = \overline{1, a_{2m-3}};\\ k_{2m} = a_{2m-3}+1;\ \mathtt{M}^{-}_{2m-2;a_{2m-3}}(A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}}) = (a_{2m-3}+1)\overline{e}_{2m-1}\\ + \mathtt{M}^{-}_{2m-2;0}(A) = a_{2m-3}\overline{e}_{2m-1} + a_{2m-4}\overline{e}_{2m-2} + \mathtt{M}^{-}_{2m-2;0}(A_{p_{2m-6}}),\end{gathered} \tag{0.16}$$

и для $k_{2m+1} = \overline{1, a_{2m-2}}$

$$\mathtt{M}^{-}_{2m;k_{2m+1}-1}(A_{p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}) = (k_{2m+1}-1)\overline{e}_{2m} + \mathtt{M}^{-}_{2m;0}(A_{p_{2m-4}}) \tag{0.17}$$

На выходе этот алгоритм дает ступенчатую ломаную $\mathtt{S}^{-}_{AB}$, так как каждый последующий марш в (0.14) получается из предыдущего параллельным сдвигом, начиная с марша (0.9) с учетом (0.10) – (0.13) . Вследствие чего имеет место

Теорема 1. *Пусть Ae_1e_2 — система координат с базисом $\overline{e}_1 = \overline{(-1;0)}_{OXY}$, $\overline{e}_2 = \overline{(0;1)}_{OXY}$ и началом $A = (q;0)_{OXY}$, где координат взяты в прямоугольной системе координат OXY. Тогда алгоритм, определяемый рекуррентными формулами (0.14) — (0.17) с начальными условиями (0.9), на выходе при $m = N'$ дает аналитическое задание в Ae_1e_2 левой ступенчатой аппроксимация S^{-}_{AB} отрезка AB, порожденного цепной дробью $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$ $(= \frac{p}{q}$, $B = (0;p)_{OXY})$.*

Аналитическое задание правой целочисленной ступенчатой аппроксимация $\mathtt{S}^{+}_{AB}$ отрезка AB, определяемого цепной дроби $[0; a_1, 1, a_3, a_4, ..., a_N]$ имеет тот же вид, что и $\mathtt{S}^{-}_{AB}$ в Ae_1e_2 только в системе координат $Be'_1e'_2$ с базисом $\overline{e}'_1 = (-1; 0)_{OXY}$, $\overline{e}'_2 = (0; -1)_{OXY}$ и началом $B = (0; p)_{OXY}$ в силу центральной симметрии прямоугольника $OABC$, где $C = (q; p)_{OXY}$. Чтобы получить аналитическое представление $\mathtt{S}^{-}_{AB}$ и $\mathtt{S}^{+}_{AB}$ в системе координат OXY нужно соответственно перейти от Ae_1e_2 и $Be'_1e'_2$ к OXY. .

0.4. Расположение ступеней ширины a_1 в $\mathtt{S}^{-}_{AB}$. *Основная задача* найти ступени $\mathtt{h}^{-}_i(A_i; A_{i+1})$, $i \in I$, ширины a_1, порожденные соответственно $\overline{e}_4(A_i) = \overline{(q_1; p_1)}_{A_i} = \overline{(a_1; 1)}_{A_i}$, где I — множество из (0.1). В обозначении ступени $\mathtt{h}^{-}_i(A_i; A_{i+1})$ точки A_i и A_{i+1} есть концы вектора $\overline{e}_4(A_i)$, а индексы у этих точек, как и у самой ступени есть их ординаты. Для краткости записи чаще будем применять обозначение $\mathtt{h}^{-}_i(\cdot;\cdot)$ вместо того, которое ввели.

Положим $m = 3$ в (0.14), тогда получаем марш $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$, см. (0.9). Первая его компонента $\mathtt{M}^{-}_{5;0}(A)$ (см. (0.10) порождена вектором $\overline{e}_5(A)$ и поэтому она есть нулевая ступень $\mathtt{h}^{-}_0(A; A_{p_2})$ ширины $a_1 + 1$, а остальные a_4 компоненты задаются (0.11) и (0.13). Из (0.10) — (0.13) следует, что каждый марш $\mathtt{M}^{-}_{6;k_7-1}(A_{p_2+(k_7-1)p_3})$ при фиксированном $k_7 = \overline{1, a_4}$ содержит одну ступень ширины a_1:

$$\begin{gathered}\mathtt{h}^{-}_{(a_3+1)p_2+(k_7-1)p_3}(\cdot;\cdot) = (k_7-1)\overline{e}_6 + a_3\overline{e}_5 + a_2\overline{e}_4 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0}) = \\ k_7\overline{e}_6 + (a_2-1)\overline{e}_4|_{a_2=1} + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0}) = k_7\overline{e}_6 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0}) = \mathtt{h}^{-}_{p_0+k_7p_3}(\cdot;\cdot), \\ H^{-}_{7;0}(A) = \cup_{k_7=1}^{a_4}\{k_7\overline{e}_6 + \mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})\} = \cup_{k_7=1}^{a_4}\{\mathtt{h}^{-}_{p_0+k_7p_3}(\cdot;\cdot)\}.\end{gathered} \tag{0.18}$$

Здесь $\mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})$ в силу (0.10) не является ступенью, а составляет только часть её нулевой ступени, $H^{-}_{7;0}(A_{p_2})$ — множество, полученное объединением всех ступеней ширины a_1 в количестве a_4 штук из $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$. Отметим, что параметр k_7 указывает порядок расположения среди ступеней ширины a_1 при движении по маршу $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$, вследствие введения такого порядка $\mathtt{h}^{-}_{p_0+p_3}(\cdot;\cdot)$ — первая ступень и она принадлежит второй компоненте $\mathtt{M}^{-}_{6;0}(A_{p_2})$ из $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$. Каждая ступень $\mathtt{h}^{-}_{p_0+k_7p_3}(\cdot;\cdot)$ из (0.18) есть горизонтальное звено ломаной $\mathtt{S}^{-}_{AB}$ соответственно начало и конец этого звена в OXY таковы:

$$\begin{aligned}\mathtt{A}_{p_0+k_7p_3} &= (q - (q_0 + k_7q_3); p_0 + k_7p_3)_{OXY}, \\ \mathtt{A}^{\mathtt{e}}_{p_2+k_7p_3} &= (q - (q_2 + k_7q_3); p_0 + k_7p_3)_{OXY}.\end{aligned}$$

Итак, маршу $\mathtt{M}^{-}_{7;0}(A)$ принадлежит ровно a_4 ступеней $\mathtt{h}^{-}_{p_0+k_7p_3}(\cdot;\cdot)$ ширины a_1, которые получаются параллельным переносом горизонтального отрезка $\mathtt{M}^{-}_{4;0}(A_{p_0})$ с концевыми точками $A_{p_0} = (1; 0)$ и $A^{\mathtt{e}}_{p_2} = (a_1 + 1; 0)$. Этот перенос задается левой частью из последнего равенства в (0.18), когда k_7 пробегает множество $\{\overline{1, a_4}\}$.

Остальные искомые ступени определяются с помощью алгоритма в виде параллельных переносов (0.16) и (0.17). Работу этого алгоритма отразим на графе с рис. 3.

Описание графа на рис. 3. Вершины $H^{-}_{k;0}(\cdot)$, $k = \overline{7, 2m+1}$, есть множества, образованное ступенями ширины a_1 и принадлежащие маршу $\mathtt{M}^{-}_{k;0}(\cdot)$ а направленные ребра снабжены весом в виде одного вектора или семейства векторов,

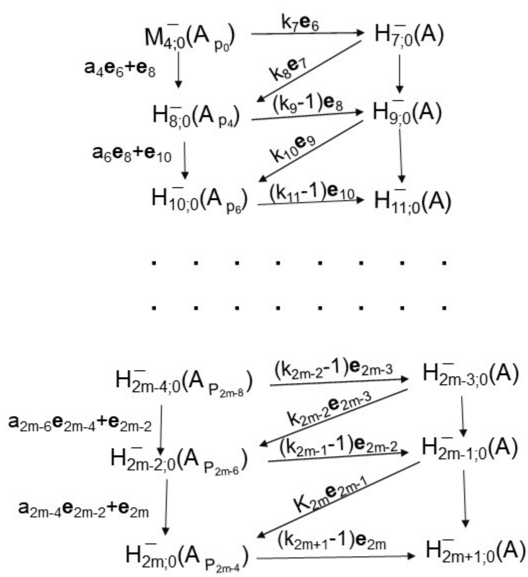

Рис. 3. Граф, дающий значение индексов ступеней ширины a_1 марша $\mathtt{M}^-_{2m+1;0}(A)$, $m = \overline{3, N'}$. На графе $\mathbf{e} = \overline{e}$, $k_s = \overline{1, a_{s-3}}$, $s = 2m+1$.

определяемых параметром k_s, $s = 2m + 1$, если вес не указан, то считается нулевым вектором. Когда вес содержит параметр k_s, $s = 2m+1$, то вес состоит из семейства векторов, определяемым всевозможным выбором k_s из множества $\{\overline{1, a_{s-3}}\}$.

Множество $H^-_{k;0}(\cdot)$, $k = \overline{8, 2m+1}$, есть объединение множеств $H^-_{k-2;0}(\cdot)$ и $H^-_{k-1;0}(\cdot)$ после того, как к любому элементу каждого из этих прибавляются соответствующие вектора, в случае когда вес есть семейство векторов, то прибавляется каждый вектор этого семейства. (При $k - 2 = 6$,нужно заменить множество $H^-_{6;0}(\cdot)$ на $\mathtt{M}^-_{4;0}(A_{p_0})$.) Такой процесс объединения обеспечивается алгоритмом, определяемым (0.16) и (0.17). Частный случай работы этого алгоритма мы имеем в (0.18).

Так как в вершину $H^-_{7;0}(\cdot)$ входит только одно ребро,а из каждой вершины $H^-_{k;0}(\cdot)$ исходит два ребра при $k = \overline{7, 2m+1}$ и входит также два при $k = \overline{8, 2m+1}$, то общее количество путей с началом $\mathtt{M}^-_{4;0}(A_{p_0})$ и концом $H^-_{2m+1;0}(\cdot)$ равно числу Фибоначчи F_{2m-5} при условии, что $F_0 = F_1 = 1$. Число элементов множества $H_{2N'+1;0}(A)$ дает нам верхний предел I суммирования в (0.1), а координаты x_i и y_i точки A_{s_i}, которые участвую в этом суммировании, находятся следующим образом..

Пусть $W_{2m+1} = \{w_{2m+1;1}, ..., w_{2m+1;F_{2m-5}}\}$ — множество путей из $\mathtt{M}_{4;0}(A_{p_0})$ в $H_{2m+1;0}(A)$, а $\overrightarrow{K}(w_{2m+1;i}) = \{\overline{\kappa}_l(w_{2m+1;i})\}_{l=1}^{j_{2m+1;i}}$, $i = \overline{1, F_{2m-5}}$, — последовательность весов либо в виде семейства векторов, либо в виде одного вектора (включая и нулевые), из $w_{2m+1;i}$, взятые в порядке, который задает движение вдоль пути $w_{2m+1;i}$ от $\mathtt{M}_{4;0}(A_{p_0})$ к $H_{2m+1;0}(A)$. При каждом фиксированном i из $\{\overline{1, F_{2m-5}}\}$ выбираем произвольным образом вектор в каждом элементе из $\overrightarrow{K}(w_{2m+1;i})$, который является семейством и дсуммиро=уя и с оставшимися векторами в $\{\overline{1, F_{2m-5}}\}$. Ординату полученного вектора складываем с p_0 получаем индекс ступени ширины a_1. Перебирая содержимое всех семейств векторов из $\overrightarrow{K}(w_{2m+1;i})$ таким образом при произвольно фиксированном i, получаем множество искомых ступеней, который дает путь $w_{2m+1;i}$. Поступаем так с каждым i из $\{\overline{1, F_{2m-5}}\}$ мы найдем все искомые ступени, принадлежащие маршу $\mathtt{M}_{2m+1;0}(A)$, $m = \overline{3, N'}$, что является основным результатом доклада.

Более подробно о целочисленной аппроксимации см.

М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38.
https://www.mathnet.ru/links/234a67f15bac6686abfb4000f5d3c545/cheb1220.pdf