О числе корневых остовных лесов в циркулянтном графе

Грюнвальд Л. А. В соавторстве с Медных И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

9 апреля 2024 г.

- The number of rooted forests in circulant graphs, Grunwald, L.A., Mednykh, I.A., ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA 22 (2022)
- Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph, L. A. Grunwald, Y. S. Kwon, I. A. Mednykh, Tohoku Math. J. (2) 74(4): 535-548 (2022)
- Abrosimov N. V., Baigonakova G. A., Grunwald L. A., Mednykh I. A. Counting rooted spanning forests in cobordism of two circulant graphs, Siberian Electronic Mathematical Reports**17**, 814–823 (2020)
- Spectral Invariants of Graphs and Their Applications to Combinatorics, Grunwald L. A., Mednykh A. D., Mednykh I. A., Herald of Omsk University (2023)

Граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq \frac{n}{2}$ называется ***циркулянтным***, если вершина i, $0 \leq i \leq n-1$ смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \ldots, i \pm s_k \pmod{n}$.

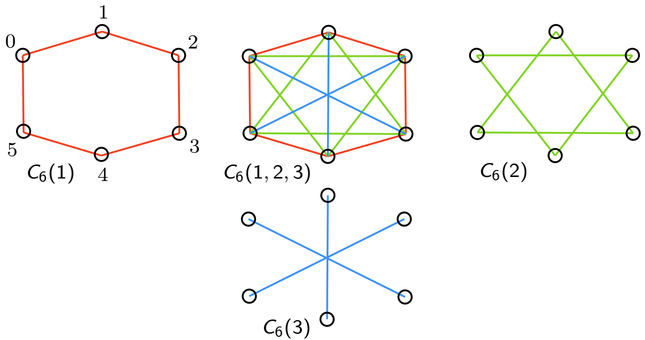


Рис.: Циркулянтные графы

- Когда $s_k < \frac{n}{2}$, все вершины графа имеют чётную степень $2k$.
- Если n чётно и $s_k = \frac{n}{2}$, то все вершины имеют нечётную степень $2k-1$. Такие циркулянтные графы мы будем обозначать как $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, где $2n$ подчёркивает чётность числа вершин, соответствуя условиям на параметры $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$.

Остовным деревом графа G называется множество ребер G, которое соединяет все его вершины и не содержит циклов. ***Остовным лесом*** на графе G называется ацикличный подграф графа G, что множество его вершин совпадает со множеством вершин G. Связные компоненты леса — это деревья. Лес называется ***корневым***, если для каждого входящего дерева выбран корень. k-***лесом*** называется лес из k деревьев.

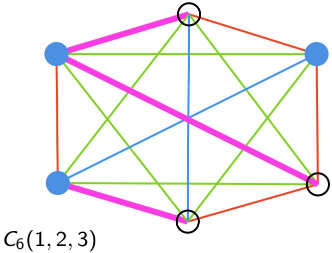


Рис.: Корневой остовный 3-лес графа

Матрицей Лапласа (или *матрицей Кирхгофа*) графа G называется матрица $L(G) = D(G) - A(G)$, где $D(G)$ — диагональная матрица составленная из степеней вершин G, а $A(G)$ — матрица смежности графа G.

Mark Kac, Can One Hear the Shape of a Drum?

The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2: Papers in Analysis

(Apr., 1966), pp. 1-23 (1966).

Пусть

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda$$

— характеристический многочлен графа G. По классической теореме Кельманса-Челнокова [1], абсолютное значение k-го коэффициента характеристического многочлена совпадает с числом корневых остовных k-лесов в графе G.

[1] *Kelmans, A.K., Chelnokov, V.M.: A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees. J. Combin. Theory, Ser. B 16, 197–214 (1974)*

В результате, *число* $f(G)$ *отмеченных остовных лесов* в графе G равно

$$\begin{aligned} f(G) &= |c_1 - c_2 + \ldots + (-1)^{n-1} c_{n-1} + (-1)^n c_n| \\ &= (-1)^n \chi_G(-1) = \det(I_n + L(G)), \end{aligned}$$

Этот результат был независимо получен многими авторами (P. Chebatorev, E. Shamis, O. Knill и другими).

Теорема 1

Пусть G — циркулянтный граф с чётной степенью вершин. Тогда число $f(n)$ корневых остовных лесов в графе G задается формулой

$$f(n) = \prod_{p=1}^{s_k} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $w_p,\ p = 1, 2, \ldots, s_k$ — корни алгебраического уравнения

$$\sum_{j=1}^{k} (2T_{s_j}(w) - 2) = 1,$$

а $T_k(w) = \cos(k \arccos w)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода.

Лапласиан циркулянтного графа — циркулянтная матрица.

$$circ(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

— циркулянтная матрица (определяется всего одной строкой).

Например, $\mathtt{T}_n = circ(0, 1, \dots, 0)$ — матрица сдвига. Тогда получим композицию матрицы

$$I_n + L(G) = P(\mathtt{T}_n) = (2k+1)I_n - \sum_{i=1}^{k}(\mathtt{T}_n^{s_i} + \mathtt{T}_n^{-s_i}),$$

где

$$P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}) \text{ — многочлен Лорана.}$$

Теорема 2

Пусть G — циркулянтный граф с нечётной степенью вершин. Тогда число $f(n)$ корневых остовных лесов в графе G задается формулой

$$f(n) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2)(2T_n(v_p) + 2),$$

где u_p и v_p, $p = 1, 2, \ldots, s_k$ корни алгебраических уравнений $Q(u) - 1 = 0$ и $Q(v) + 1 = 0$ соответственно. Здесь $Q(w) = 2k + 2 - 2\sum_{i=1}^{k} T_{s_i}(w)$, где $T_k(w) = \cos(k \arccos w)$ — многочлен Чебышёва первого рода.

$$I_{2n} + L(G) = (2k+2)I_{2n} - \sum_{j=1}^{k}(\mathtt{T}^{s_j} + \mathtt{T}^{-s_j}) - \mathtt{T}^{n}.$$

Матрица смежности графа $C_6(1,3)$ имеет композицию

$$\mathtt{T}_6^1 + \mathtt{T}_6^{-1} + \mathtt{T}_6^3,$$

где

$$\mathtt{T}_6^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3

Пусть $f(n)$ — число корневых остовных лесов в циркулянтном графе G с чётной степенью вершин. Пусть p — число нечётных элементов в последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и q — свободная от квадратов часть числа $4p+1$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(n) = a(n)^2$, *если n нечётное;*
2. $f(n) = q\, a(n)^2$, *если n чётное.*

Теорема 4

Пусть $f(n)$ — число корневых остовных лесов в циркулянтном графе G с нечётной степенью вершин. Обозначим через p — количество нечётных элементов в последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Пусть q будет свободной от квадратов частью числа $4p+1$ и r будет свободной от квадратов частью числа $4p+3$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(n) = q\, a(n)^2$, *если n чётное;*
2. $f(n) = r\, a(n)^2$, *если n нечётное.*

Теорема 5

Число корневых остовных лесов $f(n)$ *в циркулянтном графе* $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \frac{n}{2}$ *имеет следующую асимптотику*

$$f(n) \sim A^n, \text{ при } n \to \infty,$$

где $A = \exp(\int_0^1 \log(P(e^{2\pi it}))dt)$ *— мера Малера многочлена Лорана*

$$P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Теорема 6

Число корневых остовных лесов $f(n)$ *в циркулянтном графе* $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$ *имеет следующую асимптотику*

$$f(n) \sim K^n, \text{ при } n \to \infty.$$

Здесь $K = \exp(\int\limits_0^1 \log(P^2(e^{2\pi it}) - 1)dt)$ — *мера Малера многочлена Лорана* $P(z)^2 - 1$, *где* $P(z) = 2k + 2 - \sum\limits_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i})$.

Граф-цикл $G = C_n(1) = C_n$.

Согласно теореме 1, нам нужно решить уравнение $1 + 2 - 2T_1(w) = 0$. Его единственным корнем является $w = 3/2$. Тогда число корневых остовных лесов находится по формуле $f(n) = 2T_n(3/2) - 2$. Более того, по теореме 3, оно имеет следующую асиптотику

$$f(n) \underset{n\to\infty}{\sim} (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n.$$

Стоит отметить, что по теореме 2, число корневых остовных лесов совпадает с квадратом последовательности Фибоначчи $f(n) = 5F_n^2$, если n чётное, и с квадратом последовательности Люка $f(n) = L_n^2$, если n нечётное.

Граф лесница Мёбиуса $G = C_{2n}(1, n)$.

Согласно теореме 2, нам нужно решить уравнения $3 - 2T_1(w) = 0$ и $5 - 2T_1(w) = 0$. Их корнями являются числа $u_1 = \frac{3}{2}$ и $v_1 = \frac{5}{2}$ соответственно. Тогда по теореме 6 имеем

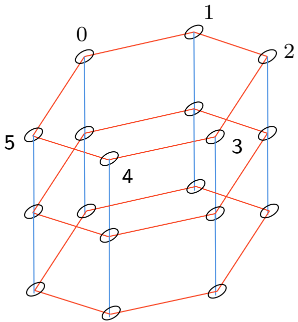
$$f(n) = (2T_n(\frac{3}{2}) - 2)(2T_n(\frac{5}{2}) + 2) \underset{n\to\infty}{\sim} K^n,$$

где $K = \frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{21}) \simeq 12.5438\ldots$. По теореме 4, $f(n) = 5a(n)^2$, если n чётное, и $f(n) = 7a(n)^2$, если n нечётное для некоторой целочисленной последовательности $a(n)$.

Пусть H будет конечным графом с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_m$, допускающим наличие кратных рёбер, но без петель. Пусть a_{ij} количество рёбер между вершинами v_i и v_j.

Циркулянтное расслоение $H_n = H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ **над графом** H со слоями $G_1, G_2, \ldots, G_m$ является графом с множеством вершин $V(H_n) = \{(k, v_i) | k = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, m\}$, где для фиксированного k вершины (k, v_i) и (k, v_j) соединены a_{ij} рёбрами, в то время как для фиксированного i, вершины $(k, v_i), (k + s_{i,1}, v_i), (k + s_{i,2}, v_i), \ldots, (k + s_{i,k_i}, v_i) \pmod n$ смежны.

H



$H(G_1, G_2, G_3)$

Матрица $I_{nm} + L(H_n)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} P_1(\mathtt{T}_n) & -a_{1,2}I_n & -a_{1,3}I_n & \dots & -a_{1,m}I_n \\ -a_{2,1}I_n & P_2(\mathtt{T}_n) & -a_{2,3}I_n & \dots & -a_{2,m}I_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1}I_n & -a_{m,2}I_n & -a_{m,3}I_n & \dots & P_m(\mathtt{T}_n) \end{pmatrix},$$

где

$$P_i(z) = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}), \qquad (1)$$

для $i = 1, \dots, m$.

Если в (1) сделать замену $\frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = T_n(\frac{1}{2}(z + z^{-1}))$, то получим $w_i = 2k_i + d_i + 1 - \sum\limits_{j=1}^{k_i} 2\, T_{s_{i,j}}(w)$, где $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.

Обобщенная матрица Лапласа $Q(w)$ графа H_n имеет следующий вид

$$Q(w) = \det \begin{pmatrix} w_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & w_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & w_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $V' = (v_1, v_2, \ldots, v_{m'})$ будет подмножеством (возможно, пустым) вершин графа H с тривиальными циркулянтными слоями $C_n(\emptyset)$. Определим H', как подграф графа H, индуцированный вершинами V'.

Теорема 4

Число корневых остовных лесов $f(n)$ в циркулянтном расслоении над графом H, обозначаемое как $H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$, задается формулой

$$f(n) = \eta^n \prod_{p=1}^{s} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \ldots + s_{m,k_m}$, w_p, $p = 1, 2, \ldots, s$ являются всеми корнями уравнения $Q(w) = 0$ и $\eta = \det(L(H', X'))$.

Теорема 5

Пусть $f(n)$ *— число корневых остовных лесов в графе* H_n, *а* $f(H)$ *— число корневых остовных лесов в графе* H. *Пусть* q *будет свободной от квадратов частью числа* $Q(-1)$. *Тогда существует целочисленная последовательность* $a(n)$ *такая, что*

1. $f(n) = f(H)\,a(n)^2$, *если* n *нечётное,*
2. $f(n) = q\,f(H)\,a(n)^2$, *если* n *чётное.*

Теорема 6

Асимптотическое поведение для числа остовных лесов с корнями $f(n)$ *в графе* H_n *задается формулой*

$$f(n) \sim A^n,\ n \to \infty,$$

где $A = \exp(\int\limits_0^1 \log|Q(\cos 2\pi t)|dt)$.

Циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Расслоение $H_n(G_1)$ над графом с одной вершиной $H = \{v_1\}$, со слоем $G_1 = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. В данном случае $d_1 = 0$, $P(z) = 2k + 1 - \sum\limits_{p=1}^{k} (z^{s_p} + z^{-s_p})$ и его преобразование Чебышёва равно $Q(w) = 2k + 1 - \sum\limits_{p=1}^{k} 2T_{s_p}(w)$.

- I-graph $I(n,k,l)$ and the generalized Petersen graph $GP(n,k)$.
- Sandwich of m circulant graphs.
- Generalized Y-graph.
- Generalized H-graph.
- Discrete torus $T_{n,m} = C_n \times C_m$.
- Cartesian product $H \times C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph, L. A. Grunwald, Y. S. Kwon, I. A. Mednykh, Tohoku Math. J. (2) 74(4): 535-548 (2022).

Спасибо за внимание!