Промежутки в последовательностях Кронекера и сферические упаковки

Алексей Глазырин, UTRGV

8 октября 2024 г.

Семинар по Дискретной Геометрии и Геометрии Чисел

Теорема о трех промежутках

Гипотеза (Г. Штейнгауз)

Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ *и любого* $N \in \mathbb{N}$, *если поместить точки* $\{\theta n\} = \theta n - \lfloor \theta n \rfloor$, $n = 1, \ldots, N$, *на окружность длиной 1, то они разобьют окружность на отрезки, длины которых принимают не более трех значений.*

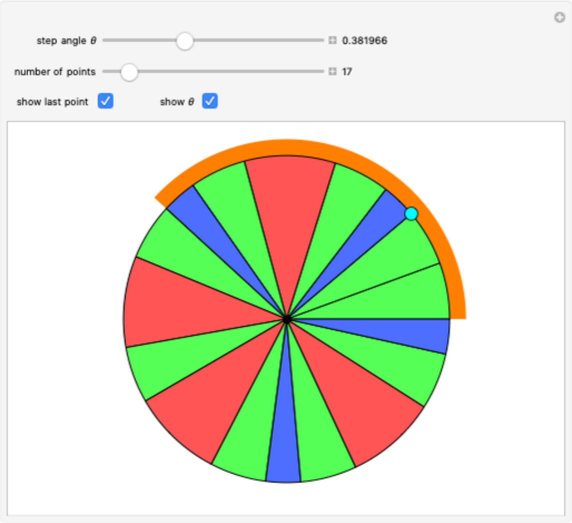
Теорема о трех промежутках

Гипотеза (Г. Штейнгауз)

Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ и любого $N \in \mathbb{N}$, если поместить точки $\{\theta n\} = \theta n - \lfloor \theta n \rfloor$, $n = 1, \ldots, N$, на окружность длиной 1, то они разобьют окружность на отрезки, длины которых принимают не более трех значений.

Гипотеза Штейнгауза была независимо доказана В. Шош (1957), Я. Шуранйи (1958), С. Сверчковским (1959).

Теорема о трех промежутках



© Stan Wagon "The Three-Gap Theorem", Wolfram Demonstrations Project

Пусть $\mathcal{L}$ – (унимодулярная) решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ – тор, заданный этой решеткой.

Для заданного вектора $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ многомерная последовательность Кронекера – это последовательность $\{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$. Пусть S_N – первые N точек в последовательности Кронекера.

Пусть норма $\|\cdot\|_B$ в $\mathbb{R}^d$ (и соответственно метрика на торе) задана выпуклым центрально симметричным телом B, которое является единичным шаром в этой норме.

Определение

Для каждой точки из S_N промежуток - это кратчайшее расстояние от нее до другой точки S_N.

Многомерная задача о промежутках

Определение

Для каждой точки из S_N промежуток - это кратчайшее расстояние от нее до другой точки S_N.

$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B)$ – число различных промежутков для S_N. Для стандартной евклидовой нормы будем обозначать это число $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L})$, а для ℓ_p-нормы $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, p)$.

Вопрос

Каким может быть $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B)$?

Многомерная задача о промежутках

Определение

Для каждой точки из S_N промежуток - это кратчайшее расстояние от нее до другой точки S_N.

$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B)$ – число различных промежутков для S_N. Для стандартной евклидовой нормы будем обозначать это число $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L})$, а для ℓ_p-нормы $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, p)$.

Вопрос

Каким может быть $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B)$?

Теорема (Теорема о трех промежутках)

$g_N(\alpha, \mathbb{Z}) \leq 3$.

Известные оценки

И. Бириндже ́р и Б. Шмидт (2008). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 3^d + 1$.

Известные оценки

И. Биринджер и Б. Шмидт (2008). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 3^d + 1$.

А. Хейнс и Х. Рамирес (2021). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, \infty) \leq 2^d + 1$, оценка точна для $d = 2, 3$.

Известные оценки

И. Бириндджер и Б. Шмидт (2008). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 3^d + 1$.

А. Хейнс и Х. Рамирес (2021). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, \infty) \leq 2^d + 1$, оценка точна для $d = 2, 3$.

А. Хейнс и Й. Марклоф (2022). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 5$ для $d = 2$. Есть $\vec{\alpha}$, что $\limsup_N g_N(\vec{\alpha}, \mathbb{Z}^2) = 5$.

$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq \sigma_d + 1$, где σ_d – это контактное число шаров в размерности d.

Гипотеза. $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 9$ для $d = 3$.

Известные оценки

И. Бириндджер и Б. Шмидт (2008). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 3^d + 1$.

А. Хейнс и Х. Рамирес (2021). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, \infty) \leq 2^d + 1$, оценка точна для $d = 2, 3$.

А. Хейнс и Й. Марклоф (2022). $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 5$ для $d = 2$. Есть $\vec{\alpha}$, что $\limsup_N g_N(\vec{\alpha}, \mathbb{Z}^2) = 5$.

$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq \sigma_d + 1$, где σ_d – это контактное число шаров в размерности d.

Гипотеза. $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 9$ для $d = 3$.

К. Деттманн (2023). Есть $\vec{\alpha}$, что $\limsup_N g_N(\vec{\alpha}, \mathbb{Z}^d, \infty) = 2^{d-1} + 1$.

Есть $\vec{\alpha}$, что $\limsup_N g_N(\vec{\alpha}, \mathbb{Z}^3) = 9$.

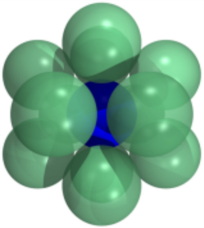
Контактные числа

Контактное число σ_d – это максимальное число неперекрывающихся единичных шаров в $\mathbb{R}^d$, касающихся той же самой единичной $(d-1)$-сферы.

Контактные числа

Контактное число σ_d – это максимальное число неперекрывающихся единичных шаров в $\mathbb{R}^d$, касающихся той же самой единичной $(d-1)$-сферы.

Спор Ньютона и Грегори о σ_3: Ньютон утверждал, что ответ 12; Грегори думал, что 13. Первое строгое доказательство $\sigma_3 = 12$ получено Шутте и ван дер Варденом (1953).



Контактные числа

Контактное число σ_d – это максимальное число неперекрывающихся единичных шаров в $\mathbb{R}^d$, касающихся той же самой единичной $(d-1)$-сферы.

Спор Ньютона и Грегори о σ_3: Ньютон утверждал, что ответ 12; Грегори думал, что 13. Первое строгое доказательство $\sigma_3 = 12$ получено Шутте и ван дер Варденом (1953).

Известные контактные числа: $\sigma_1 = 2$,

$\sigma_2 = 6$,

$\sigma_3 = 12$,

$\sigma_4 = 24$ (Мусин, 2008),

$\sigma_8 = 240$ (Левенштейн, Одлызко-Слоун, 1979),

$\sigma_{24} = 196560$ (Левенштейн, Одлызко-Слоун, 1979).

Сферические упаковки

Лучшая асимптотическая оценка: $\sigma_d \leq 2^{0.401d(1+o(1))}$ (Кабатянский-Левенштейн, 1978).

Сферические упаковки

Лучшая асимптотическая оценка: $\sigma_d \leq 2^{0.401d(1+o(1))}$ (Кабатянский-Левенштейн, 1978).

Для $r > 0$ обозначим $A(d, r)$ максимальное число точек на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ со всеми попарными расстояниями $\geq r$. $A(d, 1) = \sigma_d$ – это контактное число. Для любого фиксированного $r \in (0, \sqrt{2})$ лучшая оценка получена Кабатянским и Левенштейном.

Сферические упаковки

Лучшая асимптотическая оценка: $\sigma_d \leq 2^{0.401d(1+o(1))}$ (Кабатянский-Левенштейн, 1978).

Для $r > 0$ обозначим $A(d, r)$ максимальное число точек на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ со всеми попарными расстояниями $\geq r$. $A(d, 1) = \sigma_d$ – это контактное число. Для любого фиксированного $r \in (0, \sqrt{2})$ лучшая оценка получена Кабатянским и Левенштейном.

Найти $\lim\limits_{r\to\infty} A(d+1, r)r^d$ эквивалентно решению задачи о плотнейшей сферической упаковке в $\mathbb{R}^d$. Эта проблема решена только для $d = 2$ (Фейеш Тот, 1942), $d = 3$ (Хэйлс, 2005 и 2017), $d = 8$ (Вязовская, 2017), $d = 24$ (Кон-Кумар-Миллер-Радченко-Вязовская, 2017).

Лемма (Симплекс)

Среди k точек на $\mathbb{S}^{d-1}$, $1 \le k \le d+1$, найдутся две с евклидовым расстоянием $\le \sqrt{\frac{2k}{k-1}}$.

Эта оценка точна для $(k-1)$-мерного регулярного симплекса $\mathbb{S}^{d-1}$.

Лемма (Симплекс)

Среди k *точек на* $\mathbb{S}^{d-1}$, $1 \le k \le d+1$, *найдутся две с евклидовым расстоянием* $\le \sqrt{\frac{2k}{k-1}}$.

Эта оценка точна для $(k-1)$-мерного регулярного симплекса $\mathbb{S}^{d-1}$.

Теорема (Кросс-политоп; Дэвенпорт-Хайош, 1951; Рэнкин, 1955)

Для любых $d \ge 2$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $A(d, \sqrt{2} + \varepsilon) \le d + 1$.

Для $r = \sqrt{2}$ оценка $2d$, которая точна для кросс-политопа, то есть набора $\{\pm e_i\}$, где e_i векторы ортонормального базиса.

Промежутки и контактные числа

Для выпуклого центрально симметричного B в $\mathbb{R}^d$ и $r > 0$ обозначим $A(B, r)$ максимальное число точек в ∂B со всеми попарными расстояниями $\geq r$ в метрике $\| \cdot \|_B$.

Промежутки и контактные числа

Для выпуклого центрально симметричного B в $\mathbb{R}^d$ и $r > 0$ обозначим $A(B, r)$ максимальное число точек в ∂B со всеми попарными расстояниями $\geq r$ в метрике $\| \cdot \|_B$.

Теорема

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, B, $\mathcal{L}$,

$$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq A(B, 1) + 1.$$

Промежутки и контактные числа

Для выпуклого центрально симметричного B в $\mathbb{R}^d$ и $r > 0$ обозначим $A(B, r)$ максимальное число точек в ∂B со всеми попарными расстояниями $\geq r$ в метрике $\| \cdot \|_B$.

Теорема

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, B, $\mathcal{L}$,

$$g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq A(B, 1) + 1.$$

Доказательство по сути идентично доказательствам Бириинджера-Шмидта и Хейнса-Марклофа.

Полезные идеи

Пусть $\vec{a}_n$ – кратчайший вектор из $\{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$. Рассмотрим набор всех векторов из g_N, которые образуют промежутки.

$\|\vec{a}_m - \vec{a}_n\| \geq \|\vec{a}_{|m-n|}\|$, потому что $\vec{a}_m - \vec{a}_n \in \{(m-n)\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Полезные идеи

Пусть $\vec{a}_n$ – кратчайший вектор из $\{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$. Рассмотрим набор всех векторов из g_N, которые образуют промежутки.

$\|\vec{a}_m - \vec{a}_n\| \geq \|\vec{a}_{|m-n|}\|$, потому что $\vec{a}_m - \vec{a}_n \in \{(m-n)\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Если $\vec{a}_{|m-n|}$ длиннее и $\vec{a}_m$, и $\vec{a}_n$ для любой пары из нашего набора, то количество векторов $\leq \sigma_d$.

Полезные идеи

Пусть $\vec{a}_n$ – кратчайший вектор из $\{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$. Рассмотрим набор всех векторов из g_N, которые образуют промежутки.

$\|\vec{a}_m - \vec{a}_n\| \geq \|\vec{a}_{|m-n|}\|$, потому что $\vec{a}_m - \vec{a}_n \in \{(m-n)\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Если $\vec{a}_{|m-n|}$ длиннее и $\vec{a}_m$, и $\vec{a}_n$ для любой пары из нашего набора, то количество векторов $\leq \sigma_d$.

Если найдется такая пара $\vec{a}_m$, $\vec{a}_n$, что $\|\vec{a}_{|m-n|}\|$ больше, чем сумма их длин, то такого набора не бывает.

Полезные идеи

Пусть $\vec{a}_n$ – кратчайший вектор из $\{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$. Рассмотрим набор всех векторов из g_N, которые образуют промежутки.

$\|\vec{a}_m - \vec{a}_n\| \geq \|\vec{a}_{|m-n|}\|$, потому что $\vec{a}_m - \vec{a}_n \in \{(m-n)\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Если $\vec{a}_{|m-n|}$ длиннее и $\vec{a}_m$, и $\vec{a}_n$ для любой пары из нашего набора, то количество векторов $\leq \sigma_d$.

Если найдется такая пара $\vec{a}_m, \vec{a}_n$, что $\|\vec{a}_{|m-n|}\|$ больше, чем сумма их длин, то такого набора не бывает.

Комбинация идей: если найдется поднабор $\vec{a}_{n_1}, \ldots, \vec{a}_{n_k}$, что $\vec{a}_{|n_i - n_j|}$ "длинные" для любой пары i, j, то размер такого поднабора ограничен размером соответствующей сферической упаковки.

Вспомогательные леммы

Пусть r_N – кратчайшая длина вектора в $S_N = \bigcup_{n=1}^{N} \{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Лемма (Шевалле, 1996)

$g_N =$ количество различных чисел в $\{r_{\lfloor N/2 \rfloor}, \dots, r_{N-1}\}$.

Вспомогательные леммы

Пусть r_N – кратчайшая длина вектора в $S_N = \bigcup_{n=1}^{N} \{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Лемма (Шевалле, 1996)

$g_N =$ количество различных чисел в $\{r_{\lfloor N/2 \rfloor}, \dots, r_{N-1}\}$.

Лемма (Теорема Дирихле о диофантовых приближениях)

$r_n \leq Cn^{-1/d}$.

Доказательство. В каждой точке S_n построим копию $\frac{r_n}{2}B$. Из плотности $n\left(\frac{r_n}{2}\right)^d \mathrm{Vol}(B) \leq 1$, откуда и следует утверждение.

Вспомогательные леммы

Пусть r_N – кратчайшая длина вектора в $S_N = \bigcup_{n=1}^{N} \{n\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$.

Лемма (Шевалле, 1996)

$g_N =$ *количество различных чисел в* $\{r_{\lfloor N/2 \rfloor}, \dots, r_{N-1}\}$.

Лемма (Теорема Дирихле о диофантовых приближениях)

$r_n \leq C n^{-1/d}$.

Доказательство. В каждой точке S_n построим копию $\frac{r_n}{2} B$. Из плотности $n \left(\frac{r_n}{2}\right)^d \operatorname{Vol}(B) \leq 1$, откуда и следует утверждение.

Лемма

Для любых $\gamma > 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует бесконечно много пар* (n_1, n_2), *что* $n_2/n_1 \leq \gamma$, $r_{n_2}/r_{n_1} < \gamma^{-1/d} + \varepsilon$ *и* $r_{n_2} < r_{n_2 - 1}$.

Новая универсальная оценка на $\liminf$

Теорема (Г., 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, B, $\mathcal{L}$

$$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 2^d + 1.$$

Теорема (Г., 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, B, $\mathcal{L}$

$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq 2^d + 1.$

Доказательство. По лемме есть бесконечно много пар (n_1, n_2), что $n_2/n_1 \leq 2^d + 1$, $r_{n_2}/r_{n_1} < (2^d + 1)^{-1/d} + \varepsilon < 1/2$ и $r_{n_2} < r_{n_2 - 1}$. Предположим, среди $\{r_{n_2}, \dots, r_{2n_2}\}$ есть хотя бы $2^d + 2$ различных чисел. Тогда два из них соответствуют векторам $\vec{a}_{k_1}$ и $\vec{a}_{k_2}$, где $|k_1 - k_2| \leq \frac{n_2}{2^d+1} \leq n_1$. Разность этих двух векторов принадлежит $\{|k_1 - k_2|\vec{\alpha} + \mathcal{L}\}$, то есть ее длина по крайней мере $r_{|k_1-k_2|} \geq r_{n_1} > 2r_{n_2}$, что противоречит неравенству треугольника.

Универсальная оценка через сферические коды

Теорема (Г., 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, *B*, $\mathcal{L}$ *и любого* $r > 1$

$$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq A(B, r)\lceil r^d \rceil.$$

Универсальная оценка через сферические коды

Теорема (Г., 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, *B*, $\mathcal{L}$ *и любого* $r > 1$

$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, B) \leq A(B, r)\lceil r^d \rceil.$

Набросок доказательства. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $1/r + \varepsilon < 1$ и $A(B, \frac{1}{1/r+\varepsilon}) = A(B, r) = k - 1$. Тогда существует бесконечно много пар (n_1, n_2), что $n_2/n_1 \leq r^d$ и $r_{n_2}/r_{n_1} < 1/r + \varepsilon$.

В подмножестве g_N различных векторов из $\vec{a}_{n_2}, \ldots, \vec{a}_{2n_2}$ можно выбрать k подряд идущих, что их индексы отличаются не более чем на n_2/ℓ, где $\ell = \lfloor \frac{g_n - 1}{k-1} \rfloor$.

Если $\ell \geq r^d$, то получается сферическая упаковка с $> A(B, r)$ точками.

Следствия

Лемма (Симплекс)

Среди k *точек на* $\mathbb{S}^{d-1}$, $1 \le k \le d+1$, *найдутся две с евклидовым расстоянием* $\le \sqrt{\frac{2k}{k-1}}$.

Лемма (Симплекс)

Среди k точек на $\mathbb{S}^{d-1}$, $1 \leq k \leq d+1$, найдутся две с евклидовым расстоянием $\leq \sqrt{\frac{2k}{k-1}}$.

Следствие

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{L}$, $1 \leq k \leq d+1$
$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq (k-1) \left\lceil \left(\frac{2k}{k-1}\right)^{d/2} \right\rceil$.

Следствия

Теорема (Кросс-политоп; Дэвенпорт-Хайош, 1951; Рэнкин, 1955)

Для любых $d \geq 2$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $A(d, \sqrt{2} + \varepsilon) \leq d + 1$.

Следствия

Теорема (Кросс-политоп; Дэвенпорт-Хайош, 1951; Рэнкин, 1955)

Для любых $d \geq 2$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $A(d, \sqrt{2} + \varepsilon) \leq d + 1$.

Следствие

Для любых $\mathcal{L}$ *и* $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$\liminf_{N \to \infty} g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq (d+1)(2^{d/2} + 1) \text{ для четных } d,$$

$$\liminf_{N \to \infty} g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq (d+1)\lceil 2^{d/2} \rceil \text{ для нечетных } d.$$

Оценки в размерностях 2-12

d	$\liminf g_N \leq$	Источник оценки
2	5	$2^d + 1$
3	9	$2^d + 1$
4	17	$2^d + 1$
5	32	симплекс, $k = 3$
6	54	симплекс, $k = 3$
7	93	симплекс, $k = 4$
8	153	симплекс, $k = 4$, и кросс-политоп
9	230	кросс-политоп
10	363	кросс-политоп
11	552	кросс-политоп
12	845	кросс-политоп

Лемма (Сах-Сони-Стонер-Чжао, 2020)

Для единичного шара B в ℓ_p-норме, $p \geq 2$,
$A(B, r) \leq A(d, 2(r/2)^{p/2})$.

Оценки в ℓ_p-нормах

Лемма (Сах-Сони-Стонер-Чжао, 2020)

Для единичного шара B в ℓ_p-норме, $p \geq 2$,
$A(B, r) \leq A(d, 2(r/2)^{p/2})$.

Следствие

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 2$, $\mathcal{L}$ и любого $r > 1$

$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, p) \leq A(d, 2(r/2)^{p/2})\lceil r^d \rceil$.

Лемма (Сах-Сони-Стонер-Чжао, 2020)

Для единичного шара B в ℓ_p-норме, $p \geq 2$,
$A(B, r) \leq A(d, 2(r/2)^{p/2})$.

Следствие

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 2$, $\mathcal{L}$ и любого $r > 1$

$$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, p) \leq A(d, 2(r/2)^{p/2}) \lceil r^d \rceil.$$

Следствие

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 2$, $\mathcal{L}$

$$\liminf_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}, p) \leq (d+1)(2^{d-d/p} + 1).$$

Оценка на $\liminf$ в размерности 2

Можно ли убрать $\liminf$ из верхних оценок и решить задачу в размерности 3?

Оценка на $\liminf$ в размерности 2

Можно ли убрать $\liminf$ из верхних оценок и решить задачу в размерности 3?

Аргумент против: в размерности 2 нельзя.

Оценка на $\liminf$ в размерности 2

Можно ли убрать $\liminf$ из верхних оценок и решить задачу в размерности 3?

Аргумент против: в размерности 2 нельзя.

Хейнс-Марклоф (2022): $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 5$ и оценка точна.

Теорема (Шутов для $\mathbb{Z}^2$, Г. для любой решетки, 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}$ выполняется $\liminf\limits_{N} g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 4$.

Оценка на $\liminf$ в размерности 2

Можно ли убрать $\liminf$ из верхних оценок и решить задачу в размерности 3?

Аргумент против: в размерности 2 нельзя.

Хейнс-Марклоф (2022): $g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 5$ и оценка точна.

Теорема (Шутов для $\mathbb{Z}^2$, Г. для любой решетки, 2024+)

Для любых $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}$ выполняется $\liminf\limits_N g_N(\vec{\alpha}, \mathcal{L}) \leq 4$.

Лемма

Не существует 5 плоских векторов разной длины, что для любой пары из них $\vec{a}$ и $\vec{b}$ короче $\vec{a} - \vec{b}$ и для любой тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, где $\vec{c}$ кратчайший, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ короче $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Вопросы про нижние оценки

Какова нижняя оценка для евклидовой нормы?

Вопросы про нижние оценки

Какова нижняя оценка для евклидовой нормы?

Ослабить задачу: промежуток – новый вектор в последовательности, который $\leq$ предыдущих промежутков. Конструкция С. Влэдуца для решеточного контактного числа?

Вопросы про нижние оценки

Какова нижняя оценка для евклидовой нормы?

Ослабить задачу: промежуток – новый вектор в последовательности, который $\leq$ предыдущих промежутков. Конструкция С. Влэдуца для решеточного контактного числа?

Какова нижняя оценка для произвольной нормы?

Экспоненциальная оценка даст новое доказательство для нижней экспоненциальной оценки на $A(B, 1)$ (Талата, 1998).

Вопросы про нижние оценки

Какова нижняя оценка для евклидовой нормы?

Ослабить задачу: промежуток – новый вектор в последовательности, который $\leq$ предыдущих промежутков. Конструкция С. Влэдуца для решеточного контактного числа?

Какова нижняя оценка для произвольной нормы?

Экспоненциальная оценка даст новое доказательство для нижней экспоненциальной оценки на $A(B, 1)$ (Талата, 1998).

Оценка для норм ε-близких к евклидовым $\to$ оценка для произвольных норм.

QS-Теорема В. Мильмана: есть подпространство размерности $\Omega(d)$ с фактор-нормой ε-близкой к евклидовой.

Спасибо!