

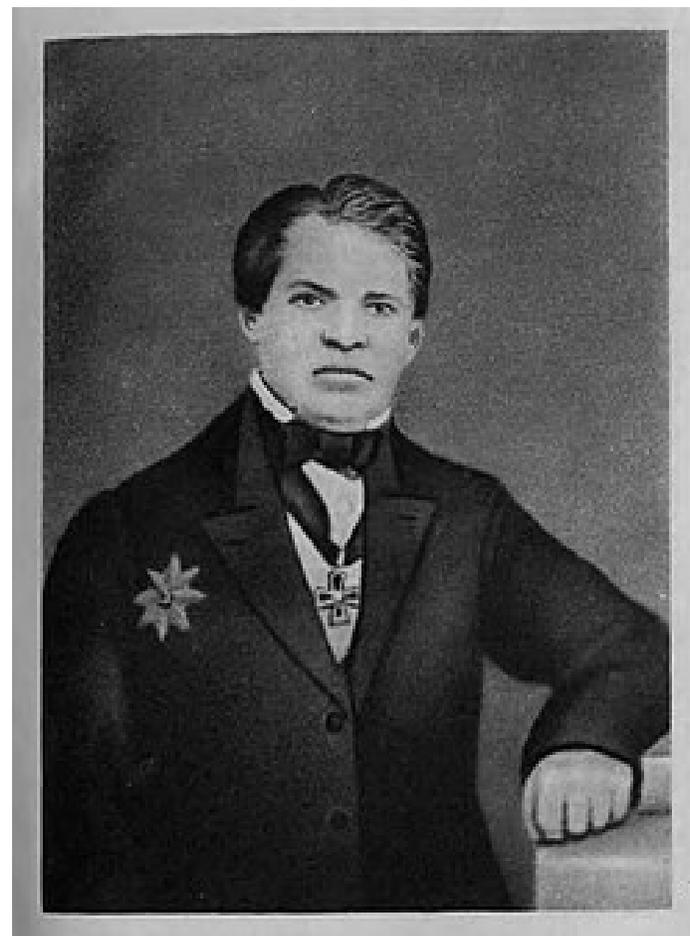
« Лямбда-длины Пеннера и обобщения
гиперболического аналога теоремы Кейси»

К 200-летию первого публичного представления
Н.И. Лобачевским своей геометрии

Дискретная геометрия и геометрия чисел

25.02.2026

Н.И.Лобачевский (01.12(20.11).1792 -24(12).02.1856)



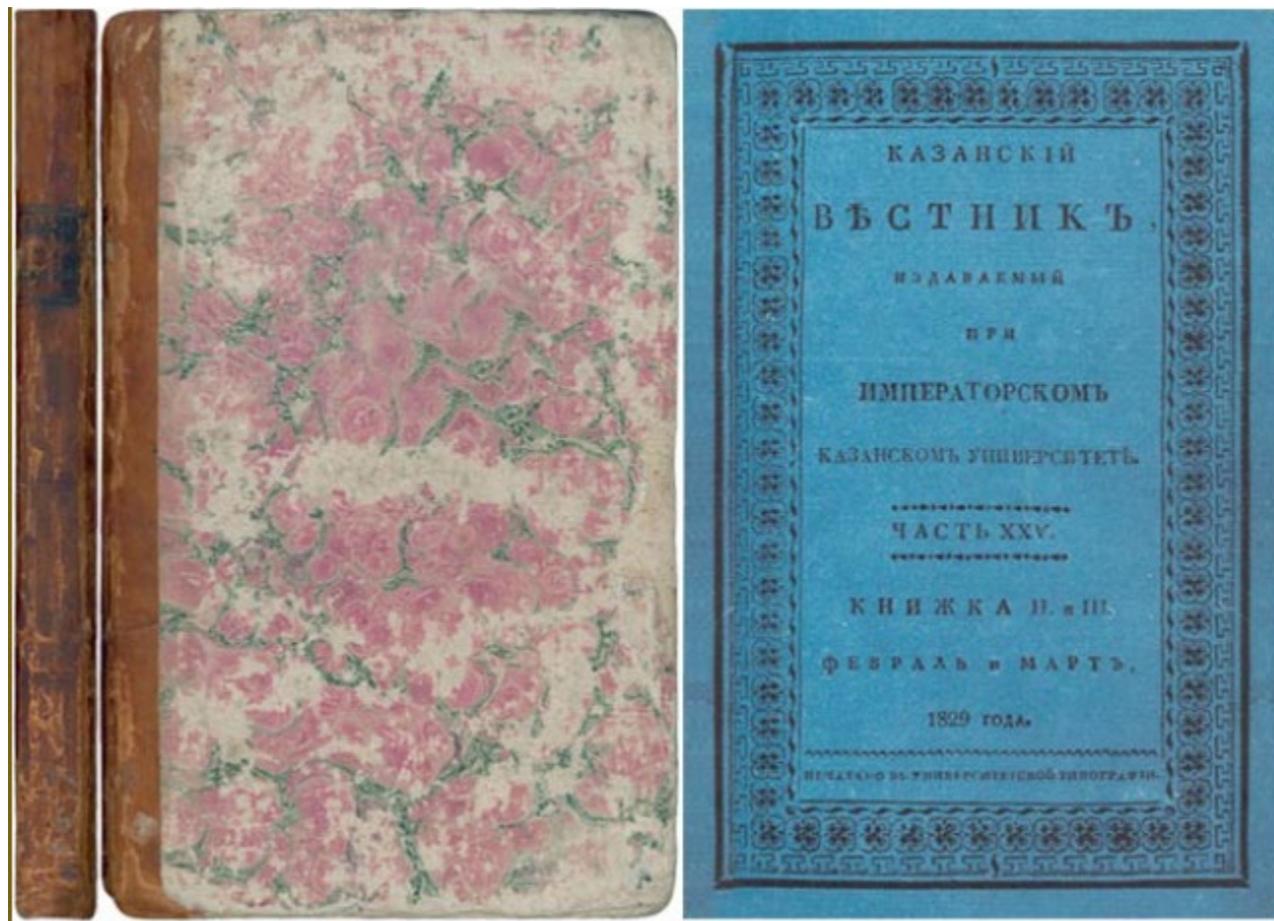
Сжатое изложение начал геометрии...

- Вверху отметка: Получено 7-го февраля 1826г. Внизу написано: слушано 1826г. 11 февраля ст. I. Определено: Поручить рассмотреть сочинение гг. профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить отделению. Чуть выше: сдается в архив для хранения по постановлению Отделения от 13 июля 1834г. В Отделение Физикоматематических наук.
*Препровождаю сочинение мое под названием: Exposition succincte des principes de la Geometrie avec une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles (Сжатое изложение начал геометрии **со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях**).*
Желаю знать мнение о сем ученых, моих сотоварищей и если оно будет выгодно, то прошу покорнейше представленное мною сочинение принять в составление ученых записок Физико-математического отделения, в каком намерении я и предпочел писать на французском языке, так как предполагалось записки издавать на сем языке, сделавшемся ныне общим между учеными.
Проф. Н.И. Лобачевский
В.Ф. Каган. Лобачевский. М.: Издательство Академии наук, 1948, с.181-182
- Извлечено самим Сочинителем из рассуждения под названием: «Exposition succinete des principes de la Geometrie etc.», **читанного** им в заседании Отделения физико-математических наук 12 февраля 1826 года.
- «Казанский Вестник, издаваемый при Императорском Казанском университете». 5 статей, помещенных в частях XXV, XXVII, XXVIII. Казань, печатано в университетской типографии, 1829-1830.
- 1829: часть XXV, февраль-март, стр. 178-187, апрель, стр. 228-241; часть XXVII, ноябрь-декабрь, стр. 227-243, скл. табл. I, фиг. 1-9 геометрических диаграмм.
- 1830: часть XXVIII, март-апрель, стр. 251-283, скл. табл. II, фиг. 10-17 геометрических диаграмм, июль-август, стр. 571-636.

Сомнения: был ли доклад? (Из статьи Г.М. Полотовского «Как изучалась биография Н.И. Лобачевского. К 150-летию со дня смерти»)

- Еще в 1992 году казанский геометр Г.Е. Изотов (1917-2006) писал в [22]: “широко распространенное утверждение, что 11 февраля 1826 года Лобачевский сделал доклад или прочитал сочинение, по крайней мере, сомнительно”. Действительно, известно лишь представление Н.И. Лобачевского от 6 февраля 1826 г. в Совет физико-математического отделения, сопровождающее рукопись его сочинения «Краткое изложение...» на французском языке, а в протоколе заседания отделения от 11 февраля записано, что “слушано было представление г. орд. проф. Лобачевского от 6 февраля сего года с приложением ... сочинения на французском языке ... о котором он желает знать мнение членов отделения”.
- Далее в протоколе написано, что Совет поручил рассмотреть указанное сочинение профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и сообщить свое мнение отделению. Имеется также документ от 27 марта 1827 года, в котором отмечается “недоставление от г.г. Симонова, Купфера и Брашмана мнения о сочинении”; само «Дело о представлении г. проф. Лобачевского о рассмотрении его сочинения» в 1834 году было сдано в архив.
- 22. Изотов Г.Е. *К истории опубликований Н.И. Лобачевским сочинений по “воображаемой” геометрии.*// Вопросы истории естествознания и техники, 1992, №4, С.36-43.

Казанский вестник, 1829 г.



Первая публикация Н.И. Лобачевского о новой геометрии

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ (*).

(Г. Лобачевскаго.)

Кажется , трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи , къ той границѣ , куда спремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать , во первыхъ , самому предмету. Далѣе , средства , къ которымъ надобно прибѣгнуть чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости , едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ , которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ , заключили себя въ такой тѣсной кругъ , что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то , что со времени Ньютона и Декарта , вся Математика , слѣлавшись Аналитикой , пошла столь быстрыми шагами впередъ , что оставила далеко за собой то ученіе , безъ котораго могла уже об-

(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія , подъ названіемъ : *Exposition succincte des principes de la Geometrie etc.* , читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ , 12 Февраля 1826 года.

Фрагмент работы Н.И. Лобачевского

243

нями и съ этими произведеніями , которыхъ размеръ выше тогда ихъ можно ставить:

$$\sin F(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2 \quad \cos F(a) = a \left(1 - \frac{1}{3} a^2 \right)$$

чрезъ что уравненія (17) сделаются :

$$b \sin A = a \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\sin (A + B) = \frac{c}{a} \sin A$$

$$\cos C + \cos (A + B) = 0$$

изъ которыхъ первые два - известные уравненія прямолинейной тригонометрии а два послѣдніи показываютъ , что , этихъ ;
 $A + B + C = 0$

(Будетъ продолженіе)

251

КНИЖКА II

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРИИ

(Г Лобачевскаго.)

(Продолженіе)

*Изложенная нами теорія параллельныхъ предполагаетъ линіи съ углами въ такой зависимости, которая какъ после увидимъ находится или нѣтъ въ природе, доказать никто не въ состояніи . По крайней мѣрѣ наблюденія астрономическіе убеждаютъ въ томъ , что всѣ линіи , которые подлежатъ нашему измѣренію , даже расстоянія между небесными тѣлами , столько малы , что въ сравненіи съ линіею принятою въ данной теоріи и за единицу, что мы употребительные до сихъ поръ уравненія применяемой прямолинейной Тригонометрии безъ чувствительной погрешности должны быть справедливы.

Называемъ a поперечникъ земного пути вокругъ солнца, $2 p$ самый большой изъ всехъ намъ известной и потребляемой годовой

*Уравненія (17) и всѣ тѣ что за ними слѣдуютъ прибавлено ужъ Сочинителемъ после къ тому рассужденію, которое было представлено в 1826 года въ одѣленіи Физико-Математическихъ наукъ.

О предельной сфере

227

огромную смѣсь истинъ и заблужденій Но вскорѣ Аркузилай , Ферекидъ, Гекашей , Ксанъ, Гелланикъ и другіе показали болѣе разборчивости; и по они не разобрали совершенного хаоса, однакожь подали по крайней мѣрѣ примѣръ презренія, которое вымыслы первыхъ вѣковъ заслуживаютъ.

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ

(Г Лобачевскаго.)

(Продолженіе)

Сказано было, что Геометрія на предельной сфере та же что и на плоскости. Въ первой предельная круга заменяетъ прямую; углы между плоскостями, въ которыхъ лежатъ предельные, заступаютъ место угловъ между прямыми линіями. Однако жъ измеренію треугольниковъ на предельной сфере должно предшествовать ученіе о тригонометрическихъ функцияхъ; а что касается до геометрическаго

И.И. Лажечников «Как я знал Магницкого»(1865)

- С каким удовольствием принимаешься за перо, когда хочешь изобразить личность, оставившую по себе светлый след на земле, какому бы роду служения отечеству или человечеству ни посвятила она себя. Потомство поминает его имя с благоговейною благодарностью; отец приводит сына поклониться его могиле и научиться на ней урокам чести и долга. Это имя звучит так гармонически, согревает сердце таким благодатным огнем. Напротив того, с каким тяжелым чувством приступаешь к изображению человека, который, будучи одарен лучшими дарами природы и воспитания и имея в руках своих средства разливать добро и свет на все его окружающее, употребил во зло эти дары для удовлетворения одних своих страстей.

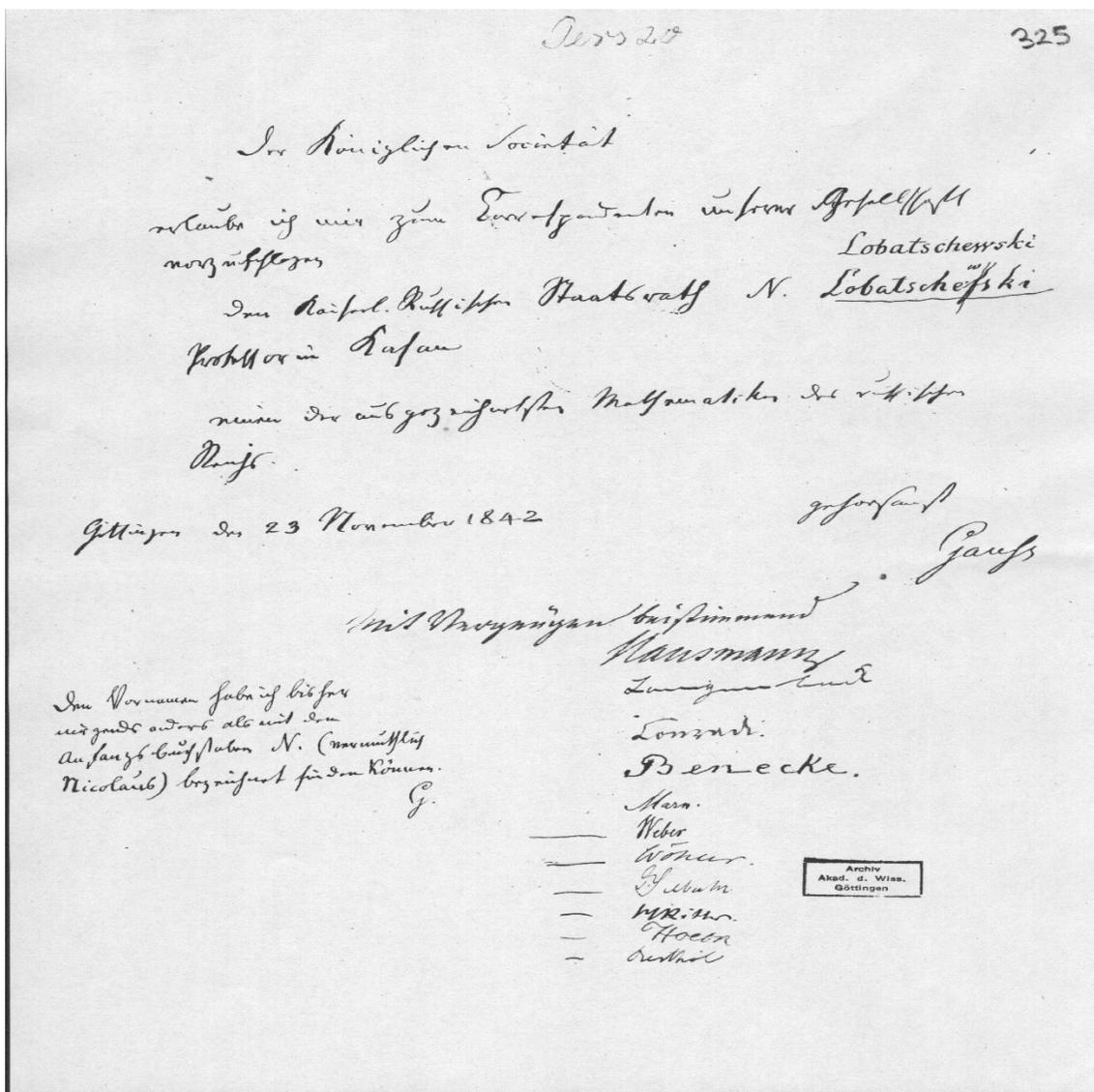
Источник: И.И. Лажечников Басурман. Колдун на Сухаревой башне. Очерки-воспоминания», Издательство «Советская Россия», Москва, 1989

- Долгом почитаю оговорить, что и в мое время, помимо бездарностей, были достойные преподаватели и ученые, служившие науке с любовью и пользой, как-то: медики Фукс и Лентовский, естествоиспытатель и археолог Эйхвальд, ориенталисты Казембек и Эрдман, астроном Симонов, математик Брашман. **Говорили, что профессор математики, Лобачевский, пишет какой-то курс этой науки, долженствующий сделать в ней громадный переворот; но, когда издан был этот курс, оказалось, по суждению компетентных критиков, что гора родила мышь.**

Единственный прижизненный положительный отзыв

- **П.И.Котельников(1809-1879)**. Из актовой речи 1842г. «О предубеждениях против математики» : «...*Не могу не умолчать о том, что тысячелетние тщетные попытки доказать со всей математической строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета г-на Лобачевского предпринять изумительный труд – построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике менее двух прямых – труд, который рано или поздно найдет своих ценителей*».

Письмо Гаусса Гёттингенскому королевскому обществу наук (копии Werner Lehfeldt прислал М.Ф. Гильмуллину)

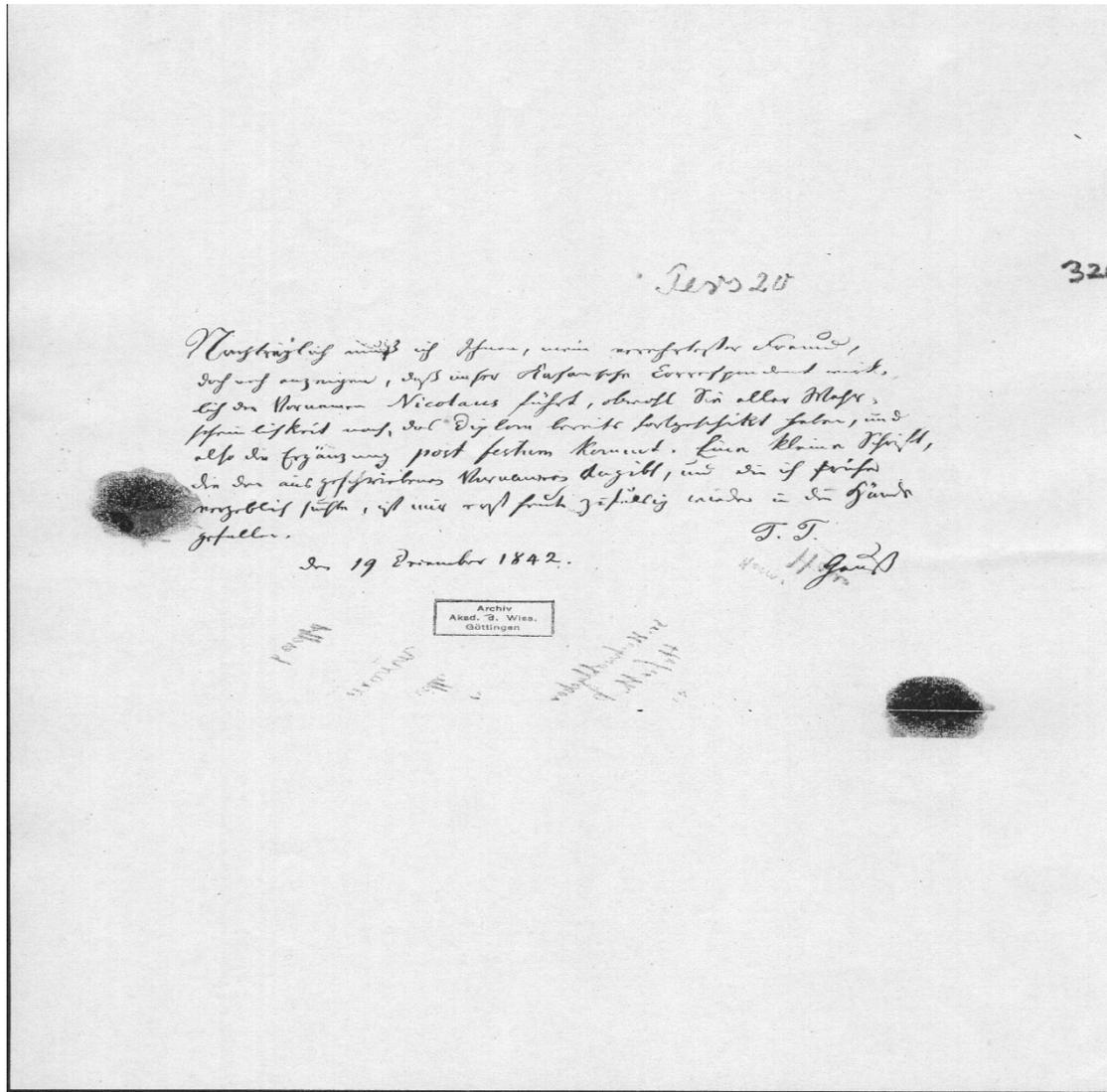


- Королевскому обществу смею позволить предложить членом-корреспондентом нашего общества наук Императорского российского статского советника Н. Лобачевского, профессора в Казани, одного из выдающихся математиков Российской Империи.

Гёттинген, 23 ноября 1842 года

Честь имею
 Гаусс

Письмо Гаусса Лобачевскому



- Мой самый именитый друг, хоть и поздно, я вынужден Вам открыть завесу о том, чего не достает нашему Казанскому члену корреспонденту, который носит имя Николаус. Очень неудобно перед Вами, что диплом успели отправить, поэтому дополнение прибудет после церемонии. Немного весело, но там будет написано имя, которое я пытался добавить. Мне это сразу бросилось в глаза.

19 декабря 1842. Гаусс

Письмо Лобачевского Гауссу (17.06.1843)

Высокородный высокочтимый господин надворный советник
Ваше любезное письмо я получил одновременно с дипломом члена-
корреспондента Королевского Общества наук в Геттингене. Покорнейше
прошу Вас засвидетельствовать мою благодарность Королевскому обществу и
заверить его, что я почитаю за большую честь принадлежать его членам-
корреспондентам ...

Пользуясь удобным случаем, прошу также принять заверения в моем
исключительном почтении, с которым я остаюсь навсегда
Вашего высокородия признательнейший Н. Лобачевский.

[Материалы для биографии Н.И. Лобачевского / Сост. и ред. Л.Б.
Модзалевский. –
М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 827 с.]

Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

Giornale di Matematiche, VI (1868), pp.284-322

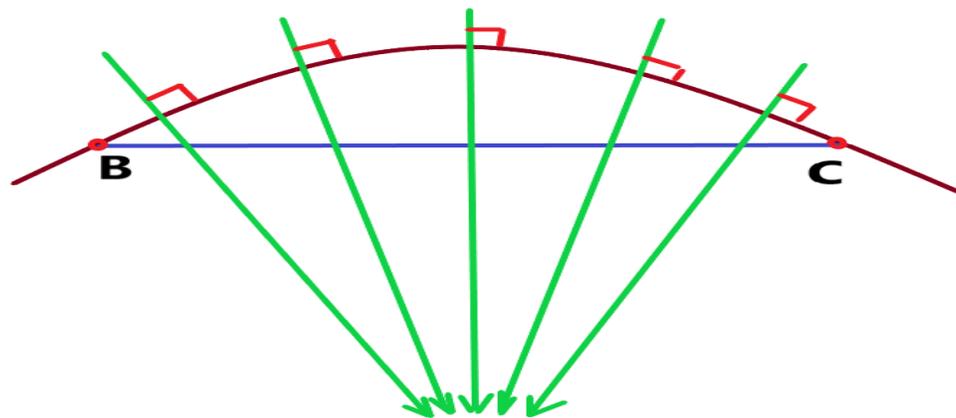
- In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria. Questi concetti non sono di data recente. **Il sommo Gauss** li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e bench'è nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di Lobatschewsky.
- (Trascrizione di Paolo Caressa, 2004)
- В последнее время математическая общественность начала знакомиться с некоторыми новыми концепциями, которые, если они приживутся, по всей видимости, обречены глубоко изменить всю структуру классической геометрии. Эти концепции не являются чем-то новым. **Великий Гаусс** принял их с первых шагов в науке, и хотя ни в одном из его трудов нет явного изложения этих концепций, его письма свидетельствуют о пристрастии, с которым он всегда их культивировал, и о полной приверженности, которую он применял к доктрине Лобачевского.

Н.Н. Булич о Н.И. Лобачевском (из прощальной речи)

- «...Наука и знание были главнейшим интересом его трудовой, полезной жизни ...возблагодарим его за эту жизнь, отданную науке, за эту жизнь, стройно проникнутую одной прекрасной мыслью, за эту жизнь, оставленную нам как лучший образец для подражания. Человек, избравший цель для жизни в области духовной деятельности, имеет то преимущество пред другими, что долго будет жить его имя и память о нем. Подвиг мысли дороже нам всех других подвигов, ибо только наука, мысль и знание суть основа благосостояния общественного...»

Теорема Птолемея на плоскости Лобачевского

- [Хорда длины x стягивает дугу l орицикла длины $l = 2\sigma \cdot \sinh \frac{x}{2\sigma}$
на гиперболической плоскости кривизны $K = -\frac{1}{\sigma^2}$.]

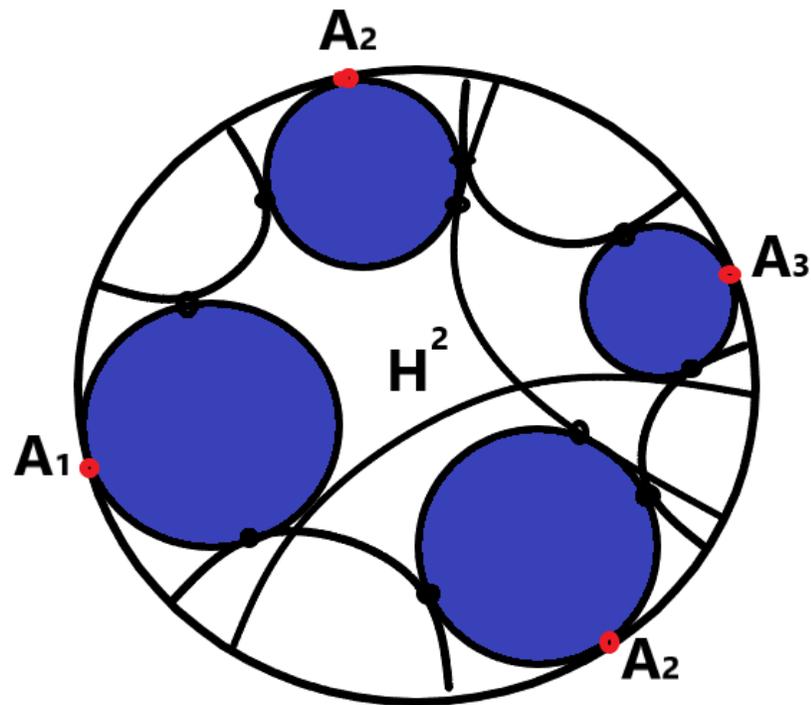


- $$\sinh \frac{\widetilde{AC}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{BD}}{2\sigma} = \sinh \frac{\widetilde{AB}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{CD}}{2\sigma} + \sinh \frac{\widetilde{AD}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{BC}}{2\sigma}$$

Теорема Кейси (если не следить за порядком циклов)

$$\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{12}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{13}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{14}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{21}}{2} & 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{23}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{24}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{31}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{32}}{2} & 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{34}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{41}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{42}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Теорема Кейси для орициклов



Литература

- 1. Kubota T. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry. *Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy*, 1912
- 2. Широков П. А. Этюды по геометрии Лобачевского. *Известия Физико-математического общества при КГУ, серия 2*, 1924
- 3. Ungar, A. A. Ptolemy's theorem in the Relativistic Model of Analitic Hyperbolic geometry. *Symmetry*, 2023
- 4. Haantjes, J. A characteristic local property of Geodesies in certain metric spaces. *Proc. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 1947
- 5. Gomez, M. Memoli, F. The Four Point Condition: An Elementary Tropicalization of Ptolemy's Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 2024
- 6. Casey, J. A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. *Classic reprint, Forgotten Books, London*, 2012.
- 7. Maehara H., Martini H. Casey's Theorem. *In: Circles, Spheres and Spherical Geometry*. Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher. Birkhauser, Cham. 2024.
- 8. Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V. Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii J. Math.*, 2018
- 9. Абросимов Н. В., Михайлова Л. А. Casey's theorem in hyperbolic geometry. *Сибирские электронные математические известия*, 2015,
- 10. Костин А. В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского, *Сибирские электронные математические известия*, 2022
- 11. Костин А. В. Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского, *Владикавказский математический журнал*, 2023
- 12. Kostin, A. V. On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Siberian Mathematical Journal*, 2024
- 13. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога, *Сибирские электронные математические известия*, 2016,
- 14. Maehara H., Martini H. Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems, *Results Math.*, 2018
- 15. Костин А. В. Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности. *Изв. вузов. Матем.*, 2021
- 16. Костин А. В. Задача о тени и поверхности постоянной кривизны. *Сибирские электронные математические известия.*, 2023,
- 17. Костин А.В. Теоремы типа Кейси и преобразования Лагерра. *Владикавказский математический журнал*. 2025
- 18. Waddle K. Ptolemy's Equation and Kin. *Math. Intelligencer*. 2025
- 19. Костин А.В. Лямбда-длины Пеннера и аналоги теоремы Кейси. *Мат.заметки*. 2026
- 20. Каган В.Ф. Лобачевский. М-Л. 1948