

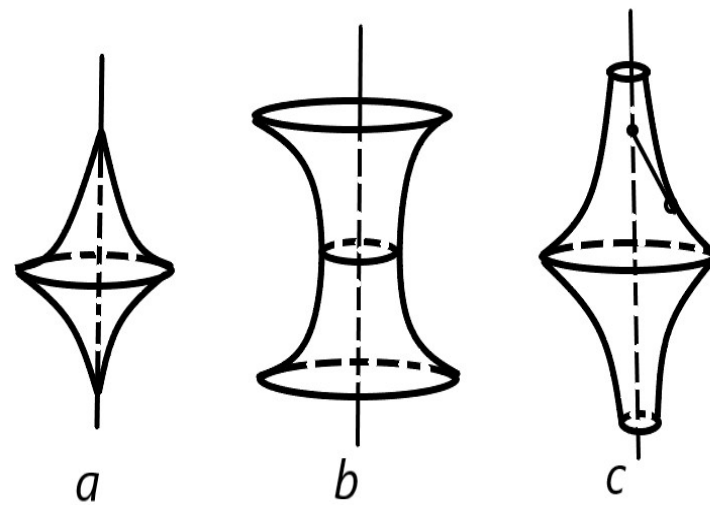
«О гиперболических аналогах и обобщениях теоремы Кейси»

Дискретная геометрия и геометрия чисел

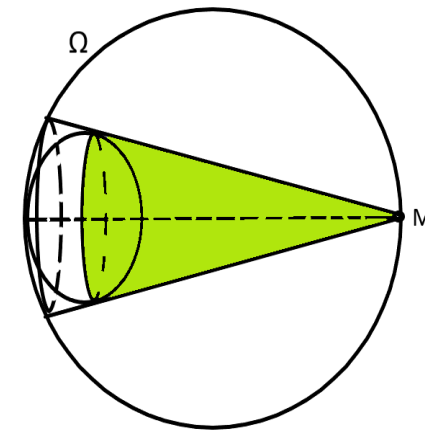
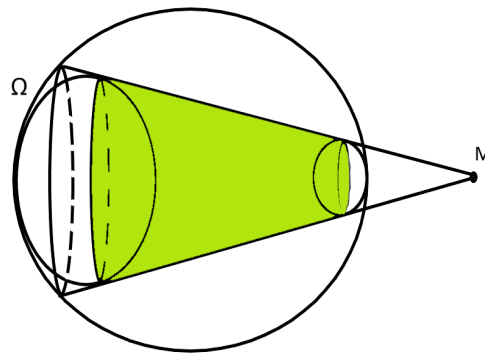
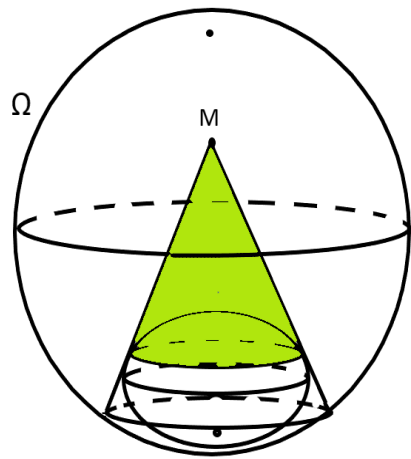
11.03.2026

Поверхности Миндинга

- $$z = \pm \int \sqrt{\frac{a^2(1-t)-r^2}{a^2t+r^2}} dr$$

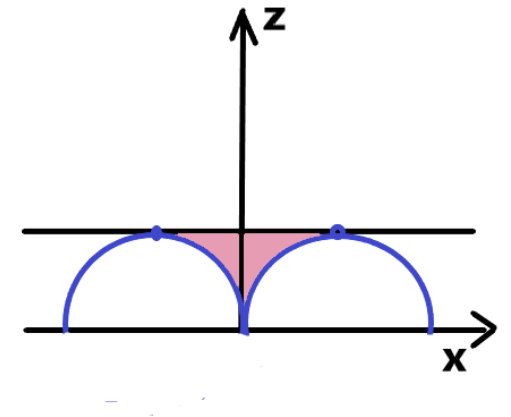
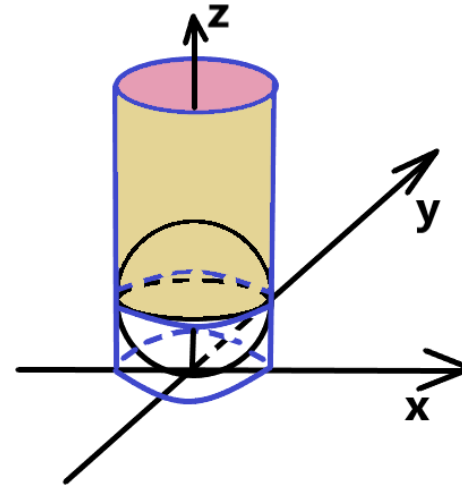


Касательный конус к орисфере

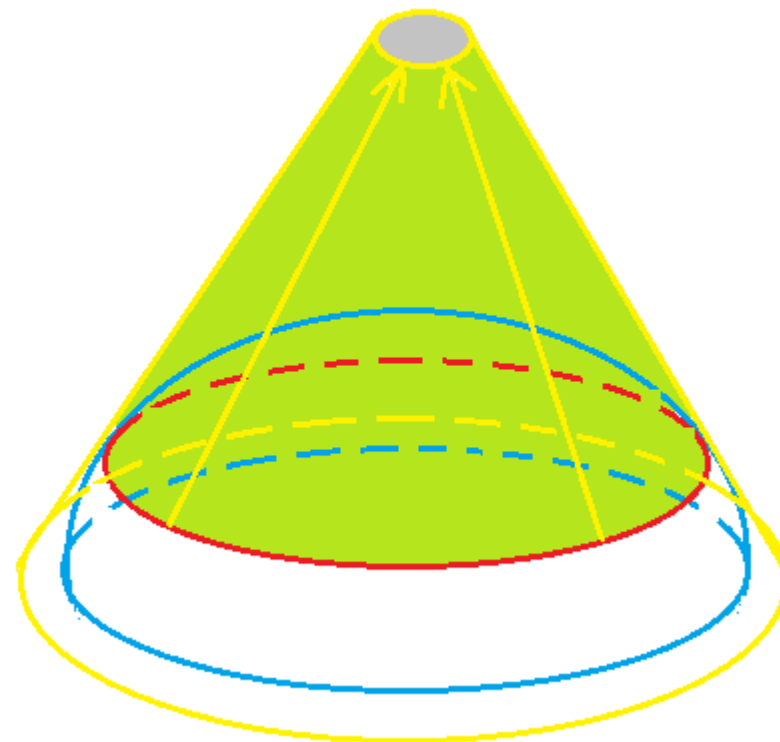
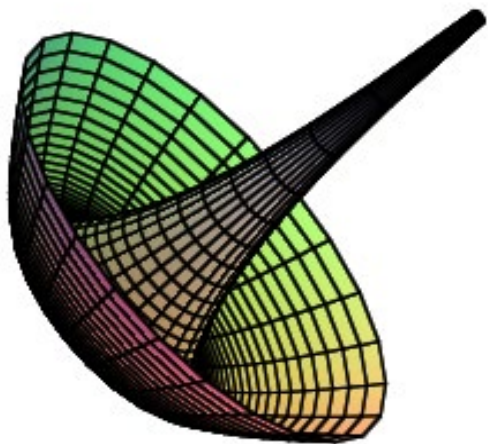


Псевдосфера

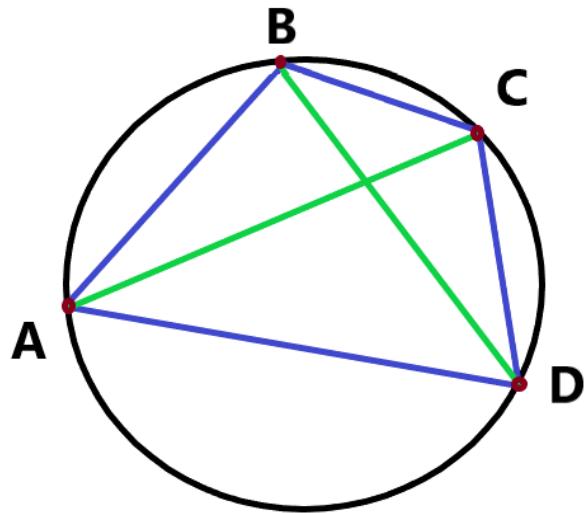
- $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$
- $\begin{cases} x = \cos(u), \\ y = \sin(u) \end{cases} ds^2 = \frac{du^2 + dz^2}{z^2}$



Полная псевдосфера



Теорема Птолемея



- *Четырехугольник на евклидовой плоскости является вписанным тогда и только тогда, когда произведение длин его диагоналей равно сумме произведения длин противоположных сторон:
 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$*

John CASEY (1820-1891)

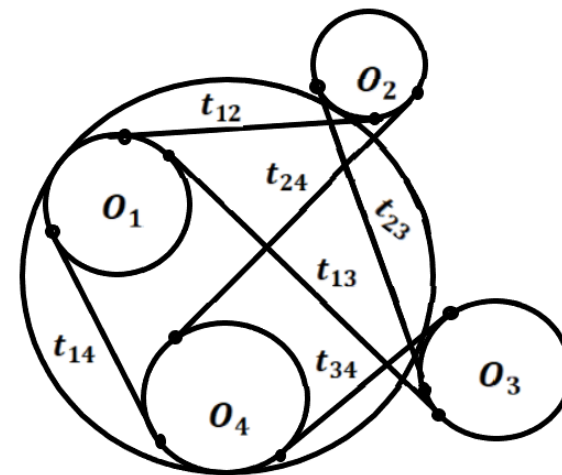
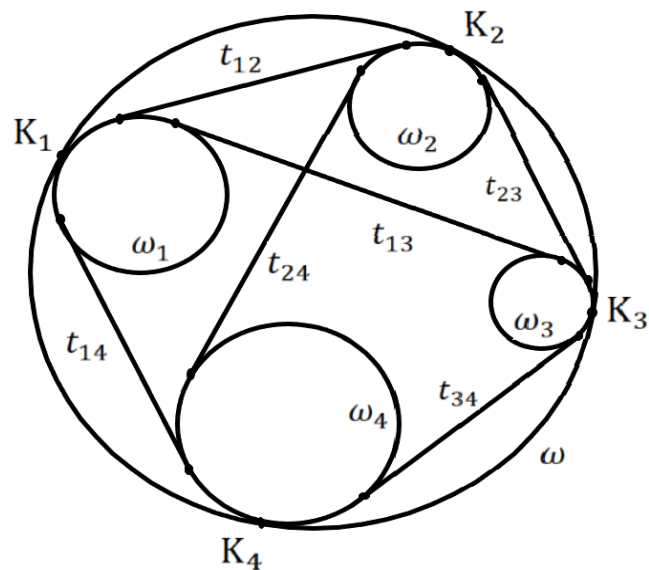


Теорема Кейси (известна Shiraishi Nagatada в 1820-х)

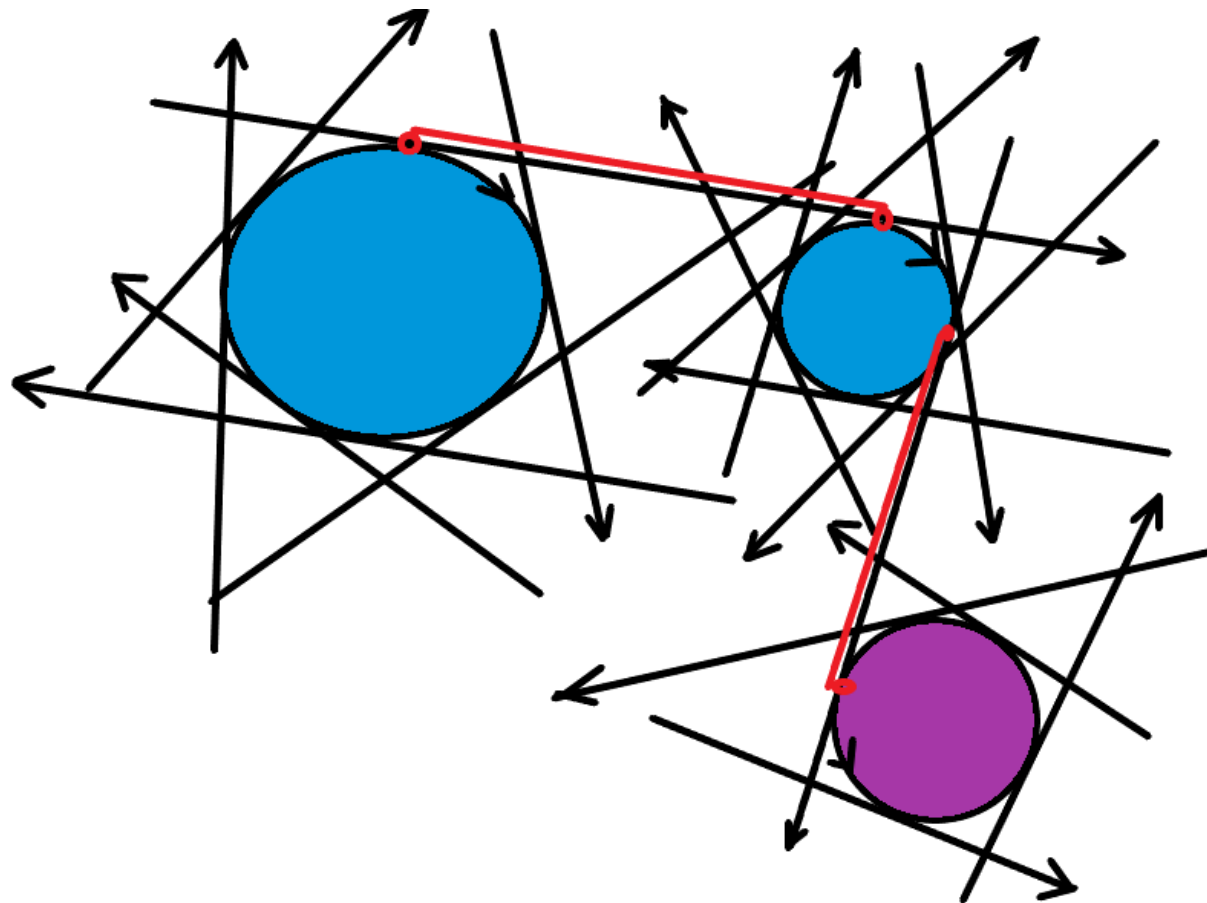
$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14}$$

Casey's Theorem

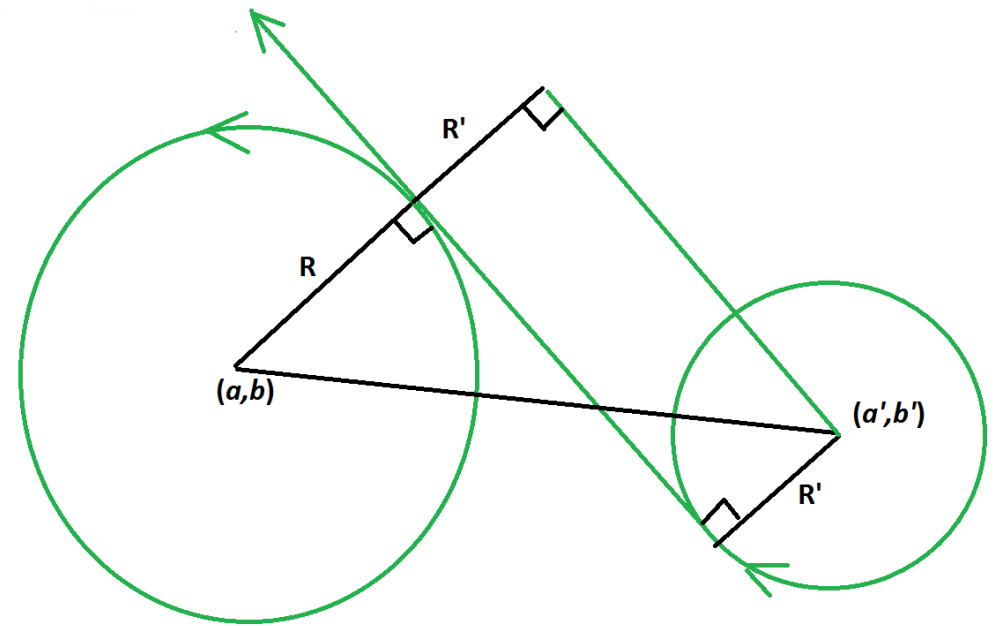
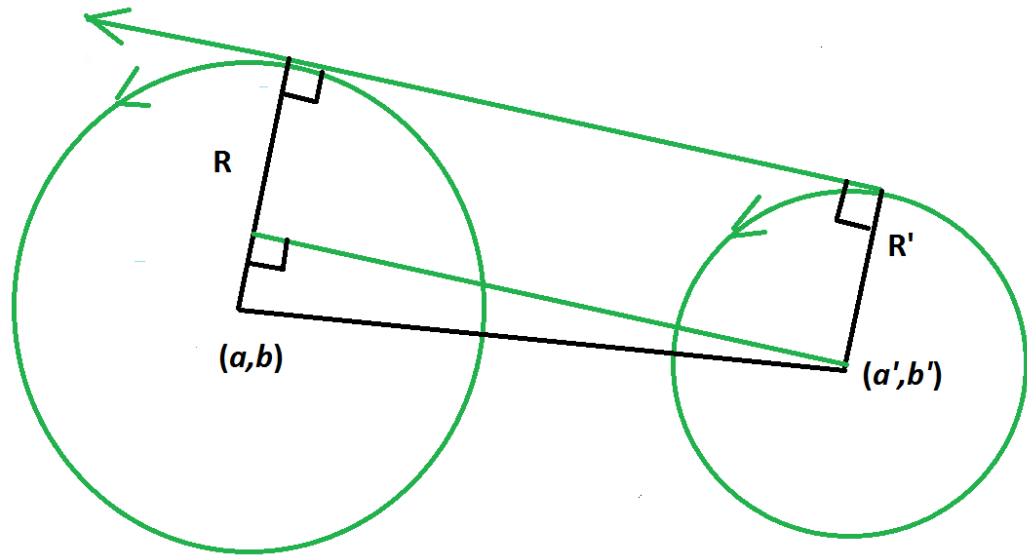
Casey, J. (1866), *Math. Proc. R. Ir. Acad.* 9: 396.



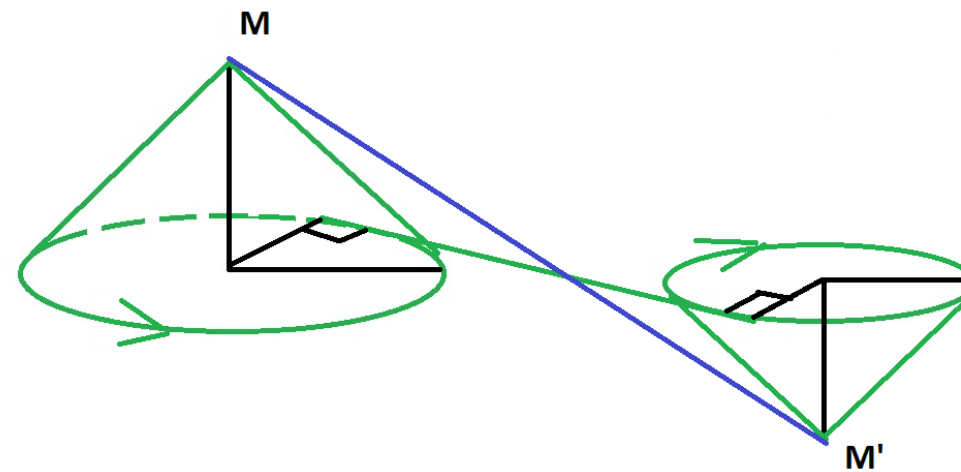
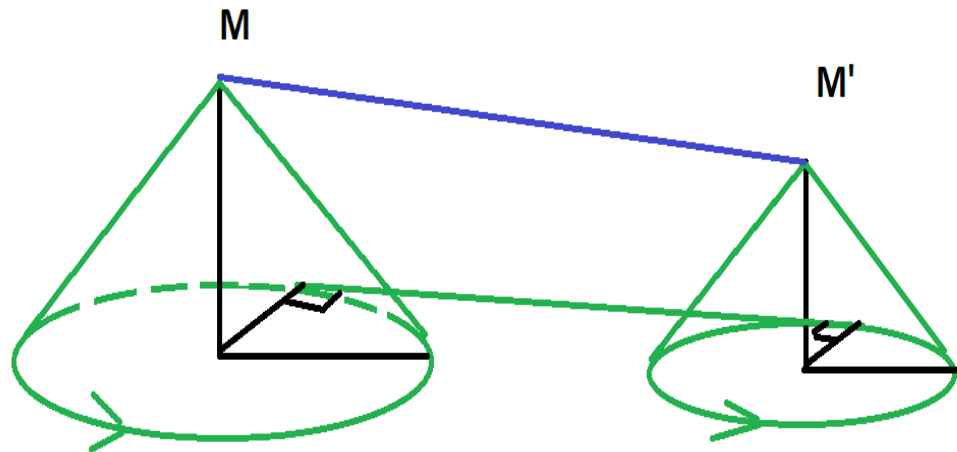
Преобразования Лагерра



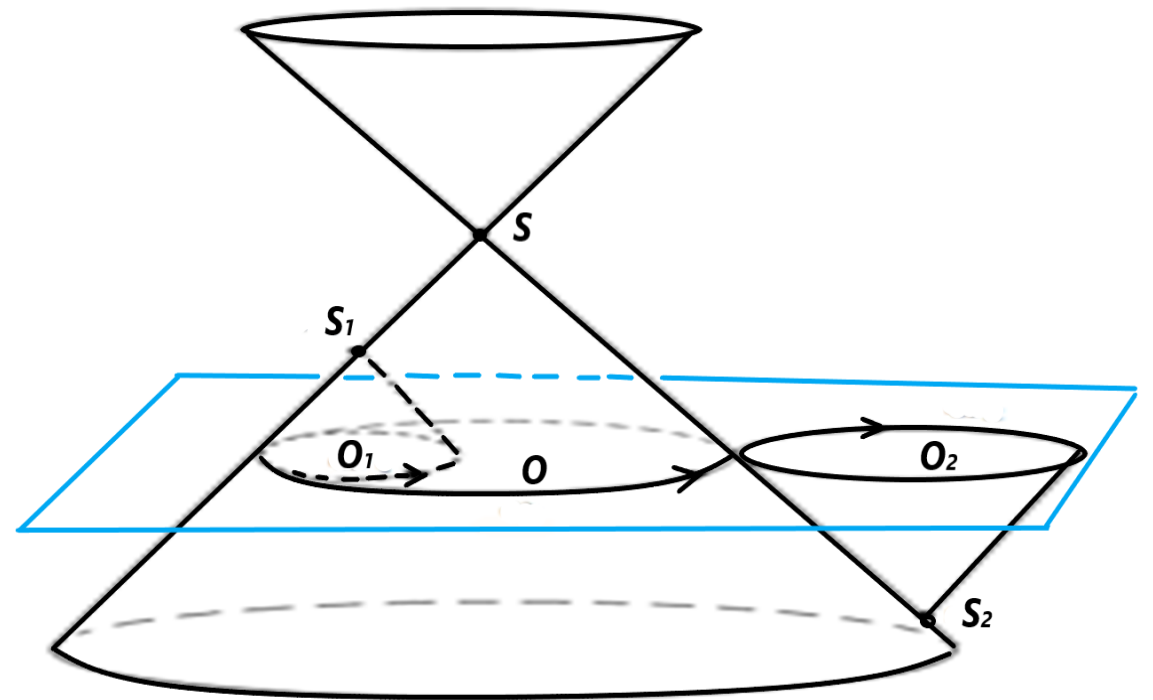
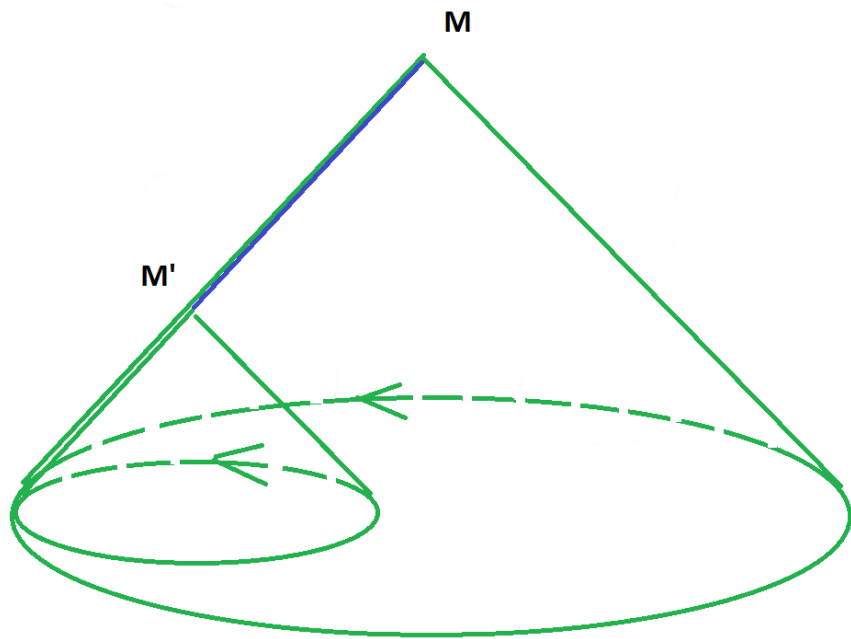
$$MM'^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 - (R - R')^2$$



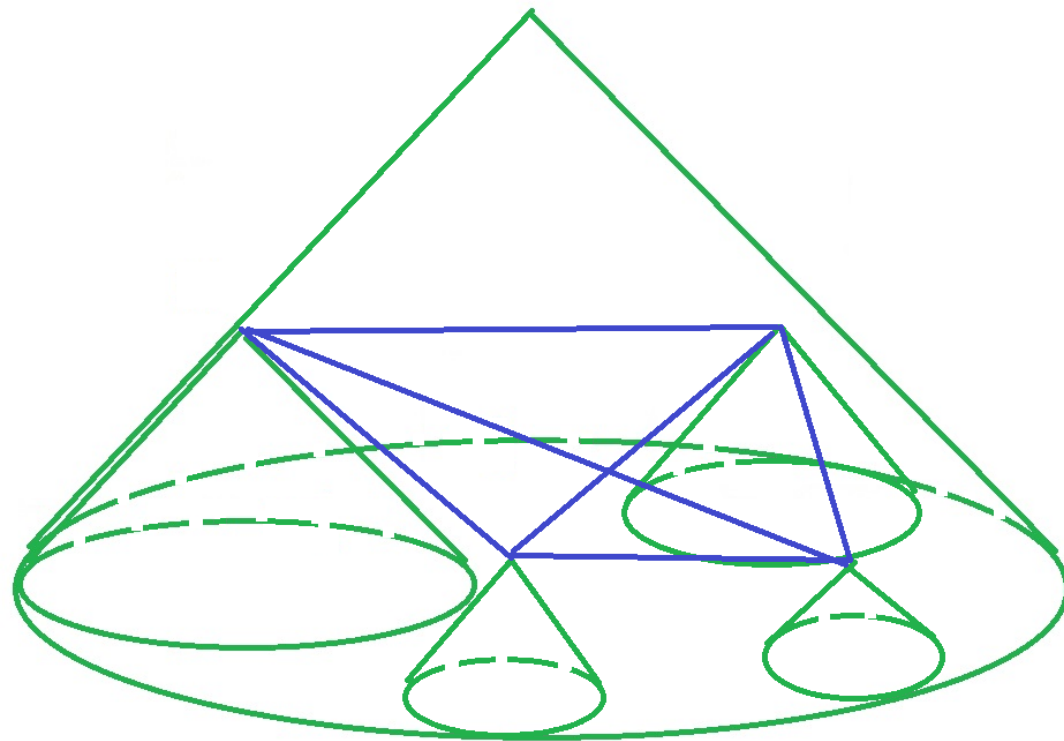
Изотропная проекция



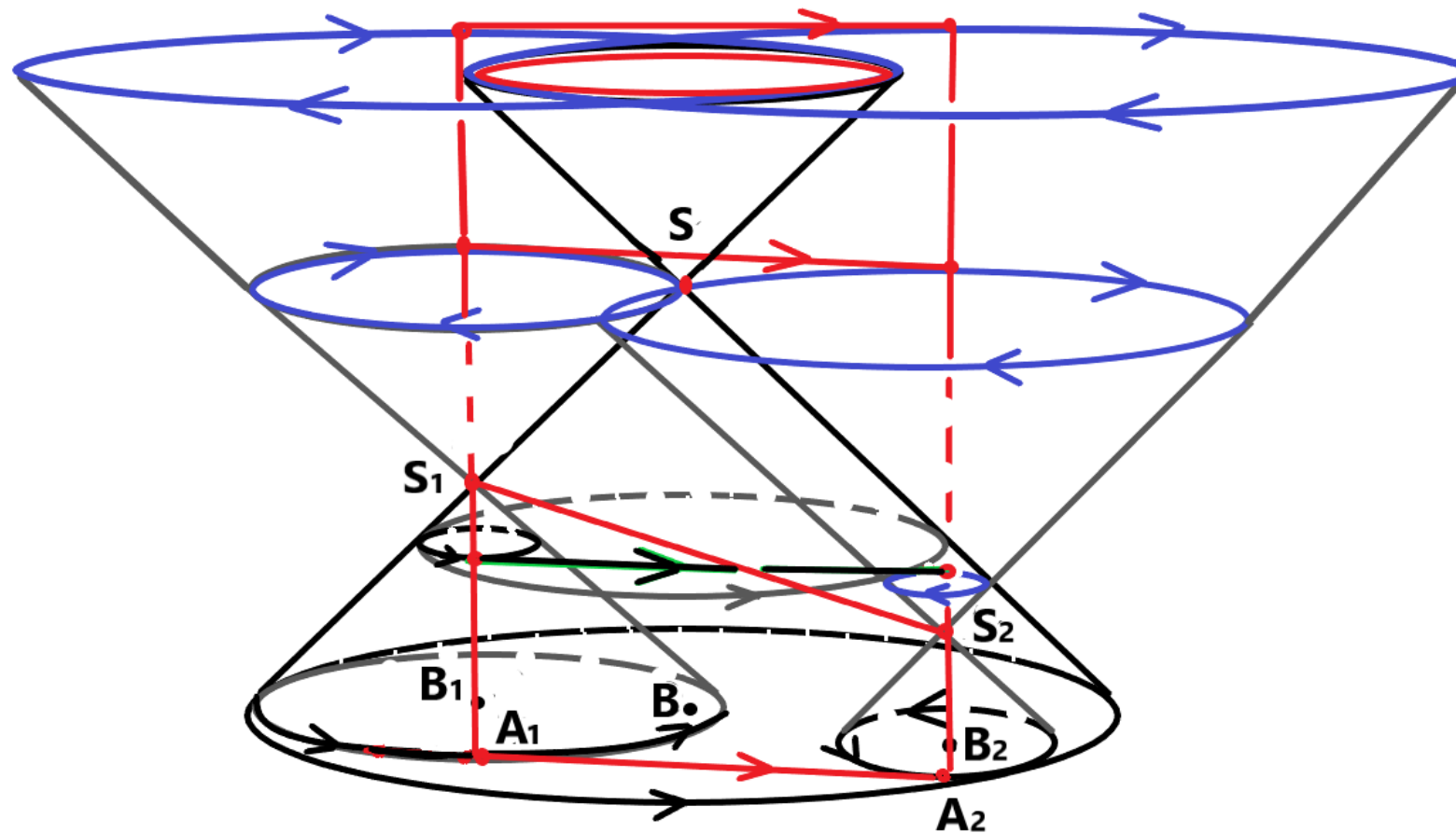
Касание циклов



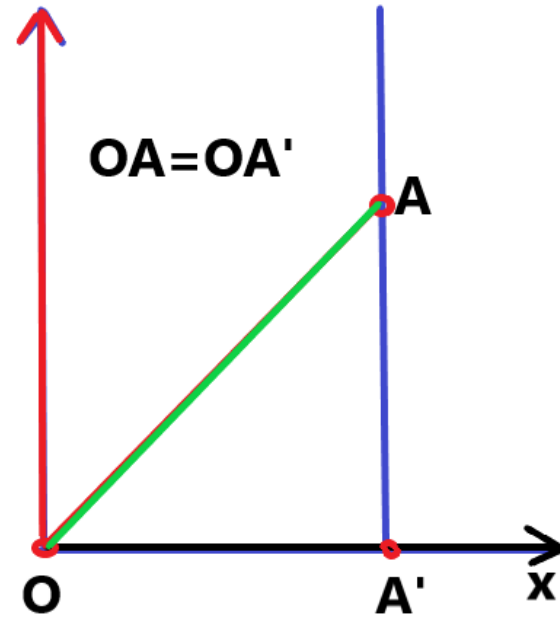
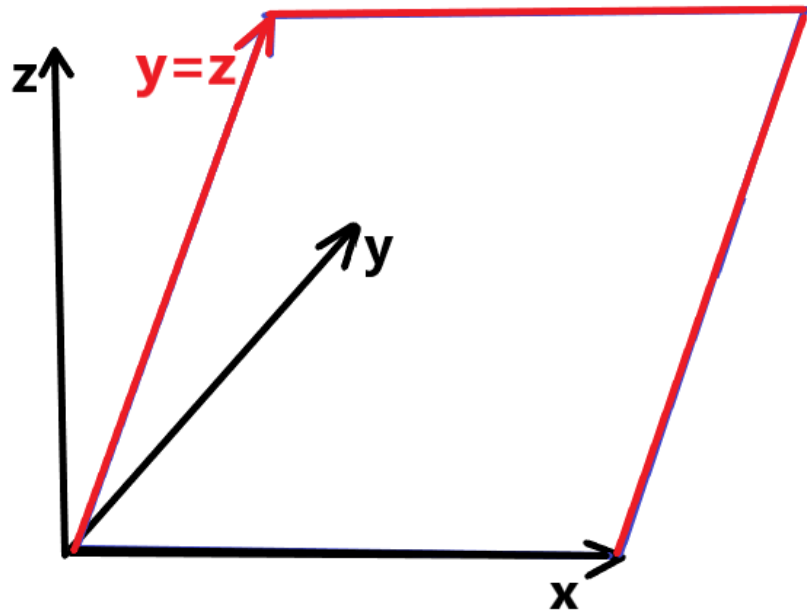
Интерпретация евклидовой теоремы Кейси



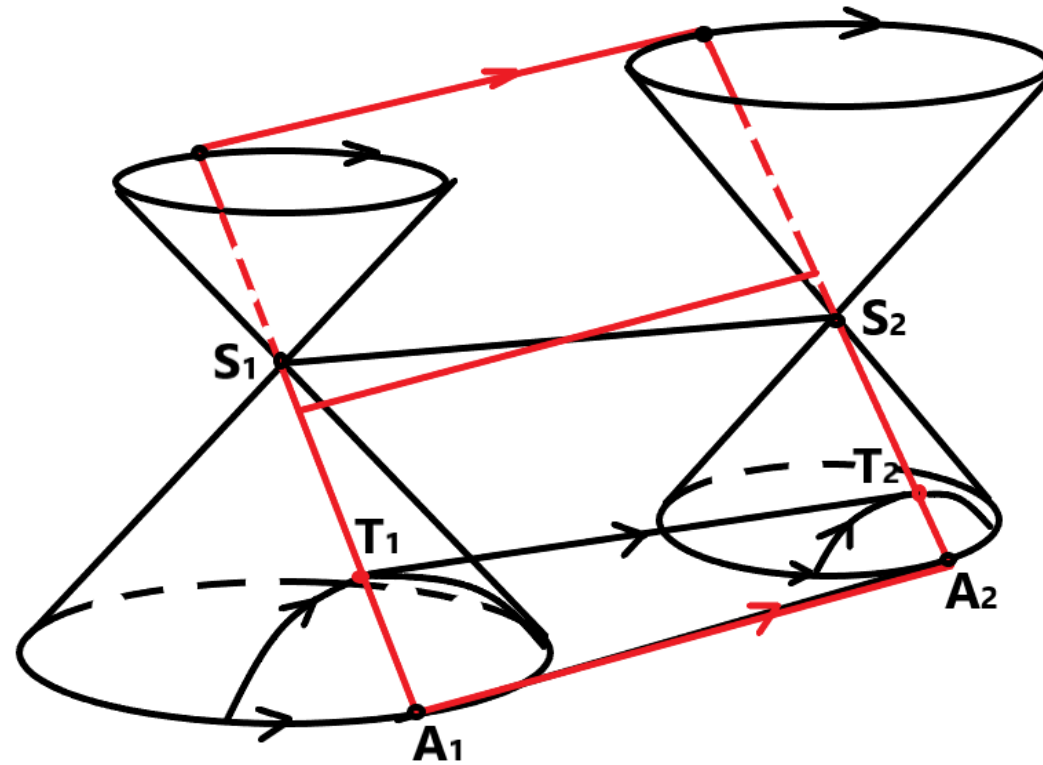
Способы касания и «касательные расстояния»



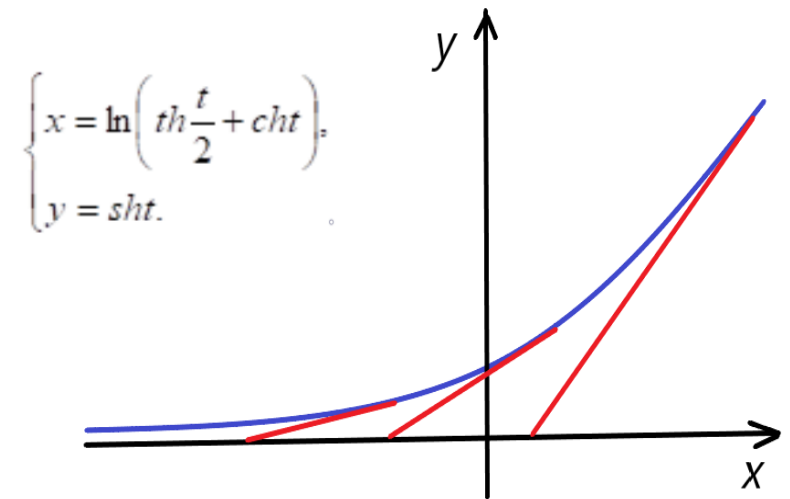
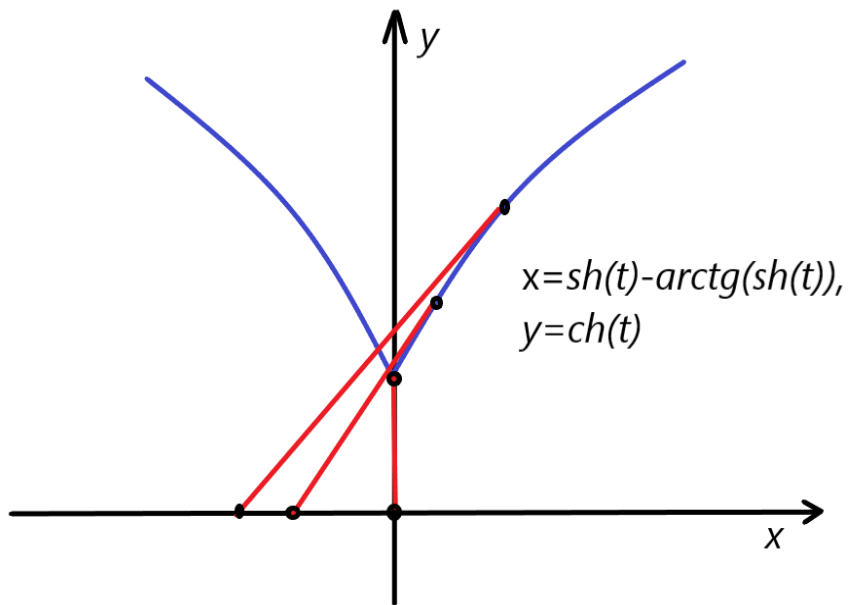
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2, ds^2 = dx^2 - dz^2, ds^2 = dx^2$$



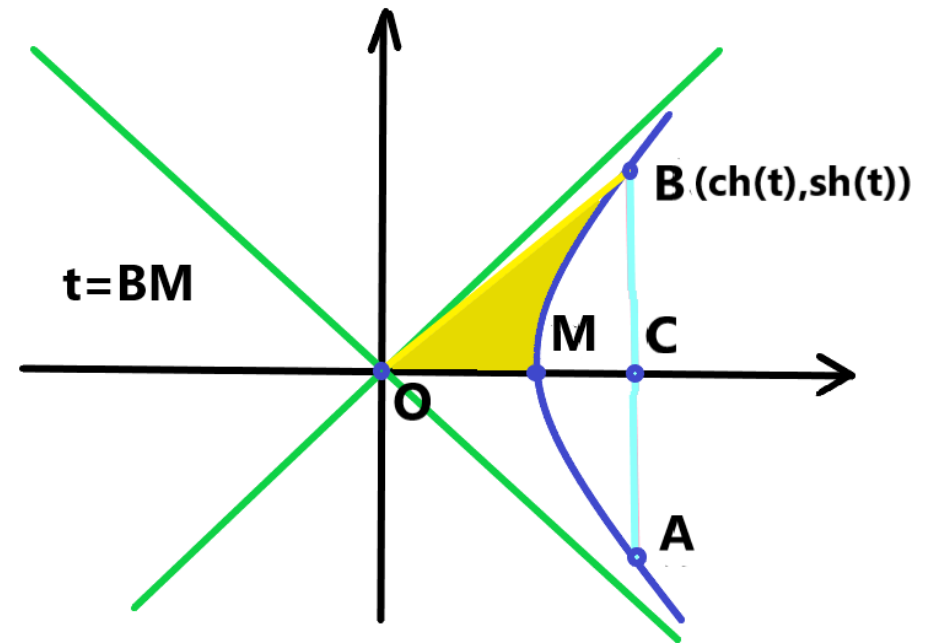
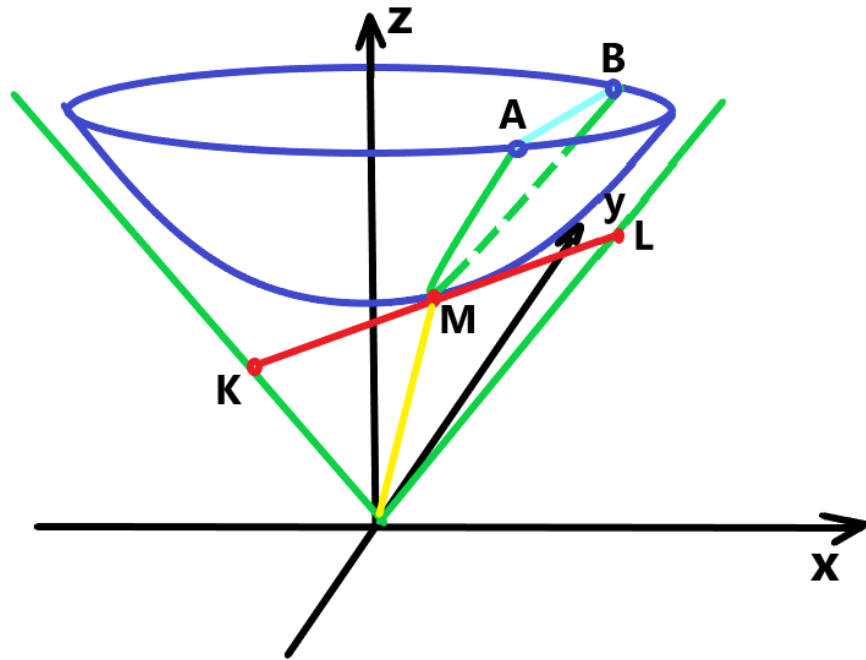
Лемма. Пусть в псевдоевклидовом пространстве зафиксированы два изотропных конуса, и плоскости пересекают конусы по евклидовым или псевдоевклидовым окружностям. Тогда длины общих касательных пар окружностей (при соответствующем выборе этих касательных) будут равны.



Псевдоевклидовы трактрисы

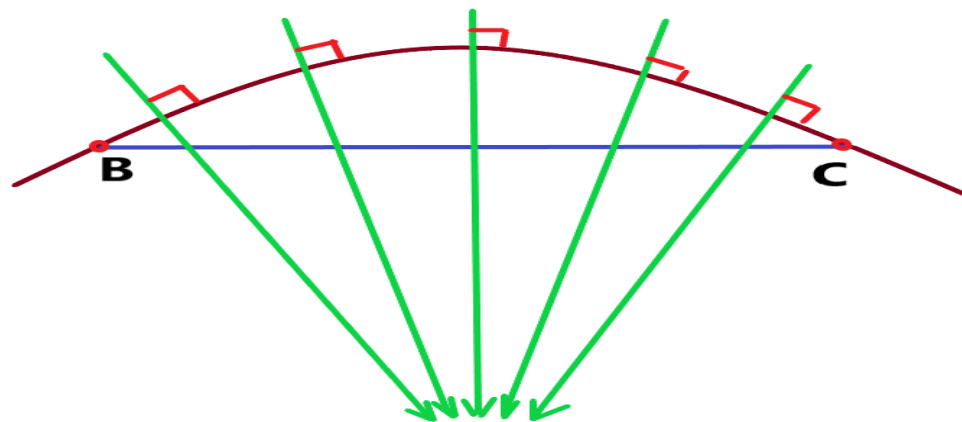


Полусфера мнимого радиуса



Теорема Птолемея на плоскости Лобачевского

- [Хорда длины x стягивает дугу l орицикла длины $l = 2\sigma \cdot \sinh \frac{x}{2\sigma}$
на гиперболической плоскости кривизны $K = -\frac{1}{\sigma^2}$.]

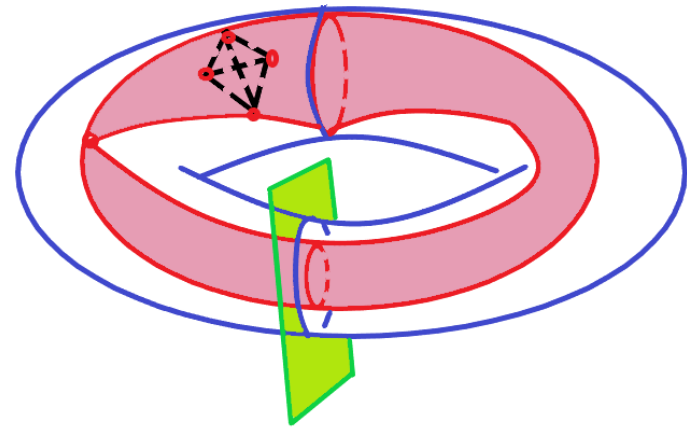
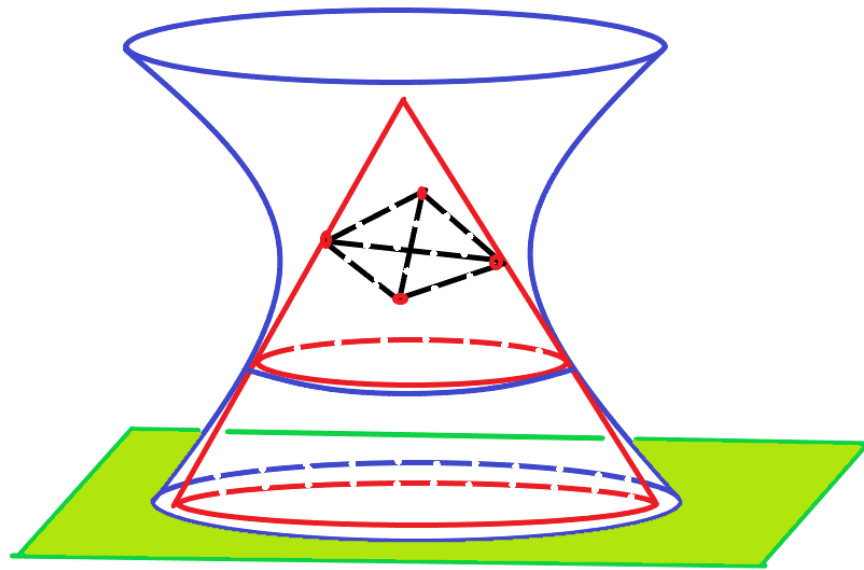


- $$\sinh \frac{\widetilde{AC}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{BD}}{2\sigma} = \sinh \frac{\widetilde{AB}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{CD}}{2\sigma} + \sinh \frac{\widetilde{AD}}{2\sigma} \cdot \sinh \frac{\widetilde{BC}}{2\sigma}$$

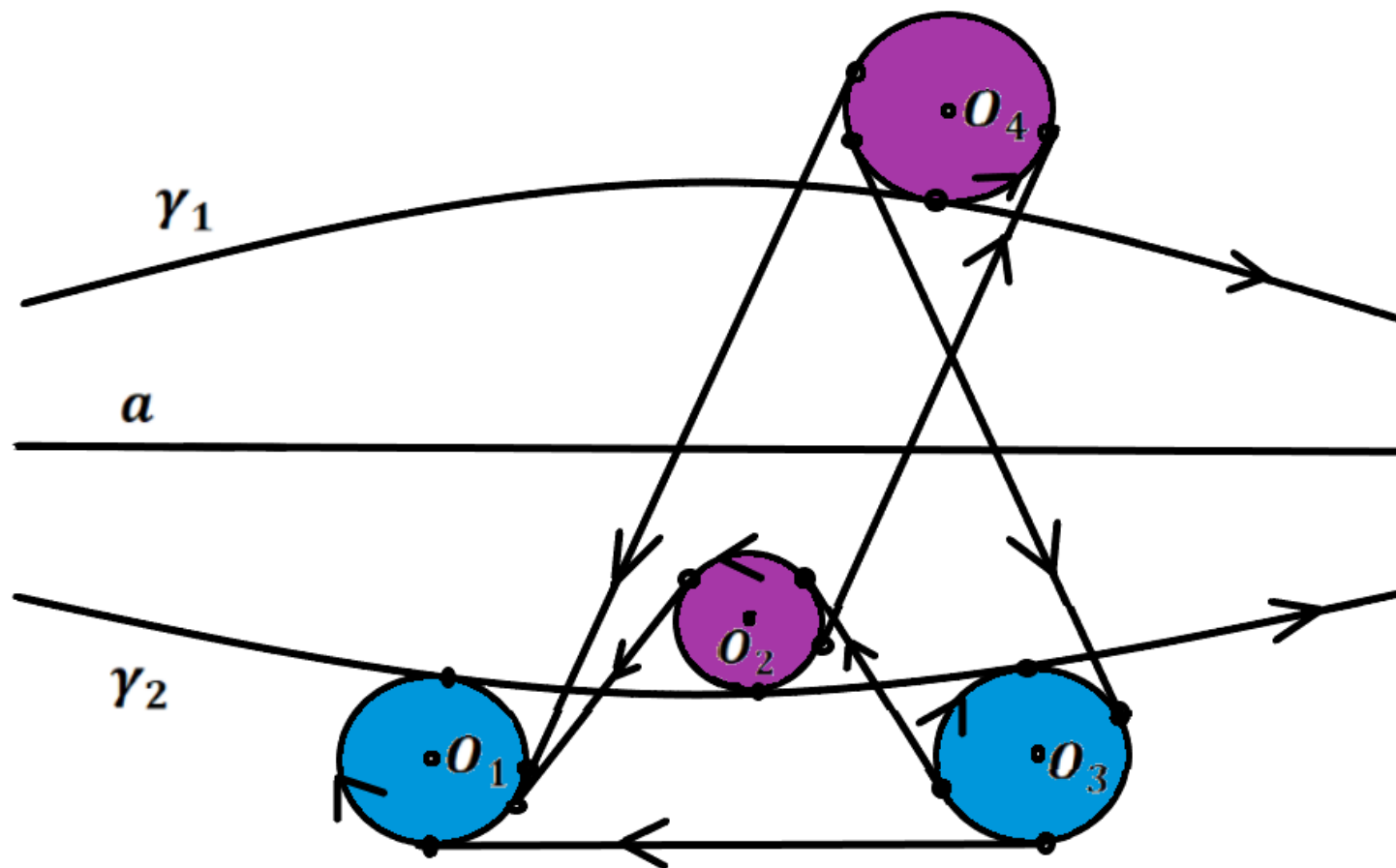
Теорема Кейси (если не следить за порядком циклов)

$$\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{12}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{13}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{14}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{21}}{2} & 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{23}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{24}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{31}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{32}}{2} & 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{34}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{41}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{42}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

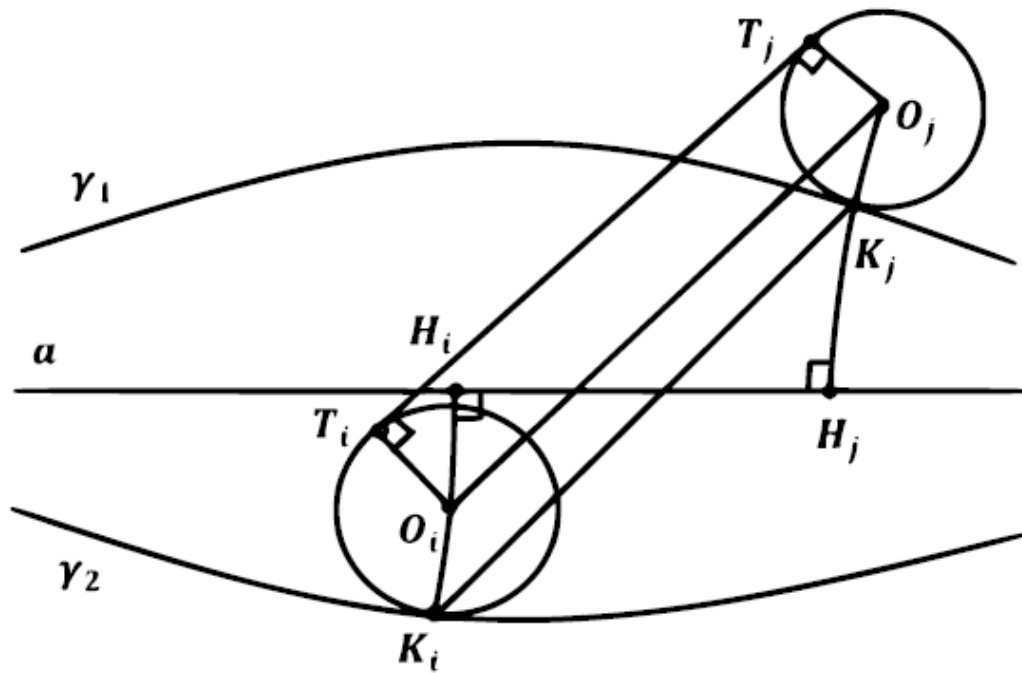
Гиперболический случай



Касание двух ветвей эквидистанты



Сведение соотношения Кейси к соотношению Птолемея



$$\operatorname{ch} \frac{K_i K_j}{2} = \operatorname{ch} \frac{t_{ij}}{2} \cdot \operatorname{ch} h \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch} R_i \cdot \operatorname{ch} R_j}{\operatorname{ch}(h - R_i) \cdot \operatorname{ch}(h + R_j)}}$$

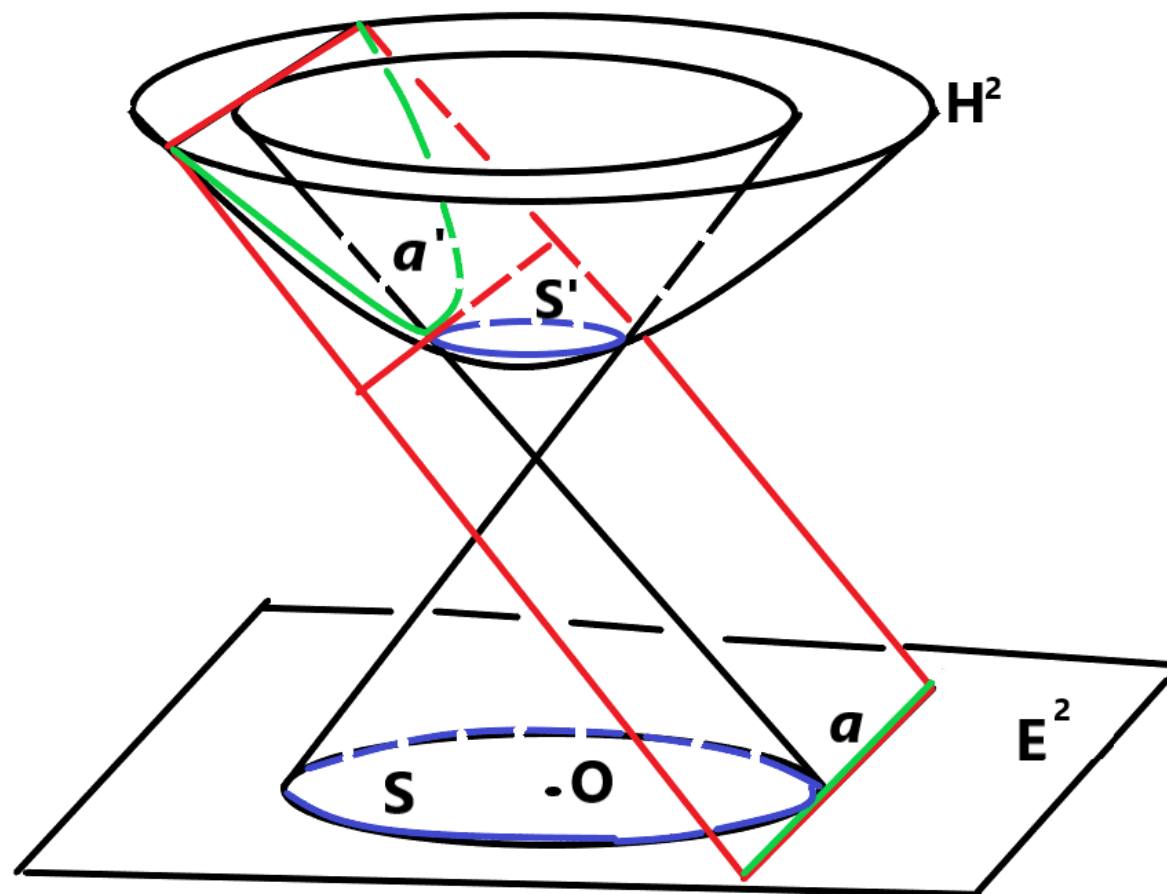
Если первые три окружности касаются одной ветви эквидистанты, а четвёртая окружность касается другой ветви

$$\operatorname{sh} \frac{t_{13}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{24}}{2} = \operatorname{sh} \frac{t_{12}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{34}}{2} + \operatorname{ch} \frac{t_{14}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{t_{23}}{2}$$

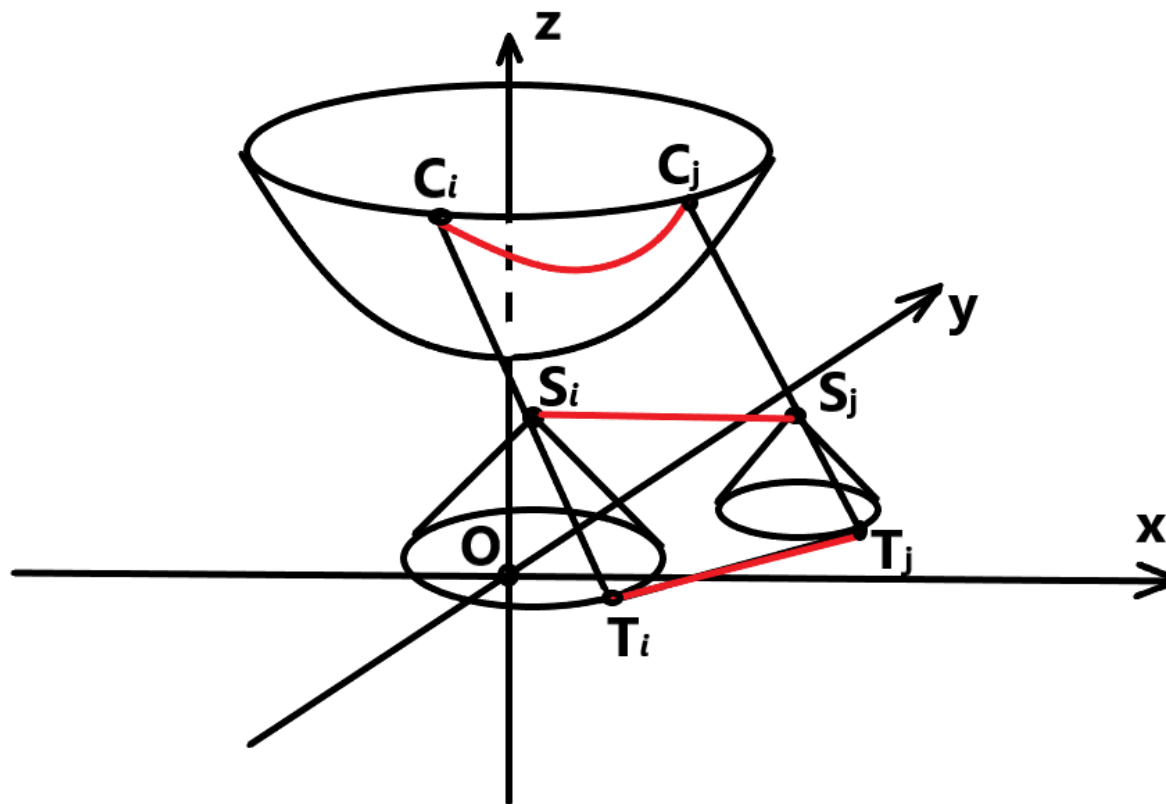
$$\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{12}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{13}}{2} & \operatorname{ch}^2 \frac{t_{14}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{21}}{2} & 0 & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{23}}{2} & \operatorname{ch}^2 \frac{t_{24}}{2} \\ \operatorname{sh}^2 \frac{t_{31}}{2} & \operatorname{sh}^2 \frac{t_{32}}{2} & 0 & \operatorname{ch}^2 \frac{t_{34}}{2} \\ \operatorname{ch}^2 \frac{t_{41}}{2} & \operatorname{ch}^2 \frac{t_{42}}{2} & \operatorname{ch}^2 \frac{t_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \det SD &= \left(\operatorname{sh} \frac{t_{12}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{34}}{2} + \operatorname{sh} \frac{t_{13}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{24}}{2} + \operatorname{sh} \frac{t_{23}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{14}}{2} \right) \times \\ &\times \left(\operatorname{sh} \frac{t_{12}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{34}}{2} - \operatorname{sh} \frac{t_{13}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{24}}{2} + \operatorname{sh} \frac{t_{23}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{14}}{2} \right) \times \\ &\times \left(\operatorname{sh} \frac{t_{12}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{34}}{2} + \operatorname{sh} \frac{t_{13}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{24}}{2} - \operatorname{sh} \frac{t_{23}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{14}}{2} \right) \times \\ &\times \left(\operatorname{sh} \frac{t_{12}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{34}}{2} - \operatorname{sh} \frac{t_{13}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{24}}{2} - \operatorname{sh} \frac{t_{23}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_{14}}{2} \right) \end{aligned}$$

Соответствие между семействами прямых и орициклов

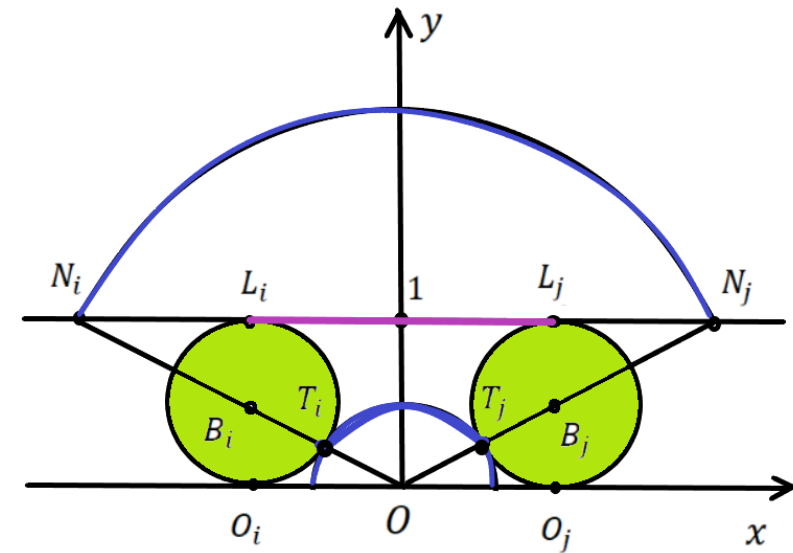
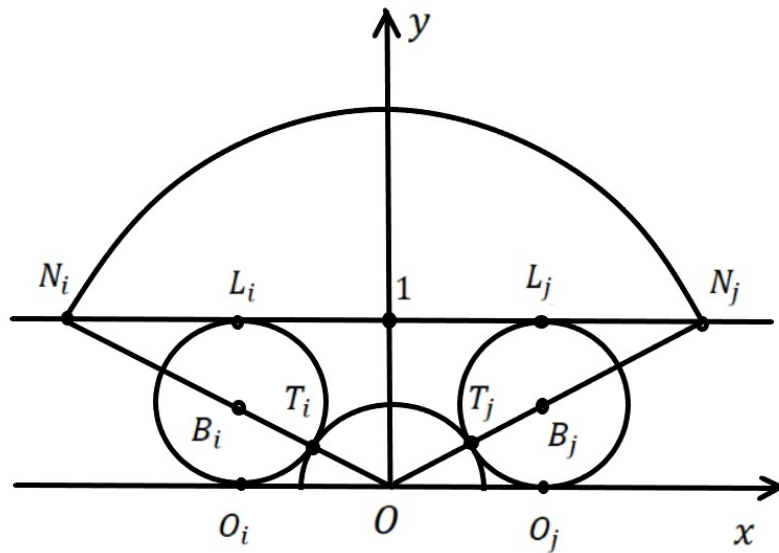


Ориклическая эквиполонгальность

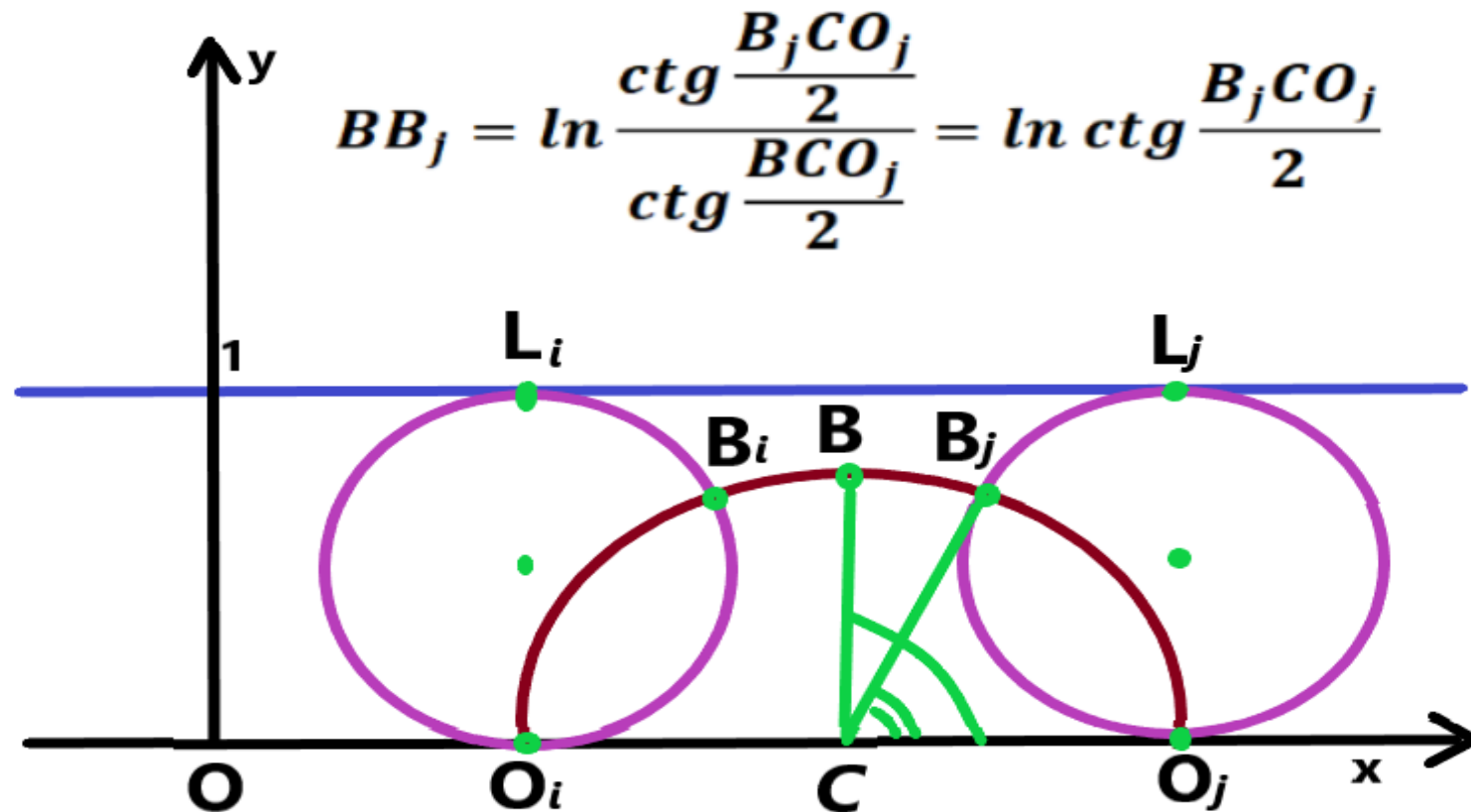


Связь геодезических и орициклических касательных

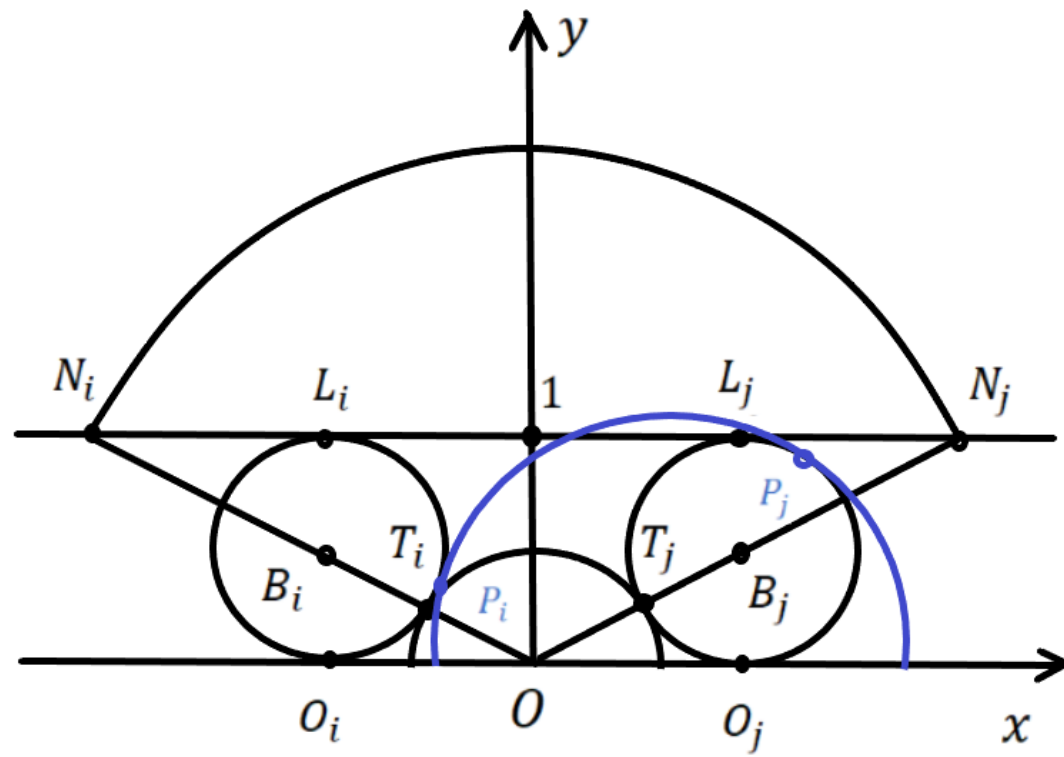
$$\widetilde{L_i L_j} = \sinh \frac{T_i T_j}{2}$$



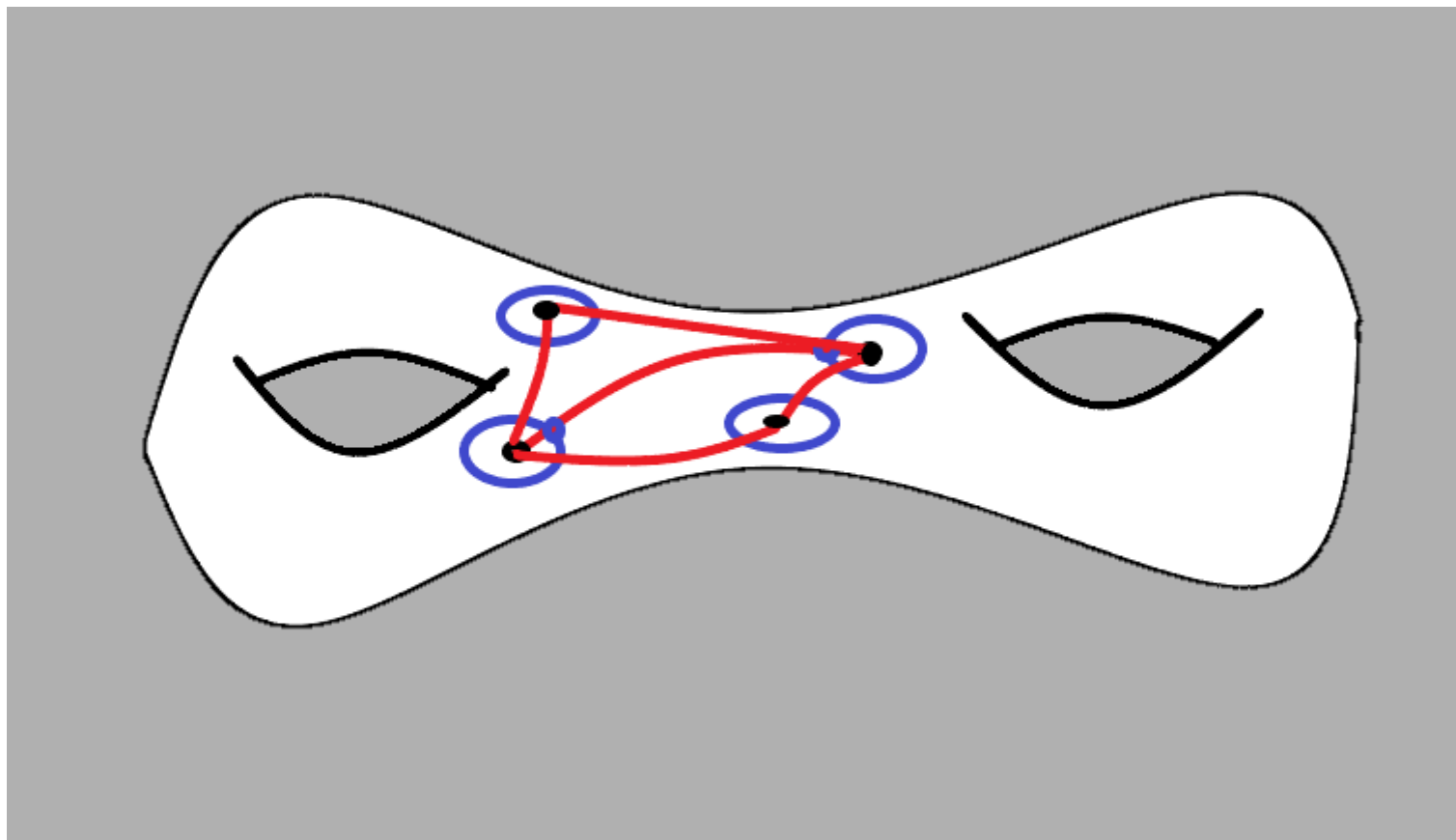
Расстояние в модели Пуанкаре



$$\widetilde{L}_i \widetilde{L}_j = \sinh \frac{T_i T_j}{2} = \cosh \frac{P_i P_j}{2}$$



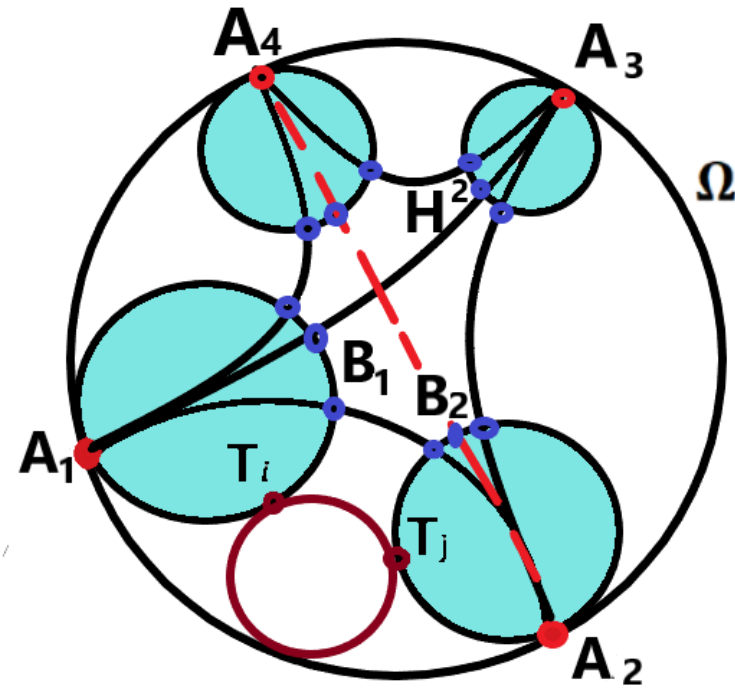
Фрагмент триангуляции



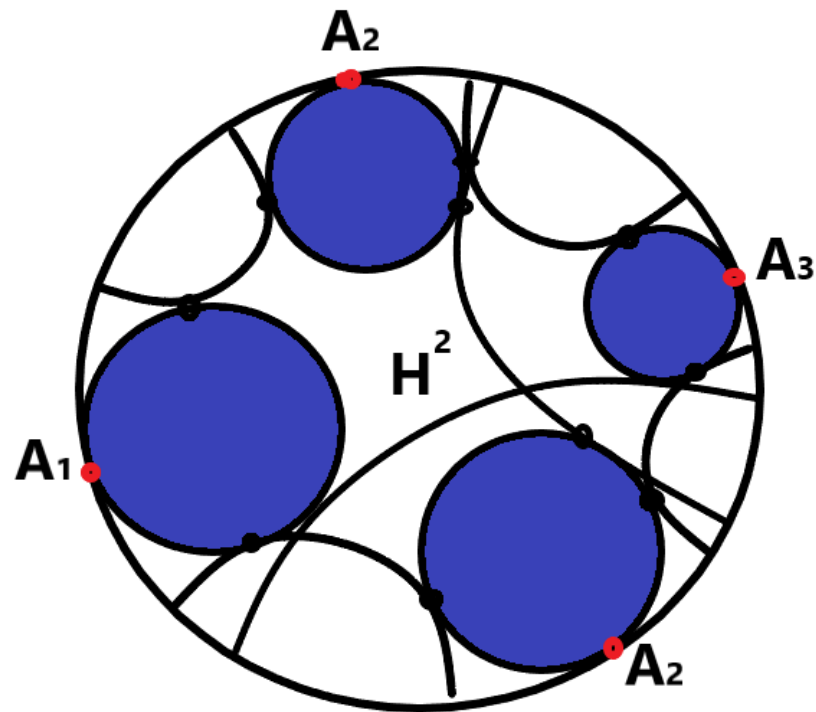
Лямбда-длины

- Пусть δ – снабжённая знаком длина отрезка общей оси двух орициклов между точками пересечения этой оси с орициклами, то есть расстояние между орициклами, если орициклы не пересекаются; если орициклы пересекаются, то длина отрезка общей оси берётся со знаком минус. Тогда лямбда-длина определяется так: $\lambda = e^{\delta/2}$

Лямбда-длины Пеннера



Теорема Кейси для орициклов



Литература

- 1. Kubota T. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry. *Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy*, 1912
- 2. Широков П. А. Этюды по геометрии Лобачевского. *Известия Физико-математического общества при КГУ, серия 2*, 1924
- 3. Ungar, A. A. Ptolemy's theorem in the Relativistic Model of Analitic Hyperbolic geometry. *Symmetry*, 2023
- 4. Haantjes, J. A characteristic local property of Geodesies in certain metric spaces. *Proc. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 1947
- 5. Gomez, M. Memoli, F. The Four Point Condition: An Elementary Tropicalization of Ptolemy's Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 2024
- 6. Casey, J. A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. *Classic reprint, Forgotten Books, London*, 2012.
- 7. Maehara H., Martini H. Casey's Theorem. *In: Circles, Spheres and Spherical Geometry*. Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher. Birkhauser, Cham. 2024.
- 8. Abrosimov, N. V. and Aseev, V. V. Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions, *Lobachevskii J. Math.*, 2018
- 9. Абросимов Н. В., Михайлова Л. А. Casey's theorem in hyperbolic geometry. *Сибирские электронные математические известия*, 2015,
- 10. Костин А. В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского, *Сибирские электронные математические известия*, 2022
- 11. Костин А. В. Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского, *Владикавказский математический журнал*, 2023
- 12. Kostin, A. V. On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane, *Siberian Mathematical Journal*, 2024
- 13. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога, *Сибирские электронные математические известия*, 2016,
- 14. Maehara H., Martini H. Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems, *Results Math.*, 2018
- 15. Костин А. В. Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности. *Изв. вузов. Матем.*, 2021
- 16. Костин А. В. Задача о тени и поверхности постоянной кривизны. *Сибирские электронные математические известия.*, 2023,
- 17. Костин А.В. Теоремы типа Кейси и преобразования Лагерра. *Владикавказский математический журнал*. 2025
- 18. Waddle K. Ptolemy's Equation and Kin. *Math. Intelligencer*. 2025
- 19. Костин А.В. Лямбда-длины Пеннера и аналоги теоремы Кейси. *Мат.заметки*. 2026
- 20. Каган В.Ф. Лобачевский. М-Л. 1948

Костин А.В.
Набережночелнинский институт Казанского федерального
университета

Спасибо за внимание!