К проблеме классификации паркетогранников и смежные вопросы

Тимофеенко Алексей Викторович

семинар по Дискретной геометрии и геометрии чисел
под научным руководством Н. П. Долбилина,
Н. Г. Мощевитина, М. Д. Ковалева, И. Х. Сабитова
Zoom, 16:45 (Москва) 28 ноября 2023 г.

Схема доклада

Классификация правильногранных тел

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильногранных тел

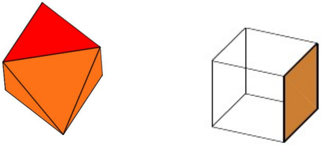


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильногранных тел

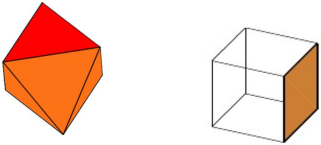


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм Π_n и антипризм A_n, $n = 3, 4, \dots,$ существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильногранных тел

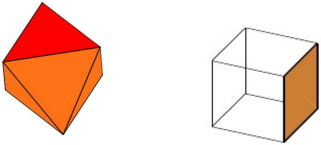


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм Π_n и антипризм A_n, $n = 3, 4, \ldots,$ существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

1. правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильногранных тел

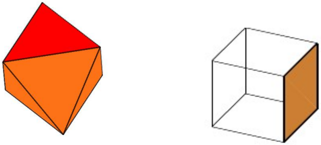


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм Π_n и антипризм A_n, $n = 3, 4, \ldots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

1. правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
2. 13 архимедовых тел,

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильногранных тел

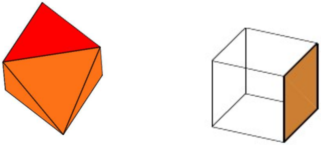


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

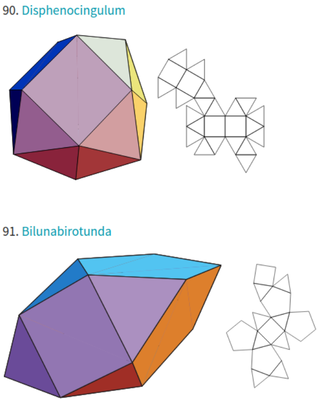
Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

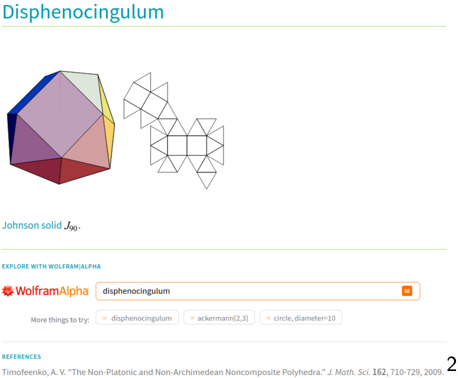
Кроме призм Π_n и антипризм A_n, $n = 3, 4, \ldots,$ существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

1. правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
2. 13 архимедовых тел,
3. 92 многогранника Джонсона.[1]

[1] Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **2** (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Johnson Solid Атлас правильногранников





[2]

[2] https://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html

Многогранники с равноугольными гранями

Лемма(А. Д. Милка, 1987)

Вершина выпуклого многогранника с равноугольными гранями по составу сходящихся в этой вершине граней может относиться только к одному из типов, перечисленных в табл. 1.

[3] Милка А. Д., *Почти правильные многогранники*, Тр. Ин-та математики, **9** (1987), 136–141.

Многогранники с равноугольными гранями

Лемма(А. Д. Милка, 1987)

Вершина выпуклого многогранника с равноугольными гранями по составу сходящихся в этой вершине граней может относиться только к одному из типов, перечисленных в табл. 1.

Таблица 1

3.3.n	3—∞	3.11.n	11—13	3.3.4.n	4—11
3.4.n	4—∞	4.4.n	4—∞	3.3.5.n	5—7
3.5.n	5—∞	4.5.n	5—19	3.4.3.n	4—11
3.6.n	6—∞	4.6.n	6—11	3.4.4.4	—
3.7.n	7—41	4.7.n	7—9	3.4.4.5	—
3.8.n	8—23	5.5.n	5—9	3.4.5.4	—
3.9.n	9—17	5.6.n	6—7	3.5.3.n	5—7
3.10.n	10—14	3.3.3.n	3—∞	3.3.3.3.n	3—5

[3]

[3]Милка А. Д., *Почти правильные многогранники*, Тр. Ин-та математики, **9** (1987), 136–141.

Паркетогранники без фиктивных вершин

[4]

[4] Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, С. 155-170.

Паркетогранники без фиктивных вершин

Теорема (А. М. Гурин, В. А. Залгаллер, А.Т., 2008-2011)

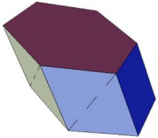
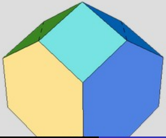
Если отличное от правильногранного выпуклое тело имеет грани либо правильные, либо составленные так из правильных многоугольников, что каждая вершина такого многоугольника служит и вершиной грани, то оно подобно одному из 78 многогранников, построенных явно: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/.

[4] Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, С. 155-170.

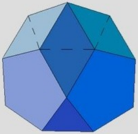
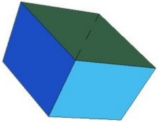
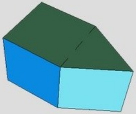
Convex regular-faced polyhedra with conditional edges

The names are generally taken from Timofeenko. Some names labeled (GZ) are more fanciful names given in Gurin-Zalgaller; others labeled (S) are my own invention. I have taken some liberties with translating Timofeenko's names; in particular I use "para-augmented" and "meta-augmented" for the two ways of augmenting a pentagonal rotunda; "gyrate augmented" for augmentations which are also found in a different orientation among the Johnson solids; and various modifiers to describe the 5 different ways of biaugmenting an orthobirotunda and the 3 different ways of triaugmenting one.

The viewers require Java. The first opening of a live viewer is likely to be very slow as your browser starts Java. After the first others will start more quickly.

$P_{n,k}$	S_n	Name	Composition	Image/Viewer	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	F_{3+3}
Q_1	Q_1	oblique hexagonal prism, Ivanov solid Q_1	noncomposite	 Start Live View Enlarge	12	18	8		2		2			4
Q_2	Q_2	hexarhombic dodecahedron (S), Ivanov solid Q_2	noncomposite	 Start Live View Enlarge	18	28	12		4		4			4

Атлас паркетогранников без фиктивных вершин

Q_6	Q_6	Pryakhin solid Q_6	noncomposite	 Start Live View Enlarge	18	33	17	7	3	3	1			3	
$P_{2,2}$	S_3	rhombic prism, bifastigium (S)	$\Pi_3 + \Pi_3'$	 Start Live View Enlarge	8	12	6		4					2	
$P_{2,3}$	S_4	3+4-prism (S)	$\Pi_3 + \Pi_4$	 Start Live View Enlarge	10	15	7		5						2

[5] R. Tupelo-Schneck, http://tupelo-schneck.org/polyhedra/

Группа:

$[n]^+$ циклическая порядка n поворотов неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием или симметрий такой пирамиды с продлёнными в одном направлении на одинаковое расстояние рёбрами основания, $c\_n.txt$,

$[2]^+$ порядка два симметрий дважды наращенного трёхскатного прямого бикупола $P_{4,12}$,

$[\ ]^+$ единичная;

$[2, n]^+$ поворотов диэдра порядка $2n$ или двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d\_n.txt$;

$[3, 3]^+$ поворотов тетраэдра, $tetr.txt$;

$[3, 4]^+$ симметрий архимедова тела $[3, 3, 3, 3, 4]$ плосконосый куб M_{26}, $cube.txt$;

$[3, 5]^+$ симметрий архимедова тела $[3, 3, 3, 3, 5]$ плосконосый додекаэдр M_{27}, $icos.txt$;

$[n]$ диэдральная симметрий неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием, $2c\_n.txt$,

$[\,]$ порядка два симметрий наращенной 4-угольной пирамиды $P_{2,22}$ (скошенной 3-угольной призмы);

$[2^+, 2n^+]$, расширяющая при нечётных n группу $[n]^+$ отражением от точки, $2.c\_n.txt$,

$[2^+, 2^+]$ порядка 2 отражения от точки или симметрий параллелепипеда без прямоугольных граней и с различными рёбрами в каждой вершине;

$[2, n^+]$, расширяющая группу $[n]^+$ поворотов отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворотов, $d1cn.txt$;

Группа (окончание):

$[2, n^+]$, расширяющая группу $[n]^+$ поворотов отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворотов, $d1cn.txt$;

$[3, 3]$ симметрий тетраэдра, $tetr\_2.txt$;

$[3, 4]$ симметрий куба, $cube\_2.txt$;

$[3^+, 4]$, расширяющая отражением от точки группу поворотов тетраэдра, $2.tetr.txt$;

$[3, 5]$ симметрий икосаэдра, $icos\_2.txt$;

$[2, n]$ симметрий двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d\_1d\_n.txt$,

$[2, 2]$ симметрий прямой ромбической призмы, $P_{2,2}$;

$[2^+, 2n]$ симметрий антипризмы A_n порядка $4n$ при $n > 3$, $d\_2n.txt$,

$[2^+, 6]$ симметрий дважды наращенного октаэдра $P_{4,11}$ с шестью ромбическими гранями,

$[2^+, 4]$ симметрий C-антипризмы CA_2;

$[2, 2]^+$ Клейна четверная поворотов прямой ромбической призмы $P_{2,2}$, $4\_Klein.txt$;

$[2^+, 2] = [2, 2^+]$ Клейна четверная с вращательной симметрией или симметрий скошенного куба $P_{4,30}$, $K4.txt$;

$[2]$ Клейна четверная отражений или симметрий клинокороны $P_{1,28} = M_{22}$.[6]

---

[6] Тимофеенко А.В. От платоновых тел к паркетогранникам через символьное программирование и прототипирование, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ... Матер. XIX Междунар. конф., посв. 200-летию со дня рожд. академика П. Л. Чебышёва. Тула, 2021. С.421–426.

Группы симметрий паркетогранников

Группы симметрий правильногранных тел опубликованы, (N.Johnson,1966). А для каждого составного неправильногранного r-паркетогранника $P_{k,i}$ без условных вершин его группа симметрий публикуется ниже. Справа от пары (k, i) расположена группа $AutP_{k,i}$. Например, утверждению $AutP_{3,2} = [2^+, 4]$ соответствует запись $(3, 2)[2^+, 4]$ (о том, что группа симметрий дважды скрученно наращенного куба $P_{3,2}$ равна группе $[2^+, 4]$ симметрий C-антипризмы CA_2).

$(2, 2)[2, 2], (2, 3)[2], (2, 4), [2], (2, 22)[\,], (2, 25)[], (2, 29)[\,], (2, 30)[\,], (2, 31)[5], (2, 33)[\,], (2, 34)[2], (2, 38)[3], (2, 42)[4], (2, 48)[5]$,

$(3, 1)[\,], (3, 2)[2^+, 4], (3, 3)[2, 2], (3, 4)[2], (3, 5)[2], (3, 6)[\,], (3, 22)[5], (3, 31)[5], (3, 33)[3], (3, 34)[\,], (3, 35)[4], (3, 36)[2^+, 2], (3, 37)[], (3, 38)[\,], (3, 39)[\,](3, 40)[5], (3, 41)[\,], (3, 42)[5], (3, 43)[5], (3, 44)[5], (3, 48)[4], (3, 49)[2, 4], (3, 51)[\,], (3, 53)[5], (3, 54)[2], (3, 55)[2^+, 10]$,

$(4, 1)[2], (4, 2)[2^+, 2], (4, 5)[5], (4, 6)[5], (4, 7)[5], (4, 8)[5], (4, 9)[5], (4, 10)[5]^+, (4, 11)[2, 3], (4, 12)[2]^+, (4, 13)[2, 4], (4, 14)[\,], (4, 15)[\,], (4, 16)[2], (4, 17)[\,], (4, 18)[2^+, 10], (5, 6)[\,]^+, (4, 19)[2]^+, (4, 20)[2]^+, (4, 21)[\,], (4, 22)[2, 5], (4, 25)[\,], (4, 26)[\,], (4, 27)[3], (4, 30)[2^+, 2], (4, 31)[2]^+$,

$(5, 1)[2, 5], (5, 2)[2^+, 10], (5, 3)[2, 5]^+, (5, 4)[3], (5, 5)[\,], (5, 7)[2]$,

$(6, 1)[2]^+$.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1]

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

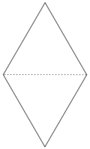
Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

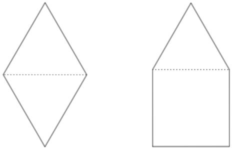
Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

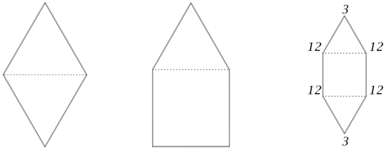
Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

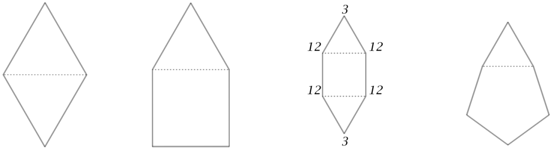
Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

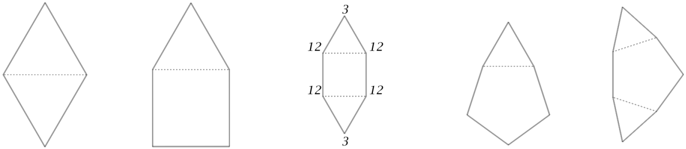
Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

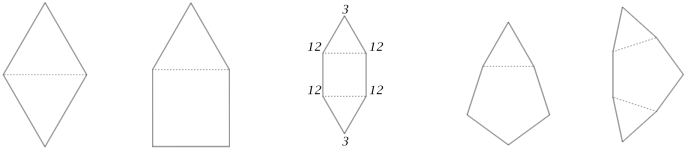
Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



[1]Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.

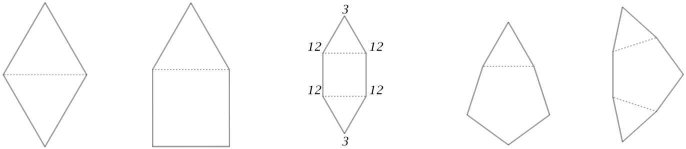


$4b(3,6,3,6)$,

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.

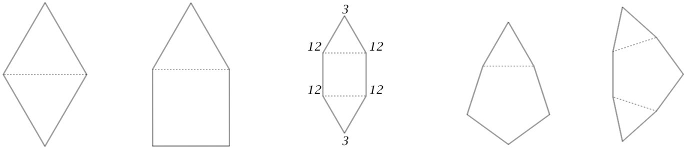


$4b(3,6,3,6)$, $5b\left(3,12,4^2,12\right)$,

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.

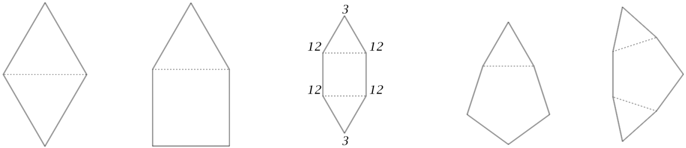


$$4b(3,6,3,6),\ 5b\left(3,12,4^2,12\right),\ 6a\left(3,12^2,3,12^2\right),$$

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.

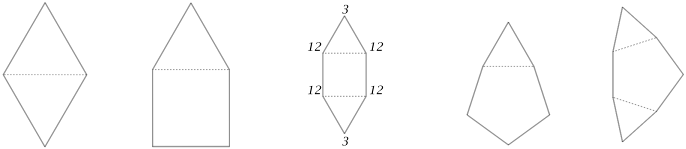


$$4b(3,6,3,6),\ 5b\left(3,12,4^2,12\right),\ 6a\left(3,12^2,3,12^2\right),$$
$$6b\left(3,30,5^3,30\right),$$

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Паркетные многоугольники и паркетогранники

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников.[1] *Паркетогранником* называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может равноугольными гранями.



$$4b(3,6,3,6),\ 5b\left(3,12,4^2,12\right),\ 6a\left(3,12^2,3,12^2\right),$$
$$6b\left(3,30,5^3,30\right),\ 7b\left(3,30,5,30,3,30^2\right).$$

[1] Ю. А. Пряхин, "Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных", Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.

Классификация паркетных многоугольников

Теорема.

Каждый паркетный многоугольник соответствует одному из следующих типов:

Классификация паркетных многоугольников

Теорема.

Каждый паркетный многоугольник соответствует одному из следующих типов:
$3a\left(3^3\right)$,

Классификация паркетных многоугольников

Теорема.

Каждый паркетный многоугольник соответствует одному из следующих типов:
$3a\left(3^3\right)$,
$4a\left(3^2,6^2\right)$, $4b(3,6,3,6)$, $4c\left(4^4\right)$;

Классификация паркетных многоугольников

Теорема.

Каждый паркетный многоугольник соответствует одному из следующих типов:
$3a\left(3^3\right)$,
$4a\left(3^2,6^2\right)$, $4b(3,6,3,6)$, $4c\left(4^4\right)$;
$5a\left(3,6^4\right)$, $5b\left(3,12,4^2,12\right)$;
$6a\left(3,12^2,3,12^2\right)$, $6b\left(3,30,5^3,30\right)$, $6c\left(4^2,12,6^2,12\right)$, $6d\left(6^6\right)$;
$7a\left(3,12^2,6^2,12^2\right)$, $7b\left(3,30,5,30,3,30^2\right)$, $7c\left(4,12,6,12,4,12^2\right)$, $7d\left(5^3,30,6^2,30\right)$;

Классификация паркетных многоугольников

Теорема.

Каждый паркетный многоугольник соответствует одному из следующих типов:

$3a\left(3^3\right)$,
$4a\left(3^2,6^2\right)$, $4b(3,6,3,6)$, $4c\left(4^4\right)$;
$5a\left(3,6^4\right)$, $5b\left(3,12,4^2,12\right)$;
$6a\left(3,12^2,3,12^2\right)$, $6b\left(3,30,5^3,30\right)$, $6c\left(4^2,12,6^2,12\right)$, $6d\left(6^6\right)$;
$7a\left(3,12^2,6^2,12^2\right)$, $7b\left(3,30,5,30,3,30^2\right)$, $7c\left(4,12,6,12,4,12^2\right)$, $7d\left(5^3,30,6^2,30\right)$;
$8a\left(3,30,5,30,6^2,30^2\right)$, $8b\left(4,12^2,4,12^4\right)$, $8c\left(6^2,12^2,6^2,12^2\right)$;
$9a\left(5,30,6^2,30^2,6^2,30\right)$, $9b\left(6,12^2,6,12^2,6,12^2\right)$;
$10a\left(6,12^2,6,12^6\right)$, $10b\left(6,12^4,6,12^4\right)$;
$11a\left(6,12^{10}\right)$;
$12a\left(12^{12}\right)$.

Доказательство классификационной теоремы

Доказательство классификационной теоремы

Соединяя правильные 3-, 4- и 5-угольники, можно получить только углы такие, как у правильного m-угольника, $m \in M$, $M = \{3, 4, 5, 6, 12, 30\}$.

Доказательство классификационной теоремы

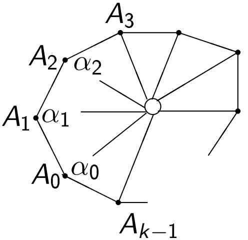
Соединяя правильные 3-, 4- и 5-угольники, можно получить только углы такие, как у правильного m-угольника, $m \in M$, $M = \{3, 4, 5, 6, 12, 30\}$. Другие соединения приводят к углам, не меньшим развёрнутого. Поэтому угол паркетного многоугольника равен углу правильного m-угольника, $m \in M$.

Доказательство классификационной теоремы

Соединяя правильные 3-, 4- и 5-угольники, можно получить только углы такие, как у правильного m-угольника, $m \in M$, $M = \{3, 4, 5, 6, 12, 30\}$. Другие соединения приводят к углам, не меньшим развёрнутого. Поэтому угол паркетного многоугольника равен углу правильного m-угольника, $m \in M$. Пусть паркетный k-угольник обладает x_m углами такими, как углы правильного m-угольника.

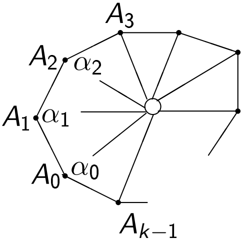
Доказательство классификационной теоремы

Соединяя правильные 3-, 4- и 5-угольники, можно получить только углы такие, как у правильного m-угольника, $m \in M$, $M = \{3, 4, 5, 6, 12, 30\}$. Другие соединения приводят к углам, не меньшим развёрнутого. Поэтому угол паркетного многоугольника равен углу правильного m-угольника, $m \in M$. Пусть паркетный k-угольник обладает x_m углами такими, как углы правильного m-угольника. Каждую вершину A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ выпуклого k-угольника



Доказательство классификационной теоремы

Соединяя правильные 3-, 4- и 5-угольники, можно получить только углы такие, как у правильного m-угольника, $m \in M$, $M = \{3, 4, 5, 6, 12, 30\}$. Другие соединения приводят к углам, не меньшим развёрнутого. Поэтому угол паркетного многоугольника равен углу правильного m-угольника, $m \in M$. Пусть паркетный k-угольник обладает x_m углами такими, как углы правильного m-угольника. Каждую вершину A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ выпуклого k-угольника



k-угольник $A = A_0A_1A_2\cdots A_{k-1}$

k-угольник $A = A_0 A_1 A_2 \cdots A_{k-1}$

$A = A_0 A_1 A_2 \cdots A_{k-1}$, рис. 2,

k-угольник $A = A_0A_1A_2\cdots A_{k-1}$

$A = A_0A_1A_2\cdots A_{k-1}$, рис. 2, соединим отрезками с некоторой точкой, поставленной внутри этого k-угольника. Полученное разбиение на треугольники показывает, что сумма углов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ k-угольника A равна $\pi k - 2\pi = \pi(k-2)$. Учитывая введённые обозначения, приходим к равенству

$$\sum_{m\in M}\left(\pi - \frac{2\pi}{m}\right)x_m = \pi(k-2).$$

Разделив обе части на π, получаем

$$\sum_{m\in M}\frac{m-2}{m}x_m = k-2.$$

k-угольник $A = A_0A_1A_2\cdots A_{k-1}$

$A = A_0A_1A_2\cdots A_{k-1}$, рис. 2, соединим отрезками с некоторой точкой, поставленной внутри этого k-угольника. Полученное разбиение на треугольники показывает, что сумма углов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ k-угольника A равна $\pi k - 2\pi = \pi(k-2)$. Учитывая введённые обозначения, приходим к равенству

$$\sum_{m\in M}\left(\pi - \frac{2\pi}{m}\right)x_m = \pi(k-2).$$

Разделив обе части на π, получаем

$$\sum_{m\in M}\frac{m-2}{m}x_m = k-2.$$

Теперь ясно, что каждый тип паркетного k-угольника A, $k = 3, 4, \ldots, 30$, можно записать в виде решения системы уравнений

Системы линейных диофантовых уравнений

$$\begin{cases} 10x_3 + 15x_4 + 18x_5 + 20x_6 + 25x_{12} + 28x_{30} = 30(k-2), \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_{12} + x_{30} = k. \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, решением каждой системы уравнений (1) служит упорядоченная шестёрка неотрицательных целых чисел. Будем её записывать компактно. Например, решению $[2, 0, 1, 0, 0, 4]$, в котором $x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = x_{12} = 0, x_{30} = 4$, соответствует запись $[3^2, 5, 30^4]$. Она скорее шестёрки сообщает, что если для этого решения найдётся паркетный 7-угольник, то у него два угла таких, как у правильного треугольника, один угол равен углу правильного 5-угольника и четыре угла равны углу правильного 30-угольника. Чтобы не рассматривать типы многоугольников, которые не могут быть паркетными, на решения систем (1) наложим расположенные

1)В решении есть число 30 и отсутствует число 5.
2)Решение содержит число 30 и в нём отсутствуют числа 3 и 6.
3)Вместе с числом 5 решение не содержит числа 4 или 12.
4)Если в решении присутствует число 5, то чётным должно быть и количество чисел 6 и количество чисел 30.
5) Решение не содержит более четырёх чисел 30.
6) Если в решении есть числа 4, то их количество нечётное.

1)В решении есть число 30 и отсутствует число 5.
2)Решение содержит число 30 и в нём отсутствуют числа 3 и 6.
3)Вместе с числом 5 решение не содержит числа 4 или 12.
4)Если в решении присутствует число 5, то чётным должно быть и количество чисел 6 и количество чисел 30.
5) Решение не содержит более четырёх чисел 30.
6) Если в решении есть числа 4, то их количество нечётное.

```
s:=[[3,0,0,0,0,0]];                              for k in [4..29] do
for x3 in [0..k] do k2:=k-x3;
for x4 in [0..k2] do k3:=k2-x4;
for x5 in [0..k3] do k4:=k3-x5;
for x6 in [0..k4] do k5:=k4-x6;
for x12 in [0..k5] do k6:=k5-x12;
for x30 in [0..k6] do #Print(20*x3+15*x4+18*x5+20*x6+25*x12+28*x30,"\n");
if x3+x4+x5+x6+x12+x30=k and 10*x3+15*x4+18*x5+20*x6+25*x12+28*x30=30*(k-2)
 and not (x30 <> 0 and x5 = 0)
 and not (x30 <> 0 and x3 = 0 and x6 = 0)
 and not (x5 <> 0 and (x4 <> 0 or x12 <> 0))
 and not (x5 <> 0 and (not(x6/2 in Integers)) or (not(x30/2 in Integers)))
 and not (x30 > 4)
 and not (x4 <> 0 and not(x4/2 in Integers))
then Add(s,[x3,x4,x5,x6,x12,x30]); fi; od; od; od; od; od; od; od;
```

Второе доказательство классификации типов паркетоугольников

Алгоритмизируем процесс поиска выпуклых r-паркетных многоугольников путём соединения их правильных частей. С появлением в ходе вычислений r-паркетного многоугольника сравниваем его тип с уже найденными. Поскольку типов паркетных многоугольников конечное число, то в результате будут выписаны все типы и для каждого построено не менее одного представителя. Получили ещё одно, отличающиеся от записанного в [1], классификационное доказательство.

Равнорёберные паркетогранники

Только четырём из 23 типов паркетных многоугольников соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

Равнорёберные паркетогранники

Только четырём из 23 типов паркетных многоугольников соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

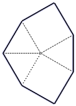


Figure: 7c

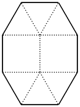


Figure: 8c

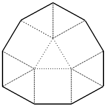


Figure: 9b

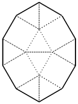


Figure: 10b

Равнорёберные паркетогранники

Только четырём из 23 типов паркетных многоугольников соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

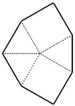


Figure: 7*c*

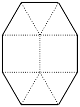


Figure: 8*c*

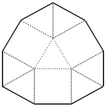


Figure: 9*b*

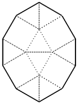


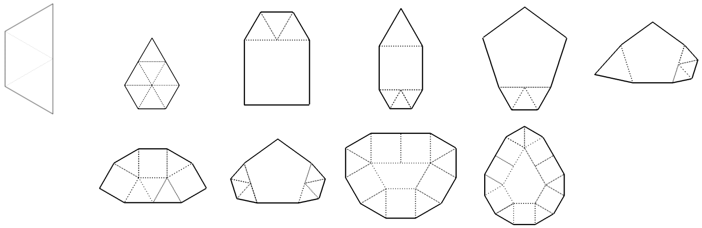
Figure: 10*b*

Гипотеза, 2018

Четыре призмы, в основаниях которых лежат паркетные многоугольники типов $(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$, $(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$, $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$ и $(6, 12^4, 6, 12^4)$, и только они являются равнорёберными паркетогранниками с фиктивными вершинами.

Типы неравносторонних паркетных многоугольников

Типы неравносторонних паркетных многоугольников



Алексеев М. Н.(2018):

Если стороны паркетного многоугольника равны, то он обладает одним из следующих типов: $3a(3^3)$; $4b(3,6,3,6)$; $4c(4^4)$; $5b(3,12,4^2,12)$; $6a(3,12^2,3,12^2)$; $6b(3,30,5^3,30)$; $6d(6^6)$; $7b(3,30,5,30,3,30^2)$; $7c(4,12,6,12,4,12^2)$; $8c(6^2,12^2,6^2,12^2)$; $9b(6,12^2,6,12^2,6,12^2)$; $10b(6,12^4,6,12^4)$; $12a(12^{12})$.

Представления групп симметрий

Представления групп симметрий

Группа $Aut^{+}\square$ поворотов квадрата, рассматриваемого в пространстве как двугранник (диэдр), обозначена в [2] как $[2,4]^{+}$ содержит подгруппу $Aut^{+}\ \sqsubset\!\sqsupset$ поворотов неквадратного прямоугольника $[2,2]^{+}$. Пользуясь линейным представлением этих групп

$$[2,2]^{+} \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle <$$

$$< \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong [2,4]^{+},$$

строим правильные k-угольные части, $k = 3, 4, 5$, r-паркетных многоугольников, действуя на их вершину (диэдральной) группой симметрий правильного k-угольника.

Компьютерные модели групп симметрий

[2] https://drive.google.com/drive/folders/1zJTN2qZhrxDZ-2SO7PRozgkliwImlsn-?usp=sharing

Компьютерные модели групп симметрий

Из примера представителей типа (4^4) в виде квадрата и неквадратного прямоугольника ясно, что как правило r-паркетный многоугольник обладает группой симметрий вообще говоря большей, чем такая группа однотипного ему паркетного многоугольника, составленного не только из правильных многоугольников.

[2] https://drive.google.com/drive/folders/1zJTN2qZhrxDZ-2SO7PRozgkliwlmlsn-?usp=sharing

Компьютерные модели групп симметрий

Из примера представителей типа (4^4) в виде квадрата и неквадратного прямоугольника ясно, что как правило r-паркетный многоугольник обладает группой симметрий вообще говоря большей, чем такая группа однотипного ему паркетного многоугольника, составленного не только из правильных многоугольников. Конечные группы симметрий можно найти в публикации [2], где правее обозначения группы расположено название и в большинстве случаев описан многогранник такой группой симметрий или поворотов обладающий.

[2] https://drive.google.com/drive/folders/1zJTN2qZhrxDZ-2SO7PRozgkliwImlsn-?usp=sharing

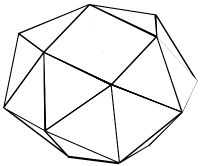
Компьютерные модели групп симметрий

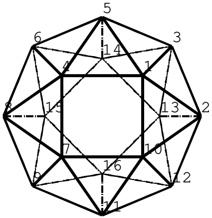
Из примера представителей типа (4^4) в виде квадрата и неквадратного прямоугольника ясно, что как правило r-паркетный многоугольник обладает группой симметрий вообще говоря большей, чем такая группа однотипного ему паркетного многоугольника, составленного не только из правильных многоугольников. Конечные группы симметрий можно найти в публикации [2], где правее обозначения группы расположено название и в большинстве случаев описан многогранник такой группой симметрий или поворотов обладающий. Завершается описание каждой группы именем файла с её компьютерной моделью для системы компьютерной алгебры GAP. Утраченная ссылка в интернете на этот файл папки $E3$ заменена[2].

[2] https://drive.google.com/drive/folders/1zJTN2qZhrxDZ-2SO7PRozgkliwImlsn-?usp=sharing

Плосконосая квадратная антипризма M_{28}

Плосконосая квадратная антипризма M_{28}





Плосконосая квадратная антипризма M_{28}

18 июня 2021 М. Костэрс рассказал[2] как была упрощена следующая

Теорема. Если a — корень многочлена

$$9x^3 + 3\sqrt{3}\left(5-\sqrt{2}\right)x^2 - 3\left(5-2\sqrt{2}\right)x - 17\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\sqrt{3},$$

$$a \approx 0,8235,\;\; h = \frac{\sqrt{2}+8+2\sqrt{3}\,a - 3\left(2+\sqrt{2}\right)a^2}{4\sqrt{3}\sqrt{1-a^2}},$$

то множество вершин плосконосой квадратной антипризмы с ребром 2 является объединением орбит точек $(1,1,h)\,,\left(1+\sqrt{3}\,a, 0, h-\sqrt{3}\sqrt{1-a^2}\right)$ при действии на них группой (диэдра 8-го порядка), порождённой поворотами вокруг оси аппликат на прямой угол и вокруг прямой, проходящей под углом $22,5^\circ$ к оси абсцисс перпендикулярно оси аппликат, на угол 180°, [3].

Многочлен М. Костэрс

Многочлен М. Костэрс имеет вид $2c^6 + 11c^4 + 4c^2 - 1$. Нужный для нахождения координат вершин корень $c \approx 0,4111$. Видеозапись семинара 18 июня 2021 г. доступна[2].

[2] https://drive.google.com/drive/folders/1vmRUZUn7YrqME93Yg-XB6Ue07COCaPKe?usp=sharing

Вопрос

Каковы все типы паркетогранников?

[3] Н. В. Маслова, И. Н. Белоусов, Н. А. Минигулов, Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, Тр. ИММ УрО РАН, 26, № 3, 2020, 275–285.

Вопрос

Каковы все типы паркетогранников?

Вопрос

Верно ли, что существует только четыре равнореберных паркетогранника, обладающих граневыми фиктивными вершинами?

[3] Н. В. Маслова, И. Н. Белоусов, Н. А. Минигулов, Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, Тр. ИММ УрО РАН, 26, № 3, 2020, 275–285.

Вопрос

Каковы все типы паркетогранников?

Вопрос

Верно ли, что существует только четыре равнореберных паркетогранника, обладающих граневыми фиктивными вершинами?

Вопрос

Каковы все разбиения икосаэдра на паркетогранники?

[3]

[3] Н. В. Маслова, И. Н. Белоусов, Н. А. Минигулов, Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, Тр. ИММ УрО РАН, 26, № 3, 2020, 275–285.

Вопрос

Каковы все выпуклые соединения правильногранных пирамид с одинаковыми рёбрами с условием, что рёбро каждого соединения либо такое как у пирамид, либо вдвое длинее?

Цитированная литература

- А. В. Тимофеенко, О. А. Табинова, О классификации паркетных многоугольников. *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева.*, **23**: 1 (2013), 216–219. https://www.elibrary.ru/download/elibrary_18916660_54197671.pdf
- А. В. Тимофеенко, От платоновых тел к паркетогранникам через символьное программирование и прототипирование. *В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва.* Тула, 2021, 421–426. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46539599
- А. В. Тимофеенко, Несоставные многогранники, отличные от тел Платона и Архимеда, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:2

СПАСИБО за внимание!