Проблема Ферма–Штейнера в гиперпространствах

Галстян Арсен Хачатурович,
аспирант (МГУ им. М.В. Ломоносова, мехмат, каф. ДГиП)

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. Тужилин Алексей Августинович

2023 г.

Примеры геометрической оптимизации

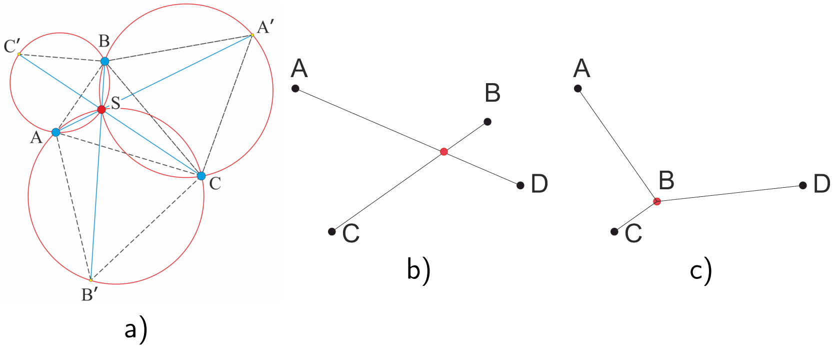

Рис.: a) Точка Торричелли; b) Точка, реализующая минимум суммы расстояний до четырёх заданных, образующих выпуклый четырёхугольник; c) ..., образующих невыпуклый четырёхугольник.

Всюду далее X — это конечномерное нормированное пространство и $\mathcal{H}(X)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа d_H.
Пусть $a \in X$, тогда

$$B_r(a) := \{x : |xa| \le r\}; \ \ U_r(a) := \{x : |xa| < r\}.$$

Пусть $A \in \mathcal{H}(X)$, тогда

$$B_r(A) := \{x : \min_{a \in A} |xa| \le r\}; \ \ U_r(A) := \{x : \min_{a \in A} |xa| < r\}.$$

Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$, тогда по определению

$$d_H(A, B) = \min\{r : A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}.$$

Иллюстрация расстояния по Хаусдорфу

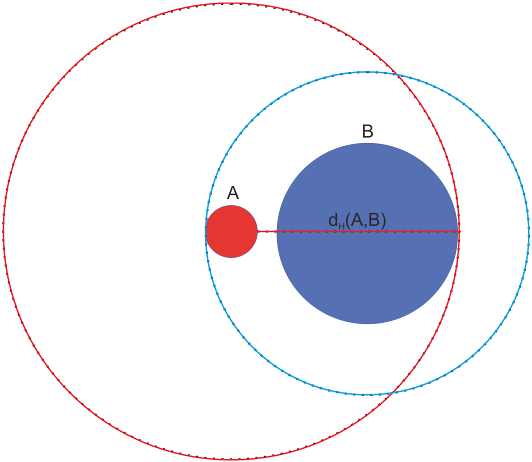

Рис.: Расстояние по Хаусдорфу между двумя множествами A и B.

Задача (проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$): Пусть дан конечный набор компактов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Требуется найти все компакты K, реализующие минимум функции

$$S(\mathcal{A}, K) = \sum_{i=1}^{n} d_H(K, A_i).$$

Множество решений обозначается через $\Sigma(\mathcal{A})$. Известно, что $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, каждый из которых соответствует своему вектору расстояний по Хаусдорфу

$$d = (d_1, \dots, d_n),$$

где d_i — это расстояние Хаусдорфа от A_i до любого компакта из $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Каждый класс решений $\Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит в себе единственный максимальный по включению компакт K_d и некоторое количество минимальных по включению компактов K_λ.

Утверждение (Иванов А.О., Тропин А.М., Тужилин А.А.)

(i) *В ограниченно компактном пространстве* Y *для* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(Y)$ *верно*

$$\Sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset.$$

(ii) $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$K_\lambda \subset K \subset K_d$$

для некоторого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *и максимального компакта* $K_d \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

(iii) *Если* K_d *— максимальный компакт в* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, *то* $K_d = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$.

Примеры в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

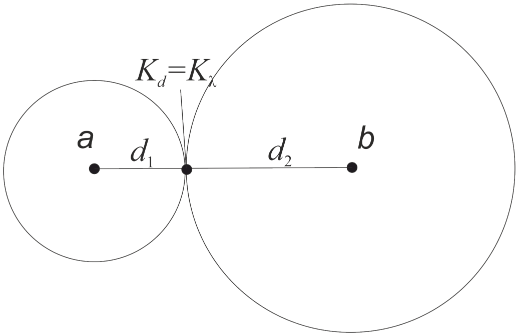

Рис.: Граница из двух компактов $A_1 = \{a\}$ и $A_2 = \{b\}$. Для неё существует континуум классов решений. В каждом классе максимальный компакт K_d состоит из одной точки.

Примеры в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

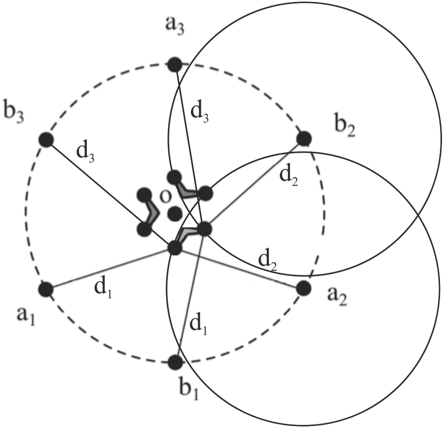

Рис.: Граница из трёх компактов $A_i = \{a_i, b_i\}$. Для неё существует всего три класса решений. В каждом классе минимальный компакт единственен и состоит из 2-х точек.

Ещё немного определений

- Элементы из $\Sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(X)$ будем называть *компактами Штейнера*;
- Набор $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ называется *границей*, а его элементы $A_i \in \mathcal{H}(X)$ мы называем *граничными компактами*;
- Границу, все элементы которой являются конечными подмножествами, назовём *финитной*;
- Границу, все элементы которой являются выпуклыми компактами, назовём *выпуклой*.

Начало блока про финитные границы

Случай финитных границ

Нам понадобятся обозначения:

- Количество точек в граничном компакте A_i обозначим через m_i, т. е. $\#A_i = m_i$;
- Точки в граничных компактах A_i будем обозначать через a_j^i, т.е. $A_i = \{a_j^i\}_{j=1}^{m_i}$;
- Вместо $B_{d_i}(A_i)$ и $B_{d_i}(a_j^i)$ для краткости будем далее писать B^i и B_j^i соответственно;
- Множество $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Любой компакт Штейнера $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит в себе конечный компакт Штейнера $K_f \in \Sigma_d(\mathcal{A})$. В частности, каждый минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ конечен.

Далее будет предложен алгоритм поиска минимальных компактов Штейнера в классе решений.

И ещё немного определений

Определение

Отношением между множествами M и N называется произвольное подмножество декартова произведения $M \times N$.

Определение

Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \widetilde{A}$ следующим образом: $(p, a^i_j) \in R(K)$, если и только если $|p\,a^i_j| \le d_i$. Отношение $R(K)$ назовем *d-каноническим* или просто *каноническим*.

Определение

Пусть дано отношение $R \subset M \times N$. Двудольный граф G_R с множеством вершин $M \sqcup N$, две вершины $m \in M$ и $n \in N$ которого соединены ребром, если и только если $(m, n) \in R$, называется *графом отношения* R.

Алгоритм построения минимального компакта Штейнера

Алгоритм (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

- *Шаг 1. Пусть* $K' \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *— произвольный компакт Штейнера (например,* $K_d = \bigcap_{i=1}^n B^i$*) и* $R' = R(K')$ *— каноническое отношение.*
- *Шаг 2. Для каждой* $a_j^i \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *выберем* $p \in K'$ *такую, что* $(p, a_j^i) \in R'$ *(для разных* a_j^i *выбранные точки могут совпадать); множество выбранных точек обозначим через* K*. В результате мы получим каноническое отношение* $R = R(K)$ *как ограничение* R' *на* $K \times \widetilde{\mathcal{A}}$*. Возьмём граф* G_R *этого отношения.*
- *Шаг 3. Если в* K *содержатся точки, являющиеся вершинами графа* G_R*, смежными лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем её из множества* K*, перестраиваем отношение* $R(K)$ *и граф* G_R*. Повторяем Шаг 3 до тех пор, пока это возможно.*

Итоговый граф G_R после работы алгоритма

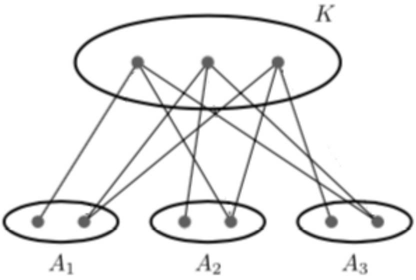

Рис.: Граф G_R, выданный алгоритмом, и построенный минимальный компакт Штейнера K.

Алгоритм построения минимального компакта Штейнера

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Предыдущий алгоритм корректен, результат его работы — минимальный компакт Штейнера.

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

С помощью предыдущего алгоритма может быть построен любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

Оценки на число точек в минимальном компакте

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *верно*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n + 1,$$

а в случае, когда имеется больше одного A_i, *для которого* $m_i > 1$, *выполняется*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n,$$

где n *— количество граничных компактов.*

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Если норма пространства X *строго выпукла и в* K_d *нет изолированных точек, то*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n.$$

Определение точек сцепки

В следующих определениях граница $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ произвольна, то есть не обязательно финитна.

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *дискретной точкой компакта* A_i *для вектора* $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \dots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$. Множество всех дискретных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in \mathcal{A}$ обозначим через $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{j} D_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d$ — вектор решения для границы $\mathcal{A}$ то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$.

Поэтому для $\widetilde{d} = d$ имеем $\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \# B_{d_i}(a) \cap K_d$.

Определение точек сцепки

Введём ещё некоторые обозначения. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{d}_j \geq 0$ для всех j. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$;
- $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i}) := \bigcup_{p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}} \mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$;
- $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}) := \bigcup_{i} \mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i})$.

Определение точек сцепки

Определение

Множество $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Каждую точку из $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$ будем называть *точкой сцепки* или *hook point*.

Определение

Множество $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с граничным компактом* A_i.

Определение точек сцепки

Определение

Множество $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}})$ будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с границей* $\mathcal{A}$.

Также напомним, что если $\widetilde{d} = d$ — вектор решения для границы то для $p \in D_d^{A_i}$ верно

$$\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d.$$

Далее, где будет ясно, о какой границе $\mathcal{A}$ и о каком векторе $\widetilde{d}$ идёт речь, в обозначении множества дискретных точек верхний индекс $\mathcal{A}$ и нижний индекс $\widetilde{d}$ будут опускаться, а именно, $\boldsymbol{D_{\widetilde{d}}^{A_i}}$ **и** $\boldsymbol{D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}}$ **будут заменяться на** $\boldsymbol{D^i}$ **и** $\boldsymbol{D}$.

Напомним, что векторы решений обозначаются в через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

Теорема о существовании точек сцепки

Все результаты далее в блоке про финитные границы формулируются для пространств X со строго выпуклой нормой.

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любой финитной границы $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ существует такая $a^i_j \in A_i$, что $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) \neq \emptyset$.

Следствие (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любого $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ выполняется: $\partial K_d \cap K \neq \emptyset$.

Критерий единственности минимального компакта Штейнера в классе решений

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a_j^i такая, что $\mathrm{HP}(a_j^i, D^i) = \{p\}$.

Конец блока про финитные границы

Обобщение концепции множества сцепки на произвольные границы

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *далёкой точкой компакта* A_i *для вектора* $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in \mathcal{A}$ обозначим через $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}} = \bigcup_j F_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d$ — вектор решения, то

$$U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(\mathcal{A})$.

Обобщение концепции множества сцепки на произвольные границы

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *неплотной точкой компакта* A_i *для вектора* $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\operatorname{Int}\bigl(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\bigr) = \emptyset$.

Множество всех неплотных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in \mathcal{A}$ обозначим через $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $L_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}} = \bigcup_j L_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Аналогично, если $\widetilde{d} = d$ — вектор решения, то

$$\operatorname{Int}\Bigl(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\Bigr) = \operatorname{Int}\Bigl(B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j)\Bigr) = \operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr),$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(\mathcal{A})$.

О совпадении понятий

Замыкание множества $M \subset X$ всюду далее будем обозначать через $\operatorname{Cl} M$.

Утверждение (Галстян А.Х.)

Если $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$, *то все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Следствие (Галстян А.Х.)

Если $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$ *и граница* $\mathcal{A}$ *выпукла, то все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Утверждение (Галстян А.Х.)

Если граница $\mathcal{A}$ *финитна и норма пространства* X *строго выпукла, то все неплотные точки совпадают с дискретными.*

О совпадении понятий

Следствие (Галстян А.Х.)

Если граница $\mathcal{A}$ финитна и норма пространства X строго выпукла, то всегда найдётся по крайней мере один граничный компакт, содержащий неплотную точку.

Теорема (Галстян А.Х.)

Если граница $\mathcal{A}$ финитна, норма пространства X строго выпукла и $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то неплотные, дискретные и далёкие точки совпадают друг с другом.

Случай границы без далёких точек [Тужилин А. А.]

Финитная граница

$\mathcal{A} = \{A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\}$ в $\mathbb{R}^2$:

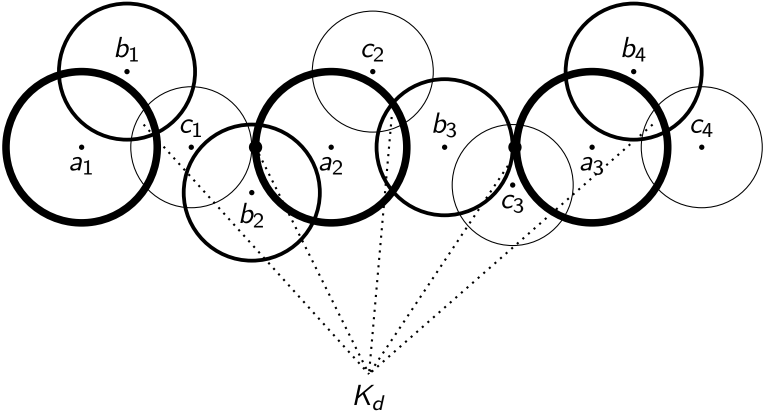

Рис.: Все неплотные точки совпадают с дискретными, но далёких нет.

О непрерывности одной операции с выпуклыми компактами

Теорема (Галстян А.Х.)

Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X. Тогда

$$f\colon \big[|AB|, +\infty\big) \to \mathcal{H}(X),$$

$$f\colon r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывна.

О непрерывности функции f

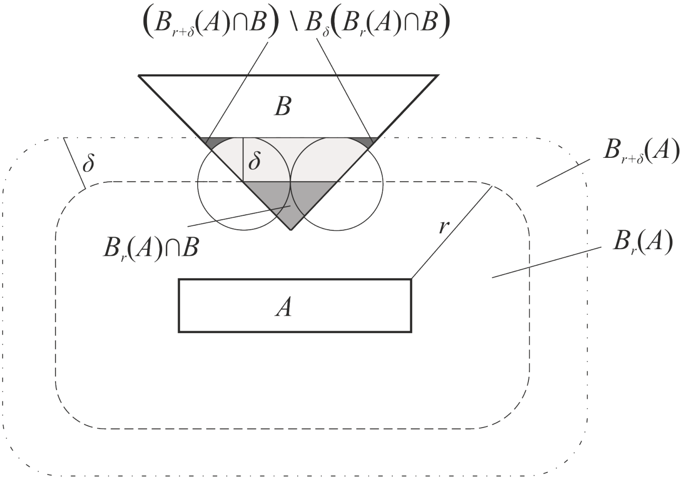

Рис.: Пример, когда $d_H\big(B_r(A) \cap B, B_{r+\delta}(A) \cap B\big) > \delta$.

О непрерывности функции f

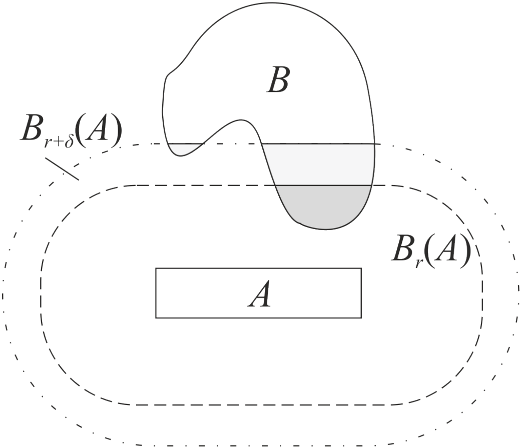

Рис.: Пример, когда f не является непрерывным в случае невыпуклых компактов.

Начало блока про выпуклые границы

Случай выпуклой границы

Теорема (Галстян А.Х.)

Для любого класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ существует граничный компакт A_i, содержащий далёкую точку.

О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Введём ряд обозначений:
Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{d_j} \geq 0$ для всех j. Положим также, что $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ — один из трёх типов точек $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$, $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ или $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$, то есть $Y_{\widetilde{d}}^{A_i} \in \{F_{\widetilde{d}}^{A_i}, L_{\widetilde{d}}^{A_i}, D_{\widetilde{d}}^{A_i}\}$ и $Y_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}} \in \{F_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}, L_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}, D_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}\}$. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i}) := B_{\widetilde{d_i}}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d_j}}(A_j)$, где $p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$;
- $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A_i}) := \bigcup\limits_{p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}} \mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$;
- $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{\mathcal{A}}) := \bigcup\limits_{i} \mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$.

О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Подчеркнём, что в обозначении $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ параметр $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F_{\widetilde{d}}^{A_i}$ имеем $U_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ верно $\mathrm{Int}\Big(B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\Big) = \emptyset$; а при $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ справедливо $\# B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Теорема (Галстян А.Х.)

Пусть все d_i положительны. Тогда для любого номера i существует точка $p \in \mathrm{HP}(F_d^{\mathcal{A}})$ такая, что $p \in \mathrm{HP}(F_d^{A_i})$ или $p \in \partial B_{d_i}(A_i)$.

Вопрос устойчивости

Введём отображение $\mathrm{Conv} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.
Положим

$$\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}} := \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}.$$

Финитную границу $\mathcal{A}$ назовём **устойчивой**, если

$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} S(\mathcal{A}, K) = \min_{K \in \mathcal{H}(X)} S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K).$$

Сохранение векторов решений

Положим $K_d^{\mathrm{Conv}} := \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$.

Утверждение (Галстян А.Х.)

Для всех A_i верно

$$d_H(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}) \le d_i,$$

где $d_i = d_H(A_i, K_d)$.

Сохранение векторов решений

Следствие (Галстян А.Х.)

Если граница $\mathcal{A}$ неустойчива, то

$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} S(\mathcal{A}, K) > \min_{K \in \mathcal{H}(X)} S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K).$$

Следствие (Галстян А.Х.)

Если граница $\mathcal{A}$ устойчива, то K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера для $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$.

Первое достаточное условие неустойчивости

Следствие (Галстян А.Х.)

Пусть граница $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *финитна и* d *— вектор решения для границы* $\mathcal{A}$. *Если для всех* i *верно* $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ *или для всех* i *верно* $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, *то граница* $\mathcal{A}$ *неустойчива.*

Второе достаточное условие неустойчивости

Следствие (Галстян А.Х.)

Пусть граница $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ *финитна. Пусть также все* d_i *положительны для некоторого вектора решения* d *для границы* $\mathcal{A}$. *Если существует номер* s *такой, что* $\mathrm{HP}\left(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\right) = \emptyset$ *и для любой* $p \in \mathrm{HP}\left(F_d^{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}}\right)$ *верно* $p \notin \partial B_{d_s}\left(\mathrm{Conv}(A_s)\right)$, *тогда граница* $\mathcal{A}$ *неустойчива.*

Третье достаточное условие неустойчивости

Нам понадобятся следующие условия.

Условия

(1) *Норма пространства X строго выпукла;*

(2) *Граница $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна;*

(3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \operatorname{Int} K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, *где d — вектор решения для границы $\mathcal{A}$;*

(4) $d_s > 0$;

(5) $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(D_d^{\mathcal{A}}) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

Определение

Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ назовём *погружённым*, если $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^{\mathcal{A}}) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.

Лемма (Галстян А.Х.)

Пусть все пункты (1)–(5) *условий выше выполнены и минимальный компакт Штейнера* $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *является погружённым. Тогда*

$$\delta_1 := \Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0.$$

Лемма (Галстян А.Х.)

Пусть все пункты (1)–(5) *условий выше выполнены, тогда*

$$\delta_2 := \Big| \mathrm{Conv}(A_s) \ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \Big| > 0.$$

Третье достаточное условие неустойчивости

Введём обозначение: $S_{\mathcal{A}} := \min\limits_{K \in \mathcal{H}(X)} S(\mathcal{A}, K)$.

Теорема (Галстян А.Х.)

Пусть все пункты (1)–(5) *условий выше выполнены. Тогда граница* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *неустойчива. Более того, в таком случае согласно леммам выше выполнено* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$*, значит,* $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$*. Выберем произвольное* $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ *и положим*

$$K = B_{d_s - \delta}(\mathrm{Conv}(A_s)) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{1}$$

Тогда также справедливы следующие неравенства:

$$S_{\mathcal{A}} - S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}} \geq S_{\mathcal{A}} - S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K) \geq S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0. \tag{2}$$

Пример применения достаточного условия

В качестве примера возьмём конфигурацию из работы [1], где $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i.

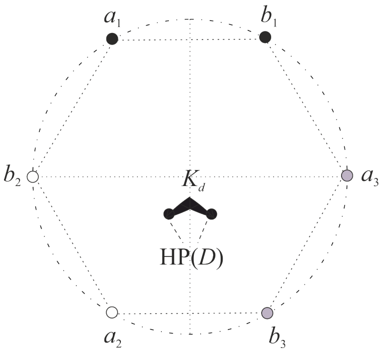

Рис.: Конфигурация из работы [1].

[1] Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. "Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance", 2016.

Пример применения достаточного условия

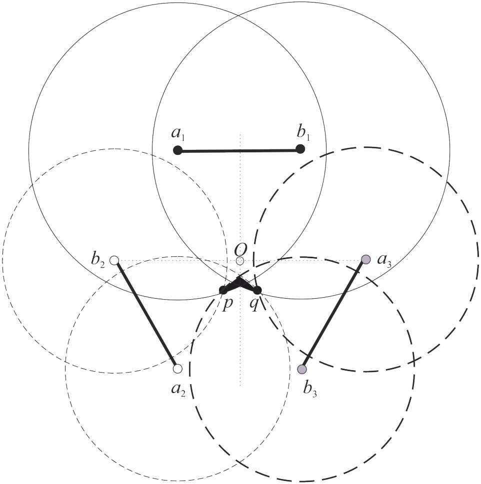

Рис.: Граница $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$ и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Пример применения достаточного условия

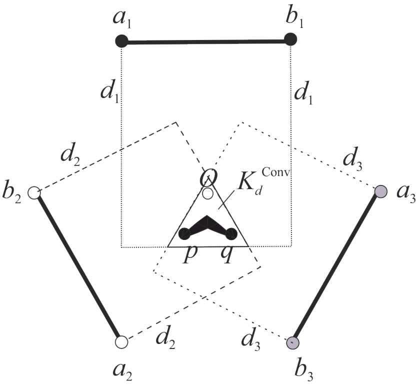

Рис.: $\mathrm{HP}(D) \subset \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}$.

Пример применения достаточного условия

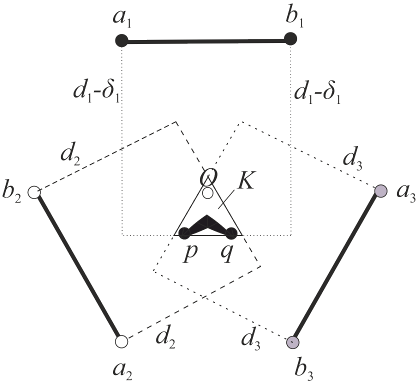

Рис.: $K = B_{d_1-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$.

Пример применения достаточного условия

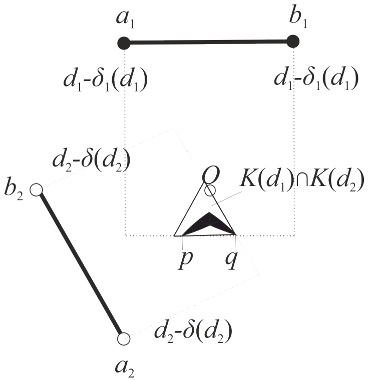

Рис.: $K(d_1) = B_{d_1-\delta(d_1)}\left(\mathrm{Conv}(A_1)\right) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$; $K(d_2) = B_{d_2-\delta(d_2)}\left(\mathrm{Conv}(A_2)\right) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$

Пример применения достаточного условия

В итоге после двух затяжений была получена следующая оценка на уменьшение веса минимальной сети при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{A}} - S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}} &\geq \\
&\geq S(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \geq \\
&\geq \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2) = \\
&= 0.071876\ldots + 0.047130\ldots = 0.119007\ldots.
\end{aligned}
$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!