

Геометрия взаимно полярных звездчатых многогранников и их кривизны

Семинар по Дискретной геометрии и геометрии чисел
под научным руководством Н.П.Долбилина, Н.Г.Мощевитина,
М.Д.Ковалева, И.Х.Сабитова,
23.09.2026

Доклад: Л. А. Антиповой

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор А. Л. Вернер

Выпуклые многогранники

- А. Д. Александров в монографии «Выпуклые многогранники» определил для выпуклых многогранных углов и выпуклых многогранников:
 - кривизну вершины, как разность 2π и полного угла вокруг вершины $\omega = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$;
 - сферическое изображение и площадь сферического изображения. Сферическим изображением вершины выпуклого многогранного угла (или выпуклого многогранника) называется часть единичной сферы, вырезаемая телесным углом, образованным нормалью ко всем опорным плоскостям в данной вершине.

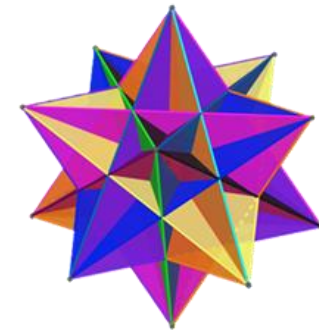
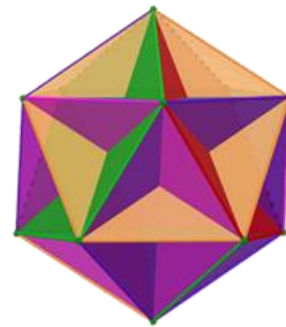
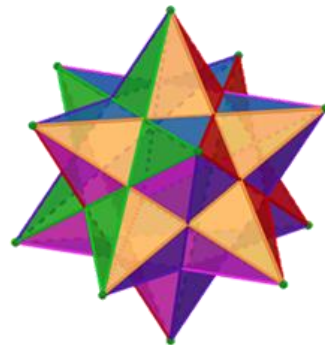
Выпуклые многогранники

- Теорема (А. Д. Александров, 1950 г.) Площадь сферического изображения любой части выпуклого многогранника равна ее кривизне.
- При всякой деформации выпуклого многогранного угла, не нарушающей его выпуклости и не меняющей длин кривых на его поверхности, площадь сферического изображения остается неизменной.

Правильные звездчатые многогранники

И. Кеплер (1619) и Л. Пуансо (1809), определили четыре правильных многогранника с самопересечениями:

- большой звездчатый додекаэдр, малый звездчатый додекаэдр – в работе И. Кеплера,
- большой додекаэдр, большой икосаэдр – в работе Л. Пуансо.



Кеплер И. *Harmonices mundi libri V.* — Lincii Austriae : sumptibus G. Tampachii, excudebat I. Plancus, 1619.

Пуансо Л. *Mémoire sur les polygones et les polyèdres* // *Journal de l'École Polytechnique.* — Paris, 1810. — Vol. 4. — P. 16–49.

Правильные звездчатые многогранники

О. Коши в своей работе «Recherches sur les polyèdres» 1811 года доказал, что не существует других правильных многогранников, кроме пяти платоновых многогранников и четырёх звёздчатых многогранников Кеплера-Пуансо.

Однородные звездчатые многогранники

- Аналогично тому как пополнился класс правильных многогранников телами Кеплера-Пуансо, стал расширяться класс полуправильных архимедовых многогранников.
- В независимых работах Э. Гесса (1878), А. Бадуро (1881), И. Питча (1881), М. Брюкнера (1900) в общем числе описаны более 37 новых однородных невыпуклых многогранников. В. Витхофф (1918) разработал метод построения, который позже стал основным инструментом для систематизации всех однородных многогранников. В 1930 – 1932 годах Коксетер и Миллер открыли 12 ранее не известных однородных многогранников. Независимо от них М. Лонге-Хиггинс и Г. Лонге-Хиггинс в 1942 – 1944 годах нашли 11 (из 12) этих многогранников. В 1947 году Лесавр и Мерсье «переоткрыли» 5 из этих же 12 тел.

Полный перечень однородных многогранников

- В 1954 году вышла фундаментальная статья «Uniform Polyhedra», в которой перечисляются и описываются все известные на тот момент 75 однородных многогранников.
- В 1970 году в работе «Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников» С. П. Сопов предоставил доказательство полноты списка Кокстера однородных многогранников.

Coxeter H.S.M., Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P. Uniform Polyhedra. Phill.Trans. 246A, 401-450 (1954).

Сопов С.П. Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников. Украинский геометрический сборник, выпуск 8, 1970 год, страницы 139-156.

Определение многогранника

Под *многогранником* согласно определению, данному Гарольдом Коксетером в книге *Regular Polytopes* будем понимать совокупность M многоугольников $f_1, f_2, \dots, f_k$ в трёхмерном евклидовом пространстве такую, что:

- 1) $\forall i = 1, \dots, k$ f_i — многоугольник, то есть часть евклидовой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной;
- 2) $\forall i = 1, \dots, k$ если e — произвольная сторона многоугольника f_i , то существует единственный многоугольник f_j , где $j = 1, \dots, k$ и $j \neq i$ для которого e тоже сторона. Многоугольники f_i и f_j в этом случае будем называть смежными по стороне e или просто смежными;
- 3) $\forall i, j = 1, \dots, k$ $\exists f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_s}$ — последовательность многоугольников совокупности M такая, что f_{i_t} и $f_{i_{t+1}}$ — смежные многоугольники для $\forall t = 1, \dots, s - 1$ и $i_1 = i, i_s = j$;
- 4) если A является вершиной одного из многоугольников совокупности M , то существует единственный (с точностью до перестановки и выбора направления обхода) цикл $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$ многоугольников из M , инцидентных вершине A , такой что f_{i_t} и $f_{i_{t+1}}$ — многоугольники, смежные по стороне инцидентной вершине A , для всех $t = 1, \dots, p - 1$ и $f_{i_1} = f_{i_p}$.

Грань многогранника

Если M – многогранник и $f_1, f_2, \dots, f_k$ – многоугольники, определяющие многогранник M , то *гранью многогранника M* , согласно определению данному А. Д. Александровым, назовём всякий поднабор многоугольников $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$ данной совокупности M (возможно состоящий из одного многоугольника), удовлетворяющий свойствам:

- 1. существует плоскость, содержащая все многоугольники данного набора, причём никакой другой многоугольник многогранника M смежный с одним из многоугольников данного набора не принадлежит этой плоскости;
- 2. если $p > 1$, то $\forall m, n = 1, \dots, p \exists f_{i_{j_1}}, f_{i_{j_2}}, \dots, f_{i_{j_r}}$ – последовательность многоугольников набора $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$ такая, что $f_{i_{j_t}}$ и $f_{i_{j_{t+1}}}$ – смежные многоугольники для $\forall t = 1, \dots, p - 1$ и $i_{j_1} = m, i_{j_r} = n$.

Правильная грань многогранника

- *Грань многогранника называется правильной, если она обладает поворотной симметрией конечного порядка.*

То есть грань $G = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ - многогранника M с набором вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется правильной, если существует такая точка O в плоскости этой грани и такое рациональное положительное число p , для которых поворот плоскости грани вокруг точки O на угол равный $\frac{2\pi}{p}$ отображает множество вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$ грани G в себя, причем каждая вершина отображается в смежную с ней вершину, и грань G , как множество точек, инвариантна при этом повороте.

- Центр поворота называется центром грани.

Однородный многогранник

- *Многогранник* называется *однородным* в соответствии с определением Коксетера, если все его грани правильные и группа симметрий самого многогранника транзитивна действует на множестве его вершин.

Развертка многогранника

- Определение (развертка многогранника).

Пусть M – многогранник, заданный совокупностью многоугольников $\{f_i\}_{i=1}^k$,

$\{f_i^*\}_{i=1}^k$ – множество многоугольников, попарно не имеющих общих точек,

$\{g_i\}_{i=1}^k$ – множество движений пространства таких, что $g_i(f_i) = f_i^*$, для всех $i = 1, \dots, k$.

Рассмотрим топологическую сумму $X = \coprod_{i=1}^k f_i^*$.

Для каждой стороны e каждого многоугольника f_i по пункту 2 определения 1 существует единственный многоугольник f_j , имеющий ту же сторону. Пусть $g_i(e) = e_i$ и $g_j(e) = e_j$ стороны многоугольников f_i^* и f_j^* , соответствующие стороне e многоугольников f_i и f_j .

Определим отношение эквивалентности ρ на X , отождествляющее точки сторон $e_i \subset f_i^*$ и $e_j \subset f_j^*$ посредством изометрий g_i и g_j , связывающих сторону e со сторонами e_i и e_j . Пространство $S(M) = X/\rho$ называется *разверткой многогранника M* . Обозначим через $\pi: X \rightarrow S(M)$ естественную фактор-проекцию.

- *Вершиной развертки* называется образ при фактор-проекции π любой вершины любого многоугольника f_i^* .
- *Стороной развертки* называется образ при π любой стороны любого многоугольника f_i^* .

Развертка многогранника

- **Утверждение.** Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех вершин многогранника M , включая плоские вершины, и множеством всех вершин развертки.
- **Утверждение.** Развертка звездчатого многогранника есть двумерному замкнутое многообразие.

Развертка многогранника

- Определение (кривизна точки развертки).

Пусть $S(M)$ развертка многогранника M , построенная как фактор-пространство X/ρ , где $X = \coprod_{i=1}^k f_i^*$ и $\pi: X \rightarrow S(M)$ – фактор-проекция.

Для точки $A \in S(M)$ рассмотрим ее прообраз $\pi^{-1}(A) \subset X$:

- 1) если в $\pi^{-1}(A)$ отсутствуют вершины многоугольников совокупности $\{f_i^*\}_{i=1}^k$, то *кривизну* $\omega(A)$ *в точке* A будем считать равной нулю: $\omega(A) = 0$;
- 2) в противном случае пусть $f_{i_1}^*, f_{i_2}^*, \dots, f_{i_p}^*$ – все те многоугольники, у которых вершина принадлежит $\pi^{-1}(A)$, тогда *кривизной в точке* A назовем число, равное $\omega(A) = 2\pi - \sum_{j=1}^p \alpha_j$, где α_j – радианная мера внутреннего угла многоугольника $f_{i_j}^*$ в вершине, принадлежащей $\pi^{-1}(A)$.

Внутренняя кривизна точки многогранника

- Определение 14 (внутренняя кривизна точки многогранника).

Пусть M — многогранник, заданный совокупностью многоугольников $\{f_i\}_{i=1}^k$, $S(M)$ — развертка многогранника M . Пусть Q — точка многогранника M .

- Если точке Q соответствует некоторая вершина P_Q развертки $S(M)$, то *внутренней кривизной точки Q многогранника M* назовем число $\omega(P_Q)$, равное кривизне точки Q на развертке $S(M)$.
- Если Q не является вершиной ни одного многоугольника совокупности $\{f_i\}_{i=1}^k$, то ее внутренняя кривизна полагается равной 0 (что согласуется с тем, что все соответствующие ей точки развертки имеют нулевую кривизну).

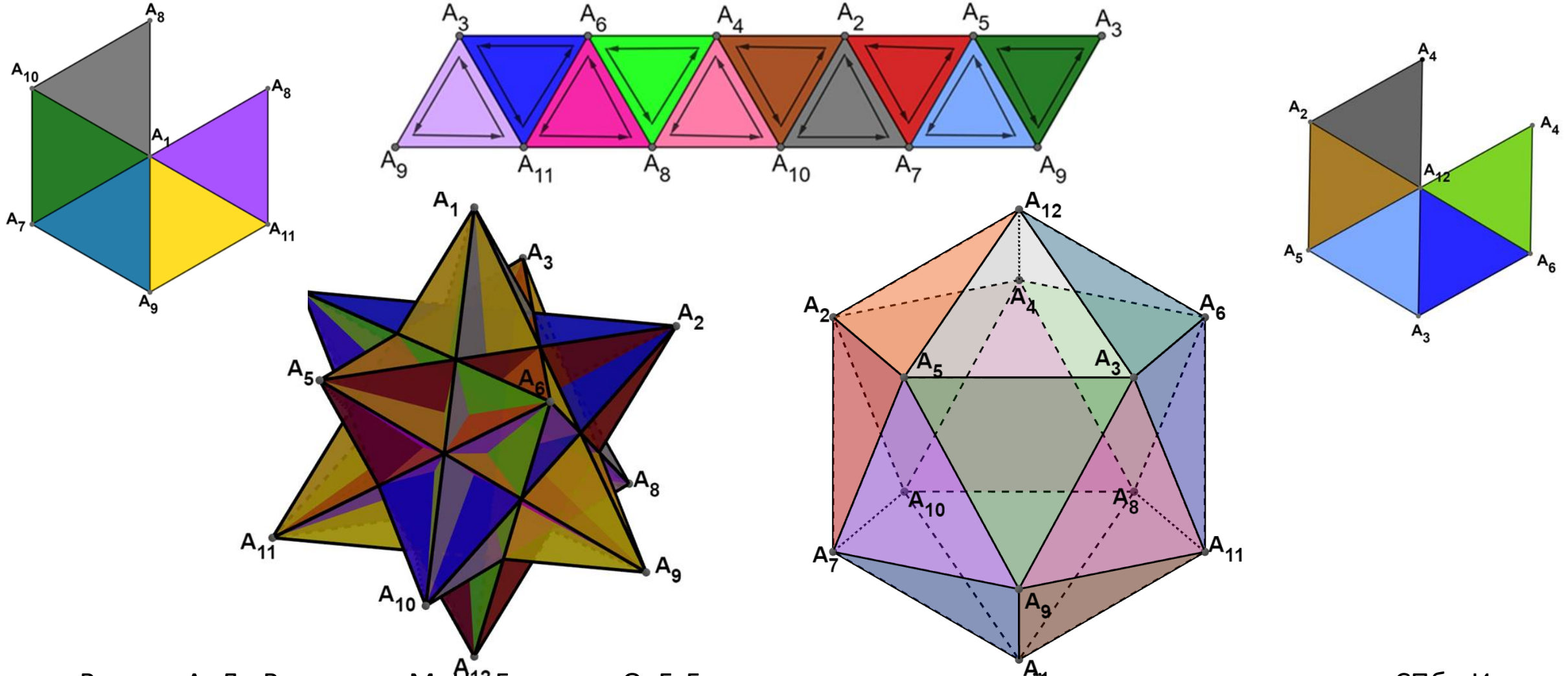
Связь внутренней кривизны произвольного многогранника и его эйлеровой характеристики

- Как показано в работе Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера для двумерного многообразия P с многогранной метрикой (чем и является развертка многогранника) выполнено равенство:

$\omega(P) = 2\pi \chi(P)$, где $\omega(P)$ и $2\pi \chi(P)$ – кривизна и эйлерова характеристика P соответственно.

- Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства / отв. ред. Ю. А. Волков; АН СССР, Ленингр. отд-ние Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – Л.: Наука, 1980. – 288 с.

Изометричность большого икосаэдра и выпуклого икосаэдра с равными ребрами



Вернер А. Л., Васильева М. Н., Голокова О. Г. Геометрия правильных звездчатых многогранников. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. 100с.

Полярный образ многогранного угла в вершине многогранника

- Пусть $M(A)$ – многогранный угол однородного многогранника M в вершине A ,

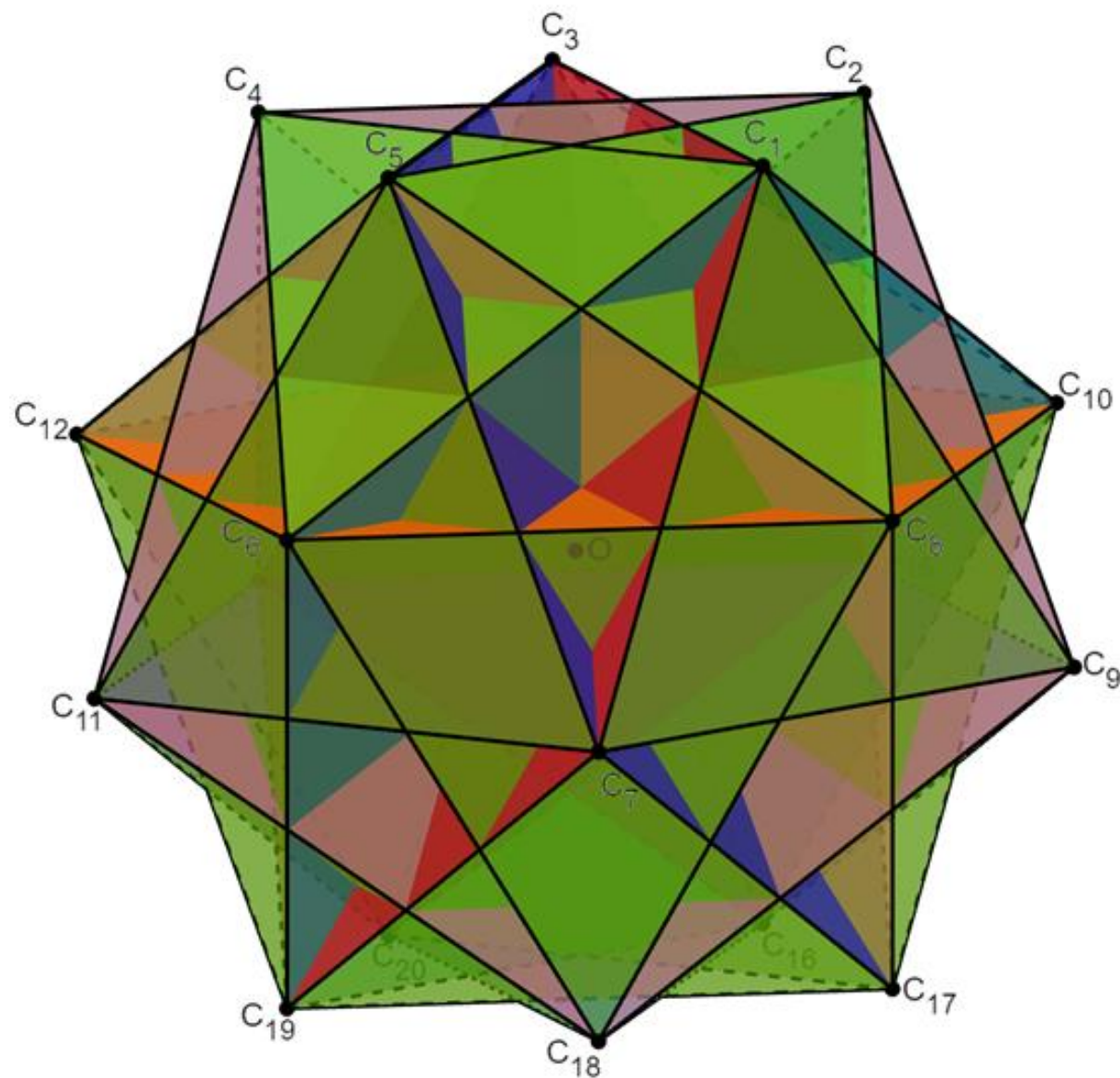
$v_1, v_2, \dots, v_m$ – его грани, занумерованные в циклическом порядке;

S – сфера, описанная около многогранника M .

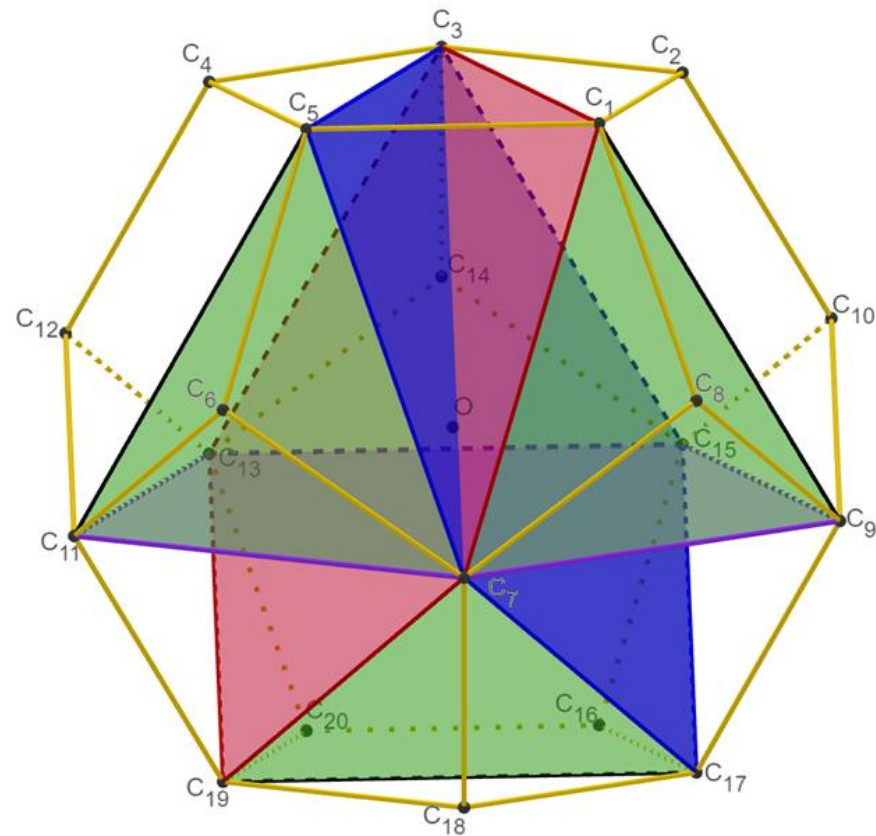
При полярном преобразовании относительно сферы S :

- полярная вершины A – это плоскость α_A касательная к сфере S , содержащая точку A ;
- полюс плоскости грани v_i – это точка P_i , являющаяся пересечением плоскости α_A с 2-лучом грани v_i ;
- совокупность треугольников $P_1AP_2, P_2AP_3, \dots, P_{m-1}AP_m, P_mAP_1$ будем называть *полярным образом многогранного угла $M(A)$* и обозначать $p(A)$.

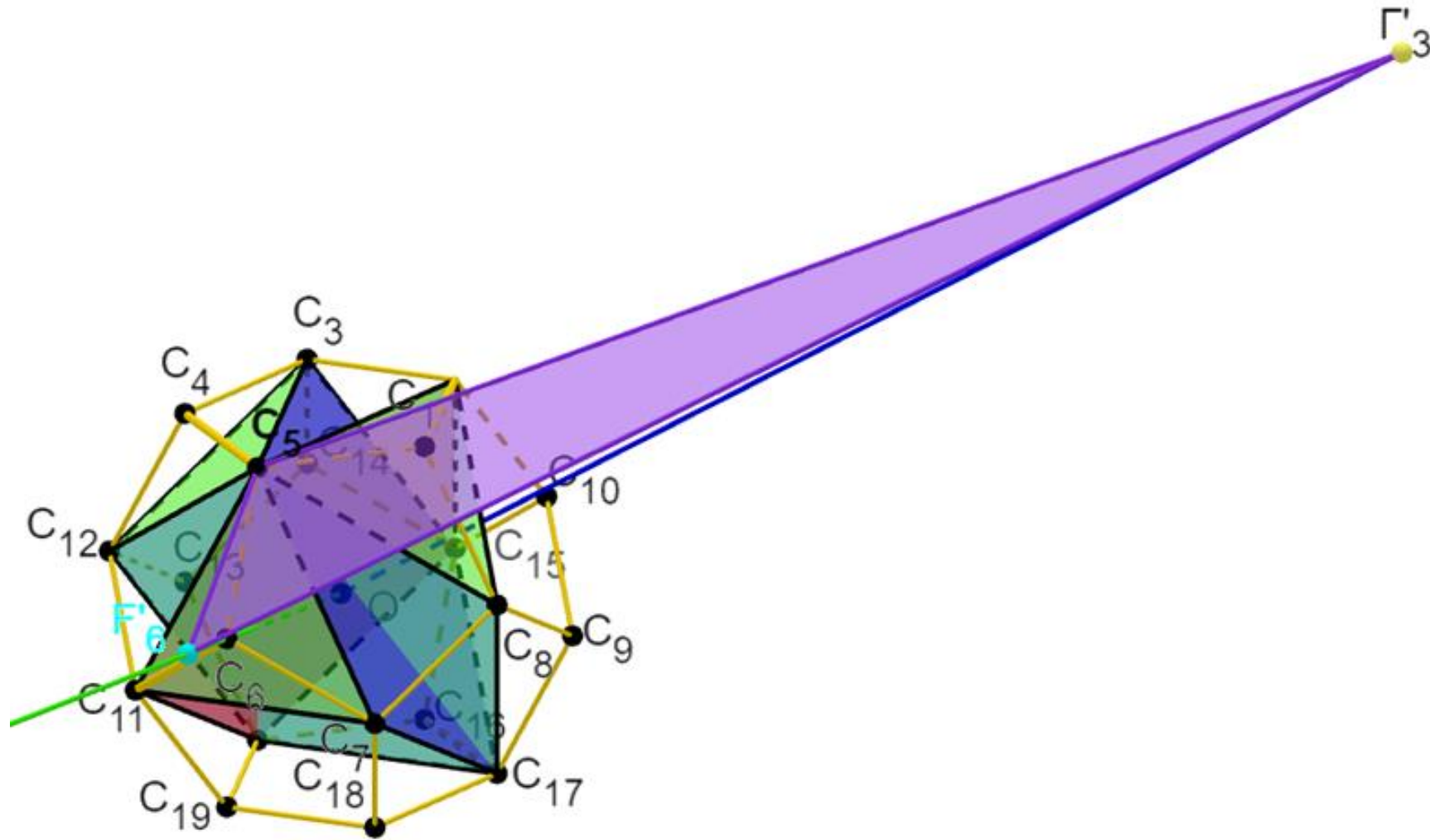
Большой битригональный икосододекаэдр



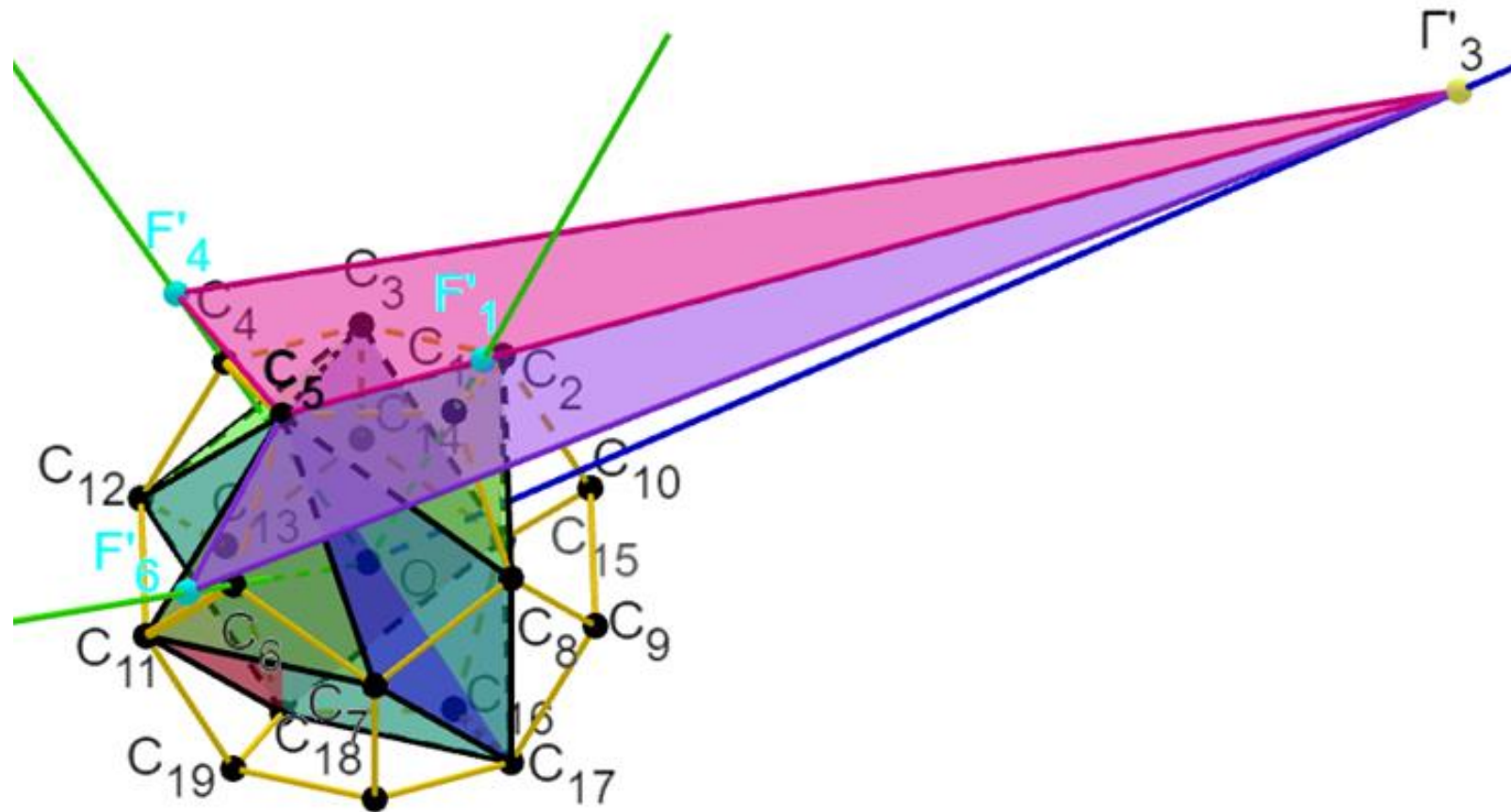
Многогранный угол ББТИД в вершине C_7



Три треугольника $f_6 = C_5C_7C_{11}$, $f_8 = C_1C_7C_9$, $f_{18} = C_7C_{17}C_{19}$ и три пятиугольника $\Gamma_3 = C_5C_3C_{15}C_{17}C_7$, $\Gamma_6 = C_1C_3C_{13}C_{19}C_7$, $\Gamma_{12} = C_{11}C_{13}C_{15}C_9C_7$, сходящиеся в вершине C_7

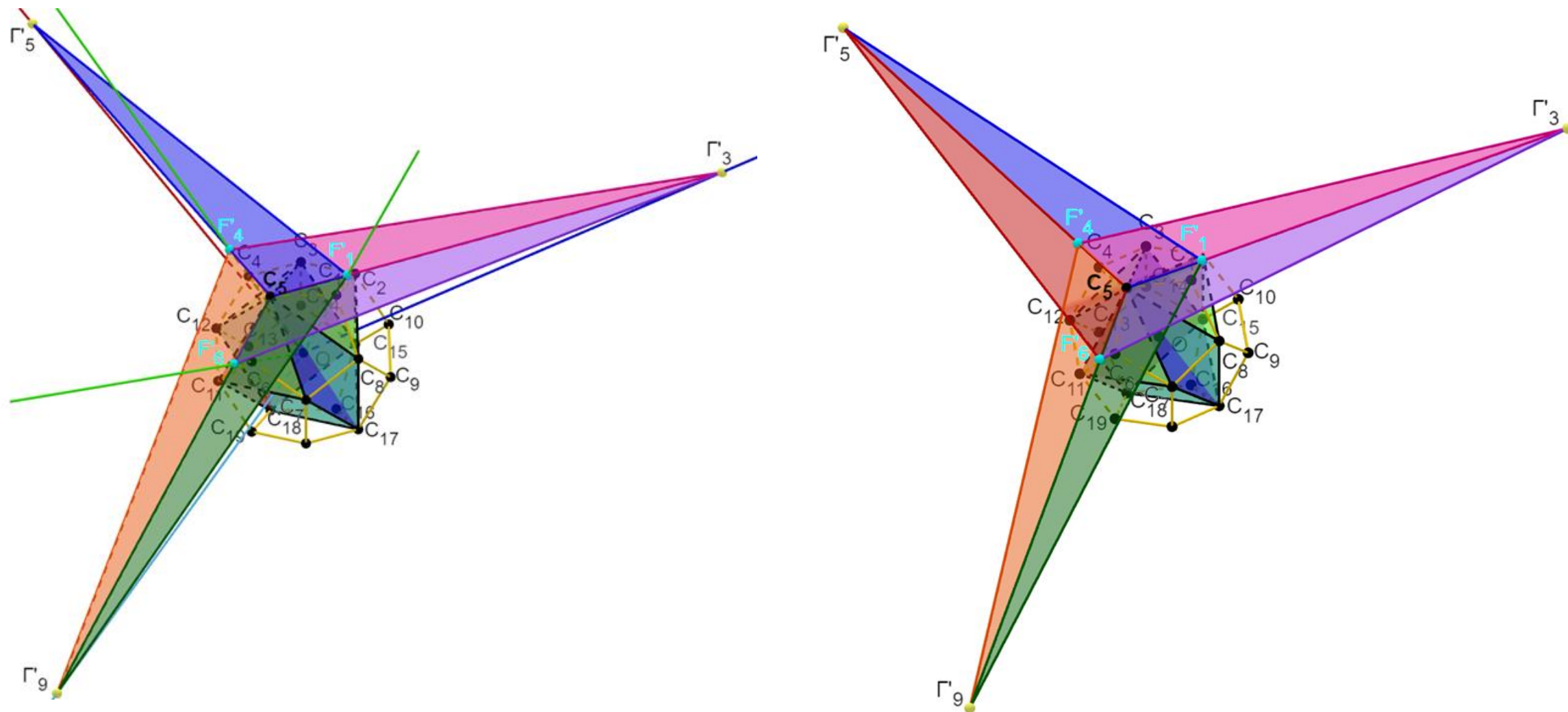


Две смежные грани ББТИД: треугольная грань $f_6 = C_5C_7C_{11}$ и пятиугольная грань $g_3 = C_5C_3C_{15}C_{17}C_7$, их полярные образы – точки F'_6 и Γ'_3 , соответственно, и треугольник $F'_6C_5\Gamma'_3$ – один из шести треугольников, составляющих полярный образ многогранного угла в вершине C_5 ББТИД



Треугольник $F'_6 C_5 \Gamma'_3$. Две смежные грани ББТИД: пятиугольная грань $g_3 = C_5 C_3 C_{15} C_{17} C_7$ и треугольная грань $f_4 = C_5 C_3 C_{12}$, их полярные образы – точки Γ'_3 и F'_4 соответственно, и треугольник $\Gamma'_3 C_5 F'_4$, второй из шести треугольников, составляющих полярный образ многогранного угла в вершине C_5 ББТИД

Построение полярного образа многогранного угла в вершине ББТИД



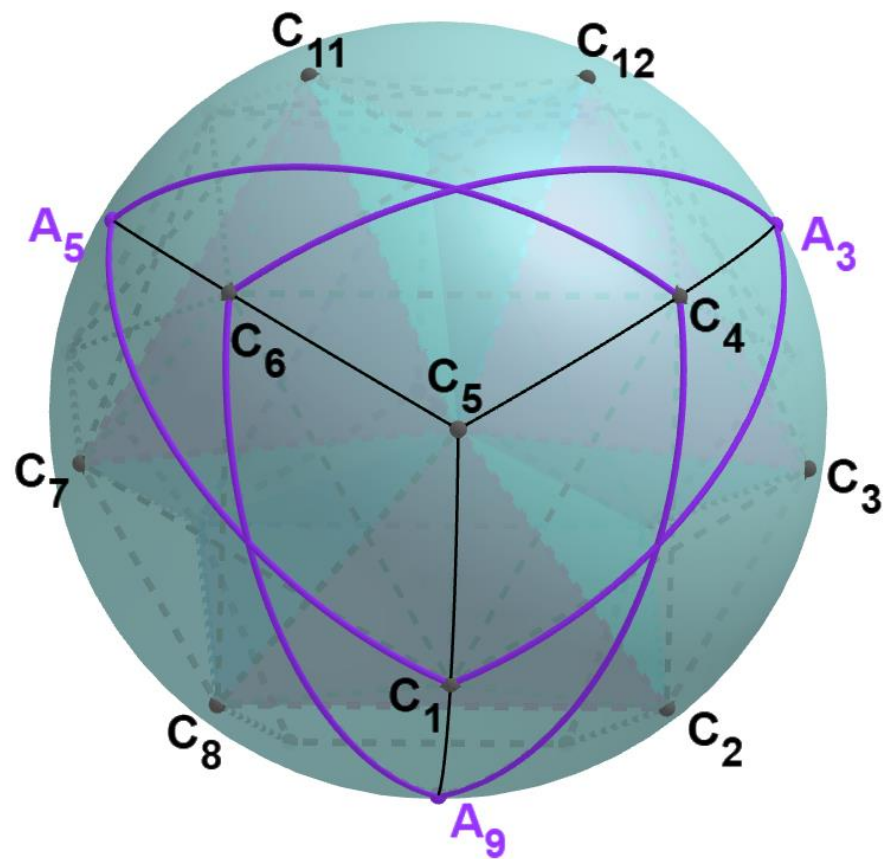
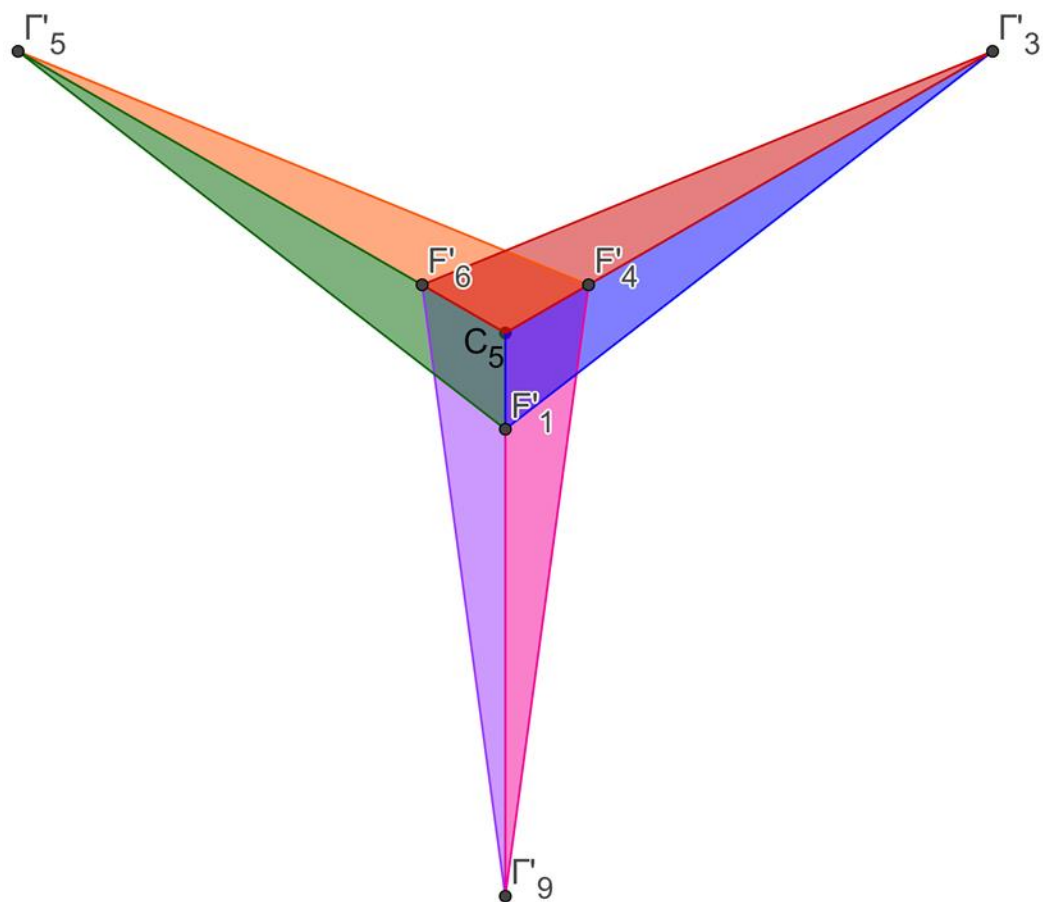
Сферическое изображение

Пусть M – однородный многогранник с центром в точке O ,

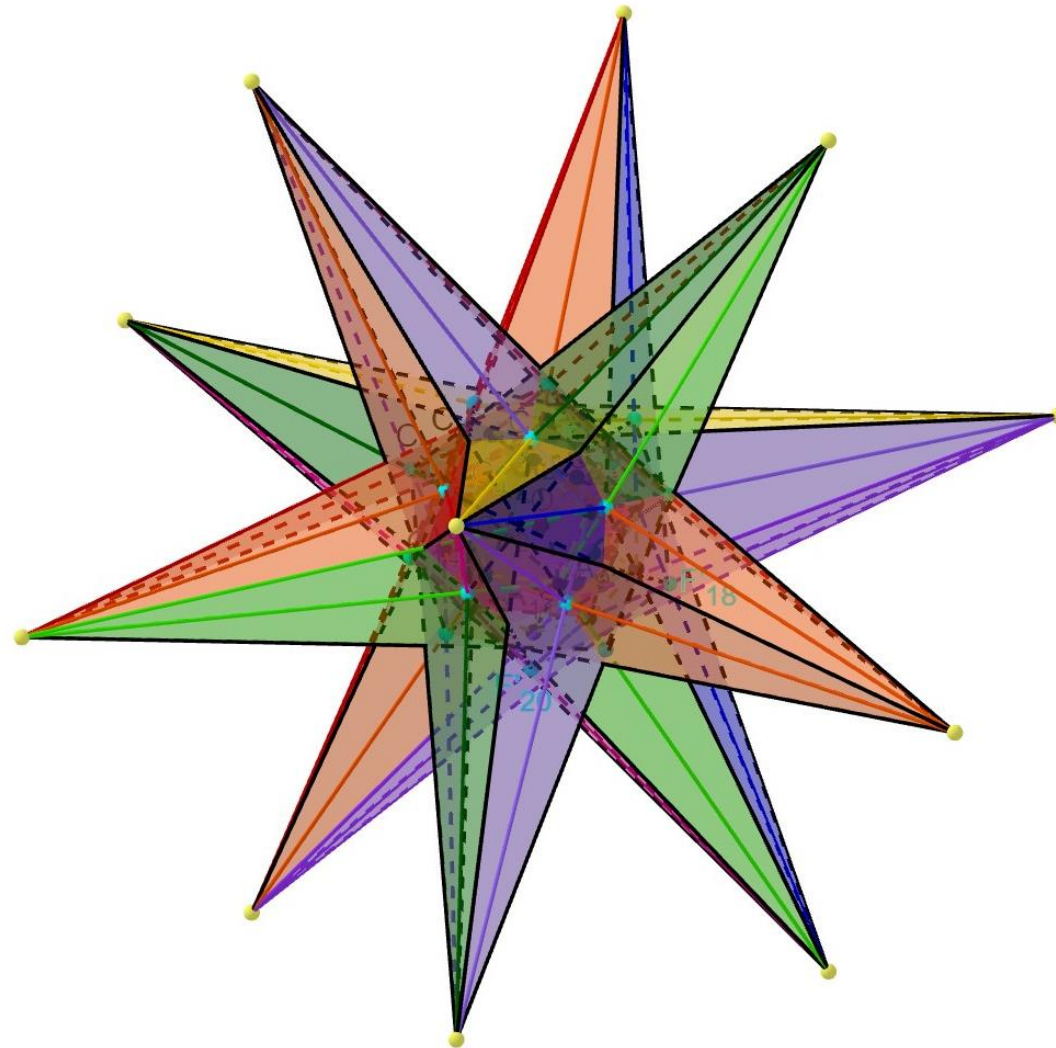
S – единичная сфера с центром в точке O .

Сферическим изображением многогранника M назовём проекцию его полярного образа на единичную сферу S при центральном проектировании из центра этой сферы.

Сферическое изображение многогранного угла в вершине ББТИД



Большой триамбикикосаэдр – многогранник полярный к ББТИД



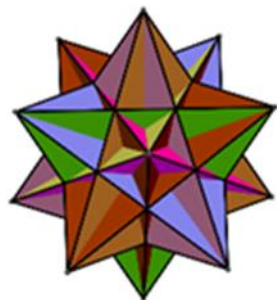
• Теорема 1. Полярный образ однородного многогранника M относительно описанной около него сферы является многогранником, удовлетворяющим следующим свойствам:

- 1) если q_1 и q_2 являются гранями многогранника $\pi_S(M)$, то существует g — движение многогранника $\pi_S(M)$, при котором $g(q_1) = q_2$;
- 2) группа симметрий многогранника $\pi_S(M)$ совпадает с группой симметрий многогранника M ;
- 3) многогранник $\pi_S(M)$ комбинаторно-двойственен многограннику M ;
- 4) все многогранные углы многогранника $\pi_S(M)$ правильные;

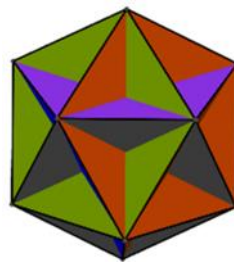
- Определение. *Многогранником каталанового типа* будем называть многогранник, все многогранные углы которого правильные и все его грани равны между собой с точностью до движения многогранника.
- Теорема 2. Полярным образом многогранника N каталанового типа относительно вписанной в него сферы S_N будет однородный многогранник M , причем, сфера S_N будет описанной около многогранника M и $\pi_{S_N}(M) = N$.
- Теорема 3. Множество однородных многогранников, плоскости граней которых не содержат их центр, и множество многогранников каталанового типа равномощны, и полярное преобразование задает их биективное соответствие.

**Однородные ориентируемые многогранники с выпуклыми гранями,
не содержащими центр многогранника**

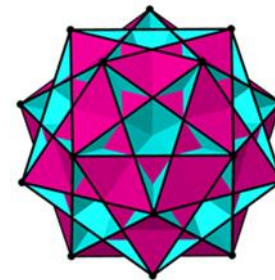
«Тройка»



Большой икосаэдр

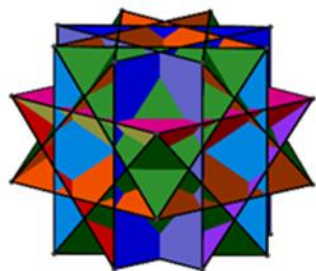


Большой додекаэдр

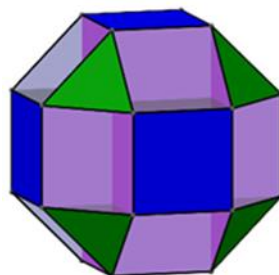


ББТИД

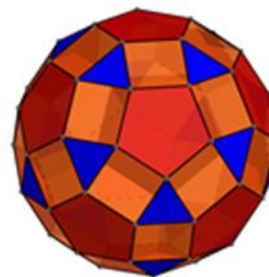
«Четвёрка»



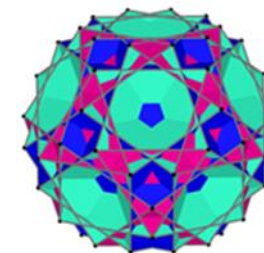
БРКО



МККО



МДИД



БИИД

Сферическое изображение многогранного угла многогранника и его площадь

- *Сферическим изображением многогранника*, одного из пары многогранников конфигурации $(M, S(M), \pi(M), S)$, назовём проекцию второго многогранника этой пары на единичную сферу S при центральном проектировании из центра этой сферы.
- *Площадью сферического изображения* назовем суммарную площадь проекций треугольников, образующих грани исходного многогранника, на единичную сферу S .

Кривизна реализации вершины многогранника

- Пусть многогранный угол $M(A)$ состоит из граней $g_1, g_2, \dots, g_n$ многогранника M .

Поставим в соответствие грани g_i многогранного угла $M(A)$ число α'_i по следующему правилу:

1) если многогранный угол $M(A)$ без особенностей, то число α'_i равно радианной мере угла грани g_i ;

2) если многогранный угол $M(A)$ с особенностью типа складки, то есть многогранник M один из многогранников «четверки», то главной грани и боковым граням поставим в соответствие числа равные радианным мерам углов этих граней, а треугольной грани поставим в соответствие число противоположное величине угла данной грани.

Определение (кривизна реализации). *Кривизной реализации многогранного угла $M(A)$ многогранника M назовем число θ , равное*

$$\theta = 2\pi \cdot r(M(A)) - \sum_{i=1}^n \alpha'_i.$$

Кривизну реализации многогранного угла $M(A)$ многогранника M будем также называть кривизной реализации вершины A многогранника M .

Кривизна реализации многогранного угла

Для выпуклого однородного многогранника кривизна реализации многогранных углов равна

$$2\pi \cdot r(V) - \sum \alpha_i = 2\pi - \sum \alpha_i$$

и равна кривизне вершины, определенной Александровым.

Теорема 4.

Площадь сферического изображения многогранного угла в вершине однородного ориентируемого многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат его центр, равна кривизне реализации этого угла.

Полная площадь сферического изображения однородного ориентируемого многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат его центр, равна произведению площади единичной сферы и плотности данного многогранника.

I. В теории звездчатых однородных многогранников введены и обоснованы такие понятия, как:

- 1. Внутренняя кривизна точки произвольного многогранника.
- 2. Полярный образ однородного многогранника, грани которого не содержат его центр. Это понятие позволяет описать класс многогранников двойственных к однородным звездчатым многогранникам.
- 2. Кривизна реализации многогранного угла в вершине однородного ориентируемого многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат центр многогранника.
- 3. Сферическое изображение и площадь сферического изображения многогранного угла в вершине ориентируемого однородного многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат центр многогранника.

II. В ходе исследования однородных звездчатых многогранников для ориентируемых многогранников с выпуклыми гранями, плоскости которых не проходят через центр многогранника, разработан метод их построения, сводящийся к элементарным стереометрическим построениям на базе правильных выпуклых многогранников Платона.

III. Получены следующие теоретические результаты:

Теорема 1. Полярный образ однородного многогранника M относительно описанной около него сферы является многогранником, удовлетворяющим следующим свойствам:

- 1) если q_1 и q_2 являются гранями многогранника $\pi_S(M)$, то существует g – движение многогранника $\pi_S(M)$, при котором $g(q_1) = q_2$;
- 2) группа симметрий многогранника $\pi_S(M)$ совпадает с группой симметрий многогранника M ;
- 3) многогранник $\pi_S(M)$ комбинаторно-двойственен многограннику M ;
- 4) все двугранные углы многогранника $\pi_S(M)$ равны между собой;
- 5) все многогранные углы многогранника $\pi_S(M)$ правильные.

Теорема 2. Полярным образом многогранника N каталанового типа относительно вписанной в него сферы S_N будет однородный многогранник M , причем, сфера S_N будет описанной около многогранника M и $\pi_{S_N}(M) = N$.

Теорема 3. Множество однородных многогранников, плоскости граней которых не содержат их центр, и множество многогранников каталанового типа равномощны, и полярное преобразование задает их биективное соответствие.

III. Получены следующие теоретические результаты:

Теорема 4.

Площадь сферического изображения многогранного угла в вершине однородного ориентируемого многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат его центр, равна кривизне реализации этого угла.

Полная площадь сферического изображения однородного ориентируемого многогранника с выпуклыми гранями, плоскости которых не содержат его центр, равна произведению площади единичной сферы и плотности данного многогранника.