Геометрия звездчатых многогранников

Любовь Александровна Антипова

Старший преподаватель кафедры геометрии
РГПУ им. А.И. Герцена

Многогранник

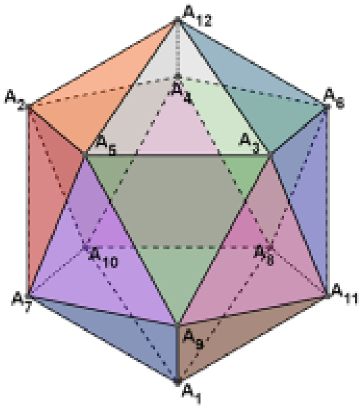
- Под **многогранником**, согласно определению данному Г. Коксетером в книге [1], будем понимать конечный связный набор плоских многоугольников, такой что каждая сторона каждого многоугольника принадлежит также только еще одному многоугольнику, при условии, что многоугольники, окружающие каждую вершину образуют единый цикл (чтобы исключить аномалии, такие как две пирамиды с общей вершиной).

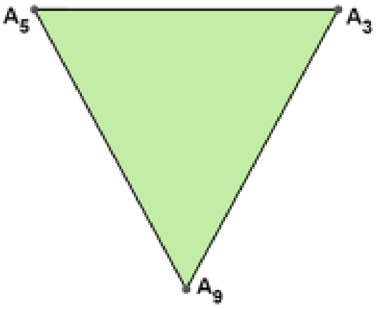
- Под **многоугольником** понимаем часть плоскости, ограниченную простой замкнутой ломаной.

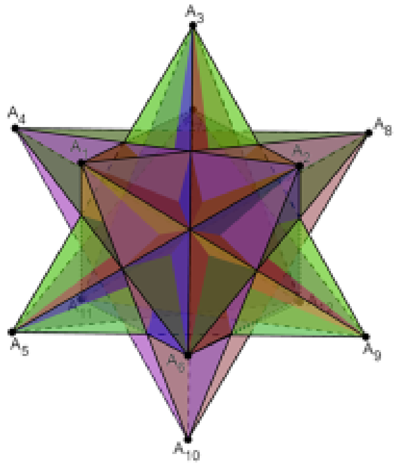
- **Гранями многогранника** назовём многоугольники, составляющие этот многогранник, причём многоугольники, лежащие в одной плоскости и имеющие общие стороны, будем считать одной гранью. Вершины и стороны граней называются соответственно **вершинами и рёбрами** многогранника.

[1]. *H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, Изд-во: Courier Corporation, 2012, - 368 с.*

Икосаэдр и большой икосаэдр



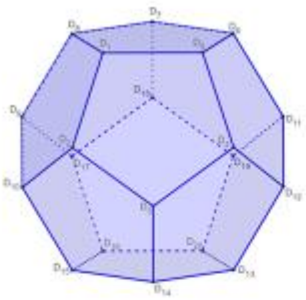




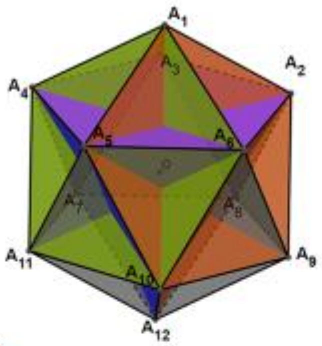
Теорема. Метрика большого икосаэдра GI, имеющего своими вершинами вершины икосаэдра I, подобна метрике этого икосаэдра I с коэффициентом Ф.

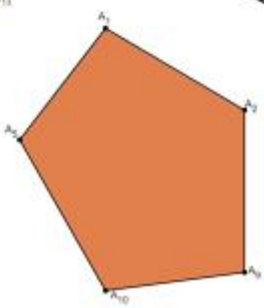
[2]. *Вернер А. Л., Васильева М. Н., Голокова О. Г. Геометрия правильных звёздчатых многогранников. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. 100 с.*

Додекаэдр

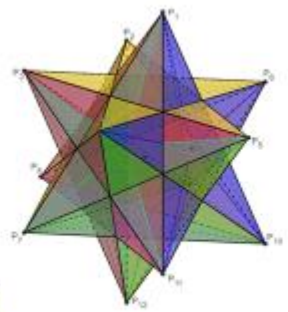


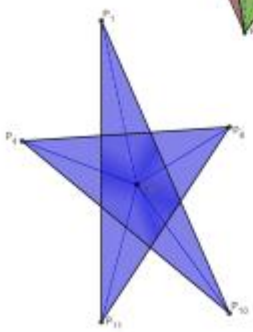
Большой додекаэдр





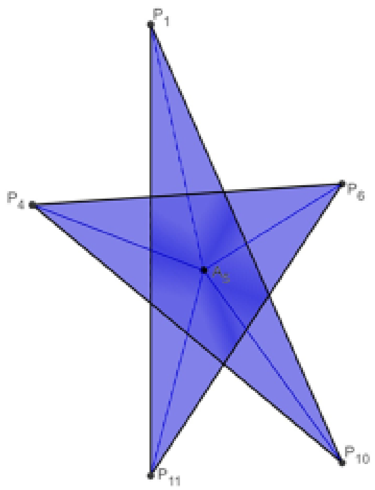
Малый звездчатый додекаэдр





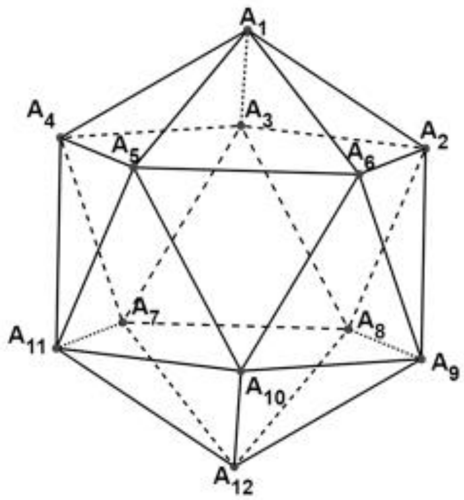
Грань многогранника

Таким образом, грань задает двумерный клеточный комплекс с границей. Вершины и стороны многоугольников грани, содержащиеся в границе ее клеточного комплекса, будем называть соответственно вершинами и ребрами многогранника, а остальные вершины и стороны многоугольников грани будем называть плоскими вершинами и дополнительными ребрами многогранника.

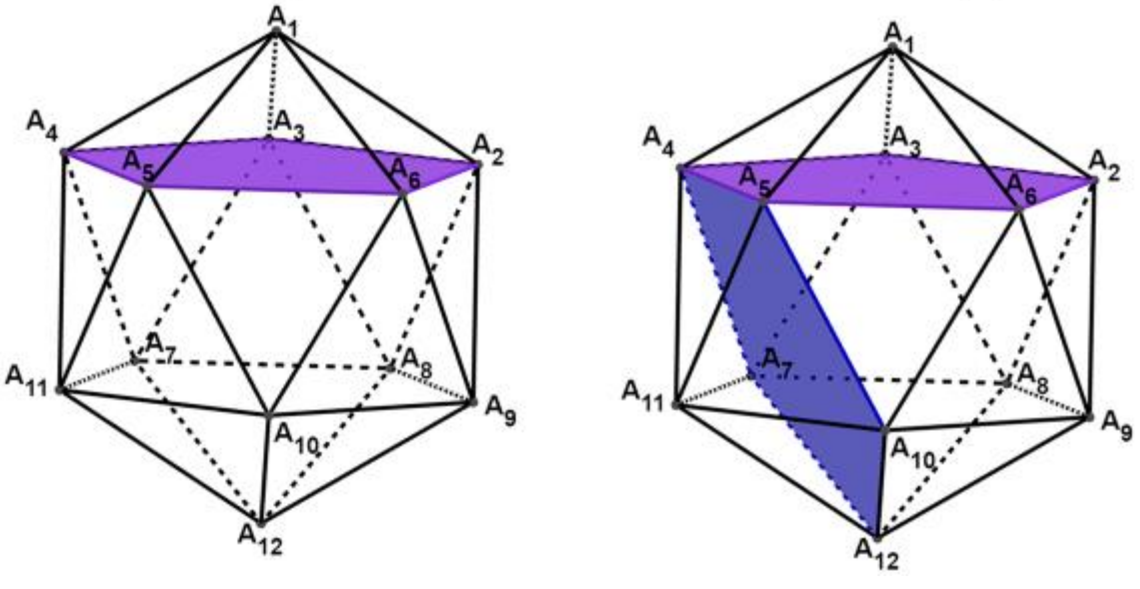


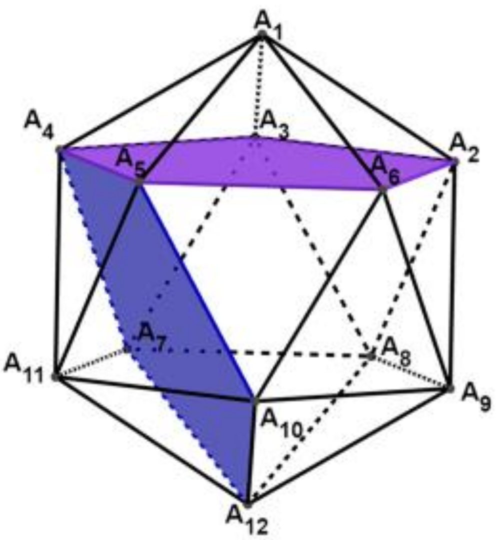
Построение большого додекаэдра

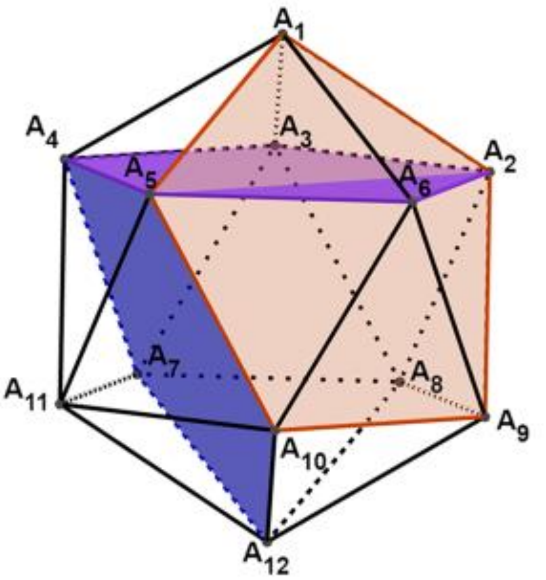
Вершины и ребра икосаэдра (одномерный остов икосаэдра)

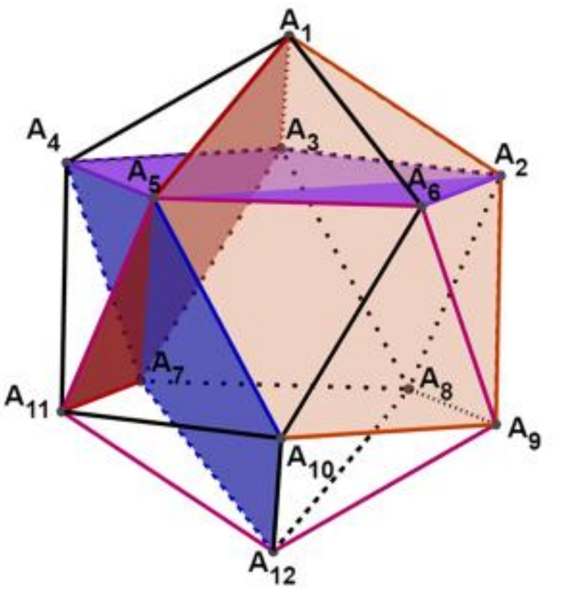


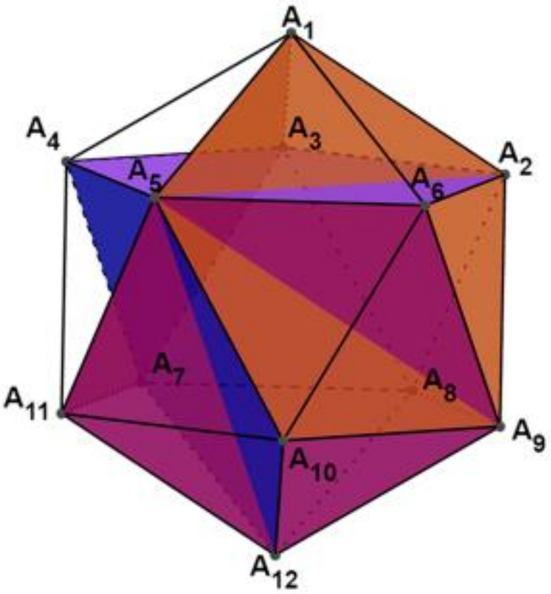
Пятиугольники в сечении икосаэдра



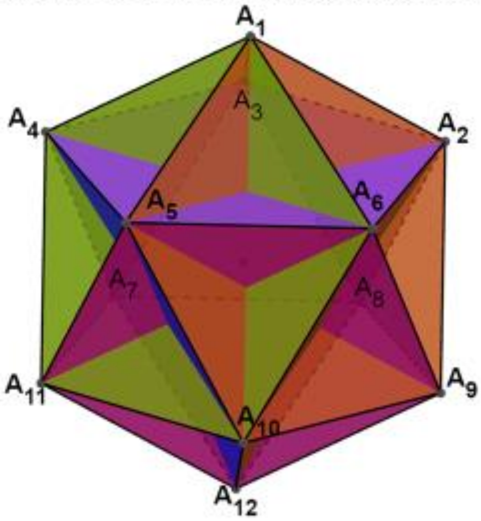








- <u>Правильный многогранник</u> – это многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники и все многогранные углы которого равны друг другу.



Большой додекаэдр

Однородный многогранник

Многогранник называется **однородным**, если все его грани правильные, то есть обладают поворотной симметрией конечного порядка, и группа симметрий самого многогранника транзитивна на его вершинах.

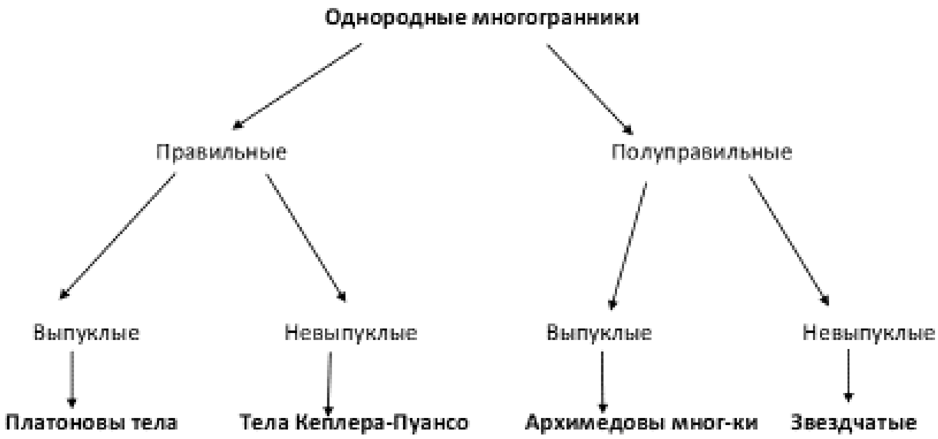
Додекаэдр

Большой икосаэдр

Большой битригональный икосододекаэдр

Большой ромбогексаэдр

Теорема.
Существует только 75 однородных многогранников, отличных от призм и антипризм.
Из них:
выпуклых правильных – 5;
невыпуклых правильных – 4;
выпуклых полуправильных – 13;
невыпуклых полуправильных – 53.



[3] Coxeter H.S.M., Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P. Uniform Polyhedra. *Phill.Trans.* **246A**, 401-450 (1954).
[4]. Сопов С.П. Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников. Украинский геометрический сборник, выпуск 8, 1970 год, страницы 139-156.

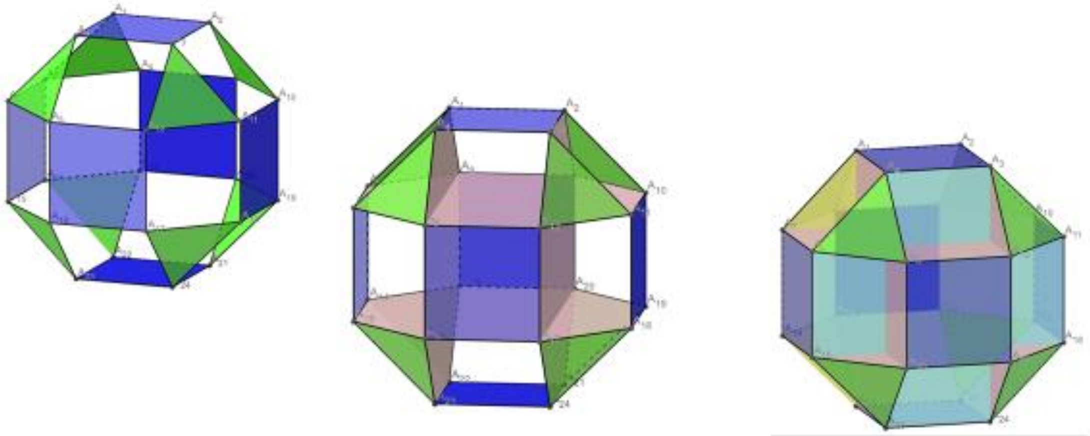
Однородные звездчатые многогранники с выпуклыми гранями

Для всех типов невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями:

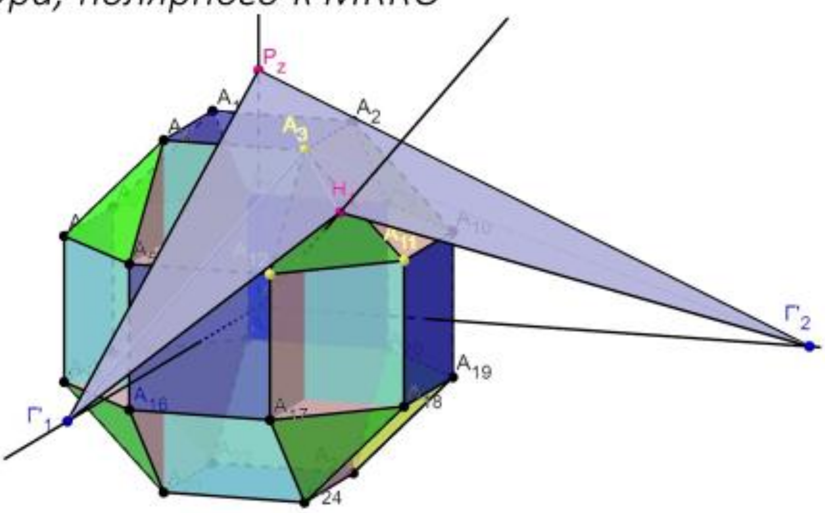
- описаны способы их построения;
- доказана их ориентируемость/неориентируемость;
- доказана теорема об изометричности октагемиоктаэдра плоскому тору;
- решена проблема изометричности пар выпуклых и невыпуклых многогранников.
- доказана теорема о двукратном локально изометричном накрытии гептаэдра кубооктаэдром.

[4]. *Вернер А. Л. Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями : учебное пособие / Вернер А. Л., Антипова Л. А. — Санкт-Петербург : Издательство Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена, 2021. — 62 с. — ISBN 978-5-8064-2945-3. — URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=692099. — ЭБС Университетская библиотека онлайн. Объем в п.л.: 3,875 п.л.*

Построение малого кубокубооктаэдра

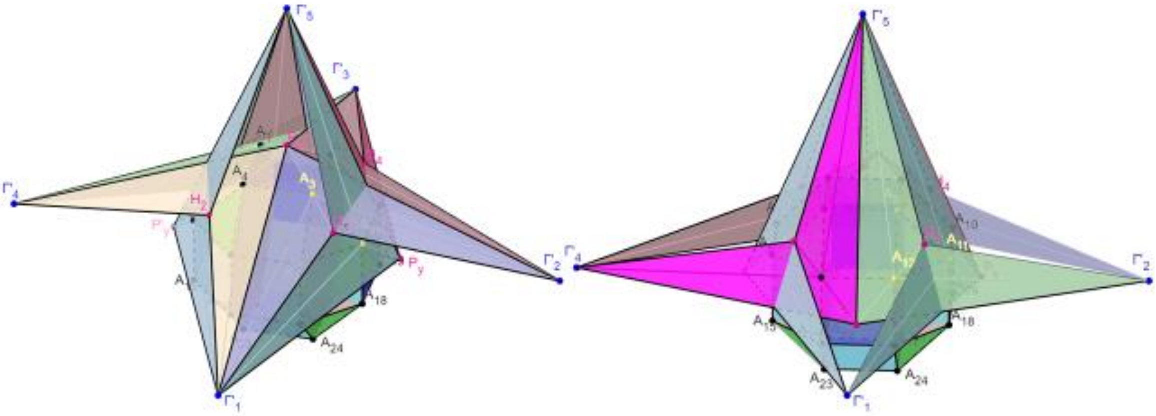


Построение МГАИТ - малого гексакронного икосотетраэдра, полярного к МККО



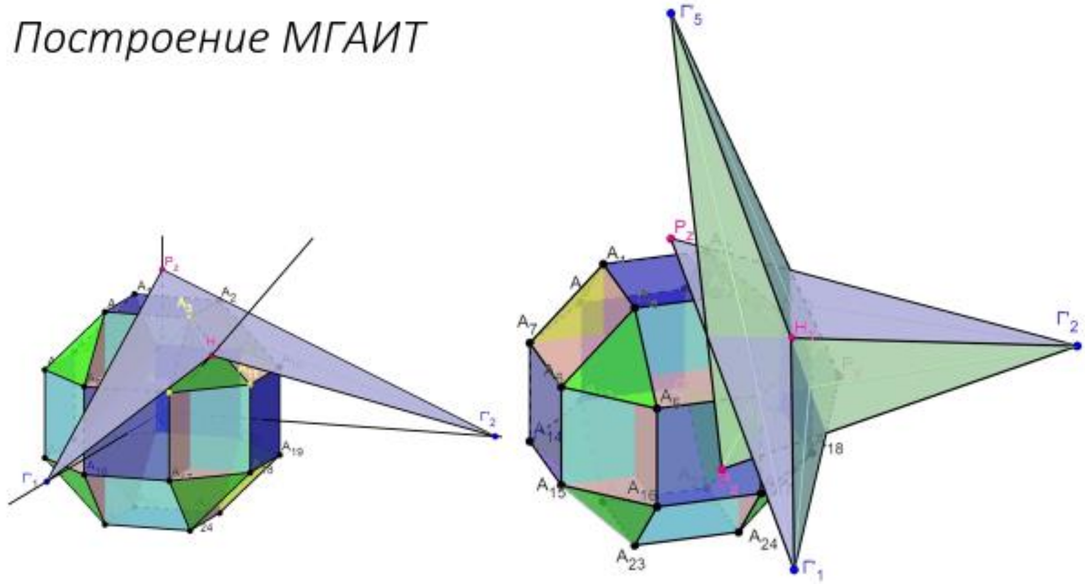
$Г'_1 H_1 Г'_2 P_z$ – полярный образ четырехгранного угла в вершине A_3 малого кубокубооктаэдра

Построение МГАИТ



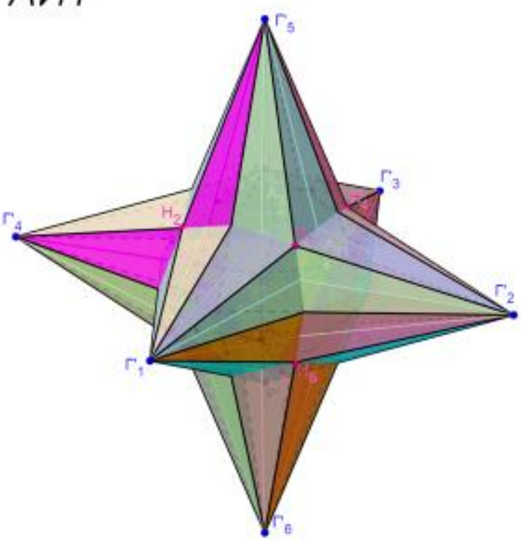
Полярный образ восьмиугольной грани $A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в её вершинах – восемь граней стрелок, сходящиеся в полюсе Γ'_5 плоскости данной грани

Построение МГАИТ



Полярный образ треугольной грани $A_3A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в её вершинах – три грани-стрелки, сходящиеся в полюсе H_1 плоскости данной грани

Построение МГАИТ

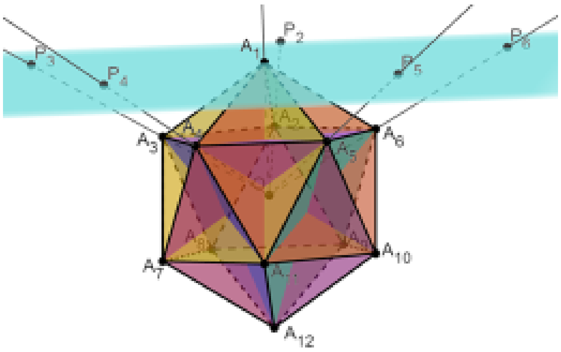


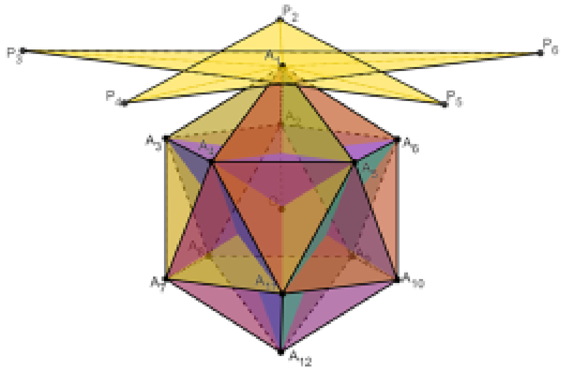
Малый гексакронный икосотетраэдр (МГАИТ), полярный к многограннику МККО

Полярное изображение многогранного угла

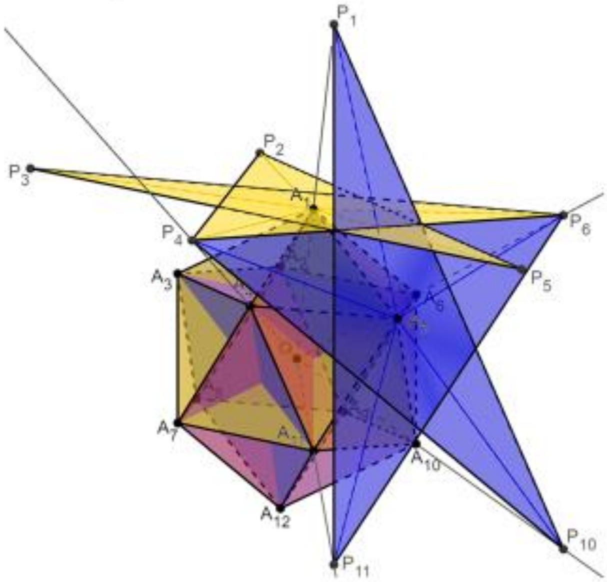
Рассмотрим многогранный угол $M(A)$ в вершине A *многогранника* M, грани которого $v_1, v_2, \ldots, v_m$ занумеруем в циклическом порядке, соответствующем одному из обходов вокруг прямой OA. Полюсы плоскостей граней многогранного угла $M(A)$ обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_m$ так, что номер полюса соответствует номеру грани его поляры. Последовательно соединим их отрезками: P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{m-1}P_m$, P_mP_1.

Совокупность треугольников P_1AP_2, P_2AP_3, …, $P_{m-1}AP_m$, P_mAP_1 определяет грань полярного к M многогранника, соответствующую вершине A многогранника M. Эту грань будем называть полярным образом многогранного угла $M(A)$ и обозначать $p(A)$.

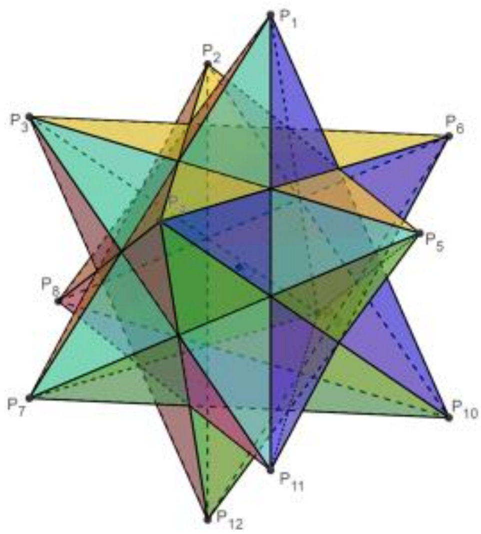


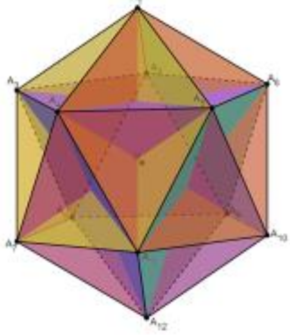


Полярное изображение большого додекаэдра



Малый звездчатый додекаэдр – многогранник полярный большому додекаэдра





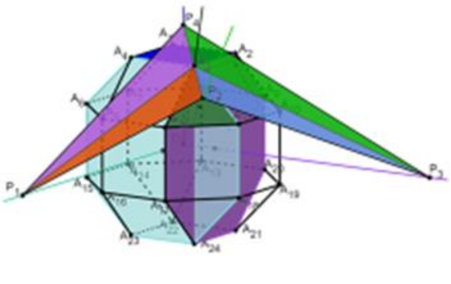
Конфигурации полярно-двойственных многогранников

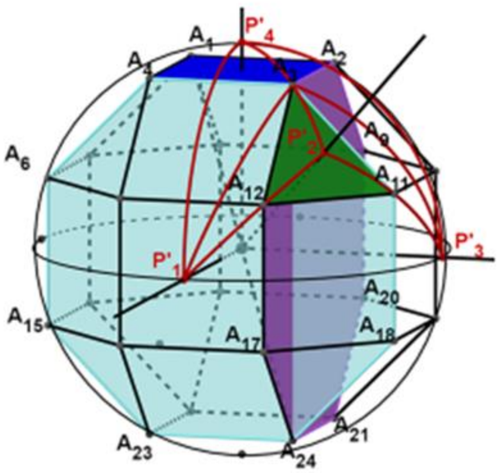
- Каждый однородный многогранник, плоскости граней которого не содержат центр многогранника, определяет *конфигурацию (M, S(M), π(M), S)* – однородный многогранник *M,* сфера *S*(*M*), описанная около него, многогранник π(*M*), полярный данному многограннику относительно сферы *S*(*M*), и единичная сфера *S*.
- Многогранники конфигурации (*M*, *S*(*M*), π(M), *S*) являются полярно-двойственными.
- **Теорема.** Множество однородных многогранников, плоскости граней которых не содержат их центр, и множество многогранников каталанового типа равномощны, и полярное преобразование задает их биективное соответствие.

[7]. *Антипова Л. А. Конфигурации полярно-двойственных многогранников. Каталановы звезды / Антипова Л. А. // Современные проблемы математики и математического образования : Герценовские чтения, 76 : сборник научных статей Международной научной конференции, Санкт-Петербург, 18-20 апреля 2023 года / Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. — Санкт-Петербург, 2023. — С. 326-332. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=54907979.*

Сферическое изображение многогранного угла многогранника и его площадь

- *Сферическим изображением многогранника*, одного из пары многогранников конфигурации *(M, S(M), π(M), S)* , назовём проекцию второго многогранника этой пары на единичную сферу S при центральном проектировании из центра этой сферы.
- Рассмотрим сферическое изображение одного многогранного угла многогранника конфигурации, которое будет состоять из сферических треугольников с общей вершиной в вершине многогранного угла.





Сферическое изображение многогранного угла в вершине A_3 многогранника МККО – сферический многоугольник, определенный набором сферических треугольников $P'_1A_3P'_2$, $P'_2A_3P'_3$, $P'_3A_3P'_4$, $P'_4A_3P'_1$

- *Площадью сферического* изображения назовем суммарную площадь проекций треугольников, образующих грани исходного многогранника, на единичную сферу S.

Аналог теоремы Гаусса-Александрова о равенстве площади сферического изображения и кривизны поверхности

- Аналог теоремы Гаусса о равенстве внутренней и внешней кривизн поверхностей для выпуклых многогранников сформулировал и доказал А.Д. Александров. Он заключается в равенстве площади сферического изображения многогранных углов многогранника и их кривизн. Обобщим этот результат на невыпуклые многогранники рассматриваемых нами конфигураций.

- В случае невыпуклых многогранных углов площадь сферического изображения зависит не только от внутренней метрики угла, но также и от реализации этого угла в трехмерном евклидовом пространстве.

- Определим кривизну реализации вершины A многогранника конфигурации (M, S, π(M), S). Обозначим V(A) – многогранный угол в вершине A рассматриваемого многогранника.

«Тройка»

Большой икосаэдр

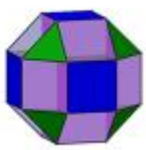
Большой додекаэдр

ББТИД

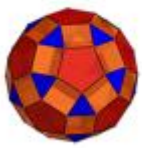
и «четвёрку»

«Четвёрка»

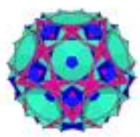
БРКО



МККО

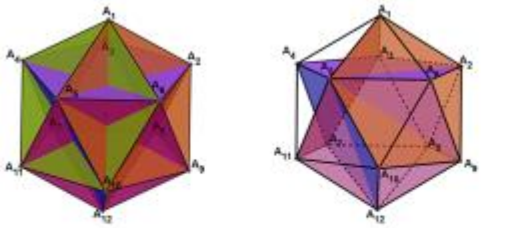


МДИД

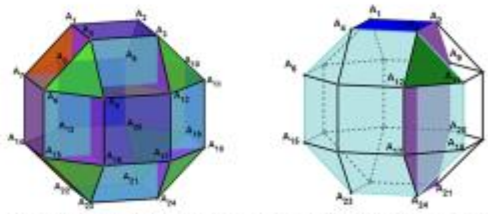


БИИД

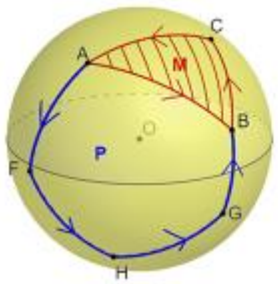
Однородные невыпуклые ориентируемые многогранники с выпуклыми гранями



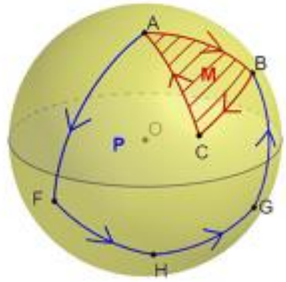
Большой додекаэдр и его многогранный угол в вершине A_5.



Малый кубокубооктаэдр и его многогранный угол в вершине A_3.



Два сферических многоугольника,
имеющие внешнее прилегание по общей стороне.



Два сферических многоугольника,
имеющие внутреннее прилегание по общей стороне.

Кривизна реализации многогранного угла

Кривизной реализации угла V многогранника M назовем число равное

$$2\pi \cdot rot(V) - \sum \beta_i.$$

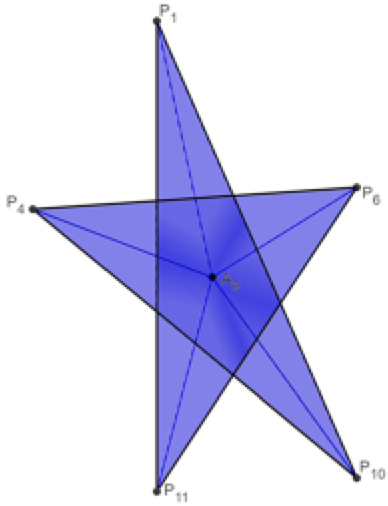
Для выпуклого однородного многогранника кривизна реализации многогранных углов равна $2\pi \cdot rot(V) - \sum \beta_i = 2\pi - \sum \alpha_i$, и равна кривизне вершины, определенной Александровым.

Кривизна реализации многогранного угла

- Заметим, что кривизна реализации плоской вершины грани многогранника всегда равна нулю, поскольку число оборотов треугольников, сходящихся в данной вершине, умноженное на *2π*, совпадает с полным углом вокруг данной вершины.

- Кривизной реализации многогранника назовем сумму кривизн реализации его вершин.

- Таким образом, кривизна реализации плоских вершин не влияет на кривизну многогранника.



Теорема.

Для любого ориентируемого однородного многогранника М с выпуклыми гранями площадь сферического изображения его многогранного угла равна кривизне реализации этого угла.

[8]. *Антипова Л. А. Аналоги теоремы Гаусса-Александрова для однородных ориентируемых невыпуклых многогранников с выпуклыми гранями = Analogues of the Gauss-Alexandrov Theorem for Uniform Oriented Nonconvex Polyhedra with Convex Faces / Антипова Л. А. // Математические структуры и моделирование. — 2022. — N 2 (62). - С. 76-107. — URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49048754. — DOI: 10.24147/2222-8772.2022.2.76-107. Объем в п.л.: 4,0 п.л.*

Продемонстрируем доказательство теоремы для Малого кубокубооктаэдра

Каждой грани G_i многогранного угла **МККО** в вершине A_3 соответствует число β_i, равное радианной мере её плоского угла, взятой со знаком:

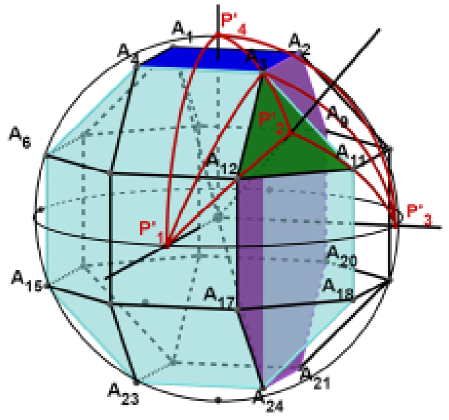
- восьмиугольным граням $G_1=A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$ и $G_3=A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$ соответствуют числа $\beta_1 = \beta_3 = \frac{3\pi}{4}$,
- квадратной грани $G_4=A_3A_2A_1A_4$ – число $\beta_4 = \frac{\pi}{2}$,
- треугольной грани $G_2=A_3A_{11}A_{12}$ – число $\beta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

Число оборотов многогранного угла V многогранника МККО вокруг оси OA_3 равно rot(V) = 1.

Тогда **кривизна реализации** равна: $2\pi\cdot 1 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Сферическим изображением многогранного угла в вершине A_3 многогранника МККО является объединение сферических треугольников $P'_1A_3P'_2$, $P'_2A_3P'_3$, $P'_3A_3P'_4$, $P'_4A_3P'_1$

Сумма площадей полученных сферических треугольников равна площади сферического четырехугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$, которая равна разности восьмой и двадцать четвёртой частей площади сферы, т.е. $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)4\pi = \frac{\pi}{3}$.



Доказано

Теорема

Пусть *(V(A), L, O)* – многогранный угол с вершиной в точке A такой, что всякая его тройка граней одного из двух рассматриваемых типов – либо без особенностей, либо с особенностью типа складки.

Тогда площадь сферического изображения равна кривизне реализации.