

О классификации Коннелли изгибаемых бипирамид с 4- и 5-угольными экваторами

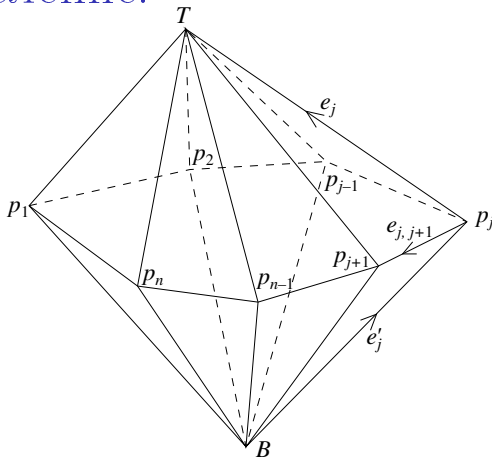
В.А. Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский государственный университет

Семинар по Дискретной геометрии и геометрии чисел
МГУ, 30 сентября 2026

Доклад основан на совместной статье
В.А. Александрова и Е.П. Волокитина
«О классификации Коннелли изгибаемых
бипирамид с 4- и 5-угольными экваторами»,
находящейся на рецензировании в
Сибирском математическом журнале.

Определение:



Бипирамида B_n с n -угольным экватором $p_1, \dots, p_n$; T — верхняя (top) вершина; B — нижняя (bottom) вершина.

Определения и известные факты:

Многогранник в $\mathbb{R}^3$ (в т.ч. бипирамида $\mathbb{B}_n$) называется **изгибаемым**, если его пространственную форму можно непрерывно изменять так, чтобы каждая его грань оставалась конгруэнтной сама себе.

- $\mathbb{B}_4$ комбинаторно эквивалентен октаэдру;
- 1897 Брикар: построены и классифицированы изгибаемые октаэдры; все они имеют самопересечения;

Известные факты:

- 1977 Коннелли: построен изгибаемый многогранник без самопересечений;
- ~ 1980 Штеффен: построен изгибаемый многогранник без самопересечений с 9 вершинами;
- 1978–2026 Александер, Сабитов, Коннелли, Максимов, Гайфуллин, Штогрин, . . . : получены тонкие и нетривиальные факты из теории изгибаемых многогранников;

Известные факты (продолжение):

- 2024 Легерски и Ко.: построен изгибаемый многогранник без самопересечений с 8 вершинами; см. M. Gallet, G. Grasegger, J. Legerský, J. Schicho. Pentagonal bipyramids lead to the smallest flexible embedded polyhedron // [arXiv 2410.13811](#), 2024. P. 1–31.
- 2025 Атласон: усовершенствован пример Легерски; см. E. Atlason. Cutting along a symmetric quadrilateral to construct an embedded flexible dodecahedron // [arXiv 2510.06897](#), 2025. P. 1–7.

Наш вопрос мотивирован препринтом Легерски и Ко., в котором:

- предложена своя нетривиальная классификация изгибаемых бипирамид $\mathbb{B}_5$;
- построены два примера $\mathbb{B}_5^{\text{I}}$ и $\mathbb{B}_5^{\text{II}}$ изгибаемых бипирамид с 5-угольным экватором;
- с помощью $\mathbb{B}_5^{\text{II}}$ построен изгибаемый многогранник без самопересечений с 8 вершинами.

Наш вопрос про $\mathbb{B}_5^{\text{I}}$ и $\mathbb{B}_5^{\text{II}}$: С точки зрения классификации Коннелли они относятся к одному типу или к разным?

Наш основной результат: классификация Коннелли нетривиальна

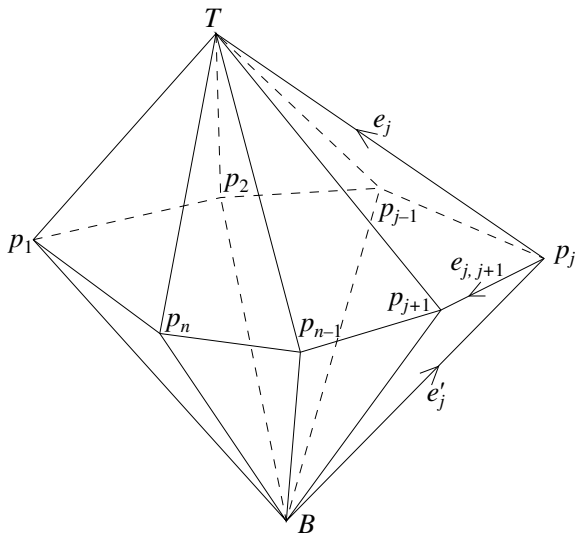
ТЕОРЕМА: Изгибаемые бипирамиды $\mathbb{B}_5^I$ и $\mathbb{B}_5^{II}$ с 5-угольным экватором, постороенные Легерски и Ко., лежат в разных классах эквивалентности по классификации Коннелли.

ЗАМЕЧАНИЕ: По классификации Коннелли а priori возможно не более двух классов эквивалентности изгибаемых бипирамид с 5-угольным экватором.

Дополнительный бонус:

Нам удалось построить параметризацию Коннелли для изгибаемых бипирамид с 5-угольным экватором, покрывающую бипирамиду $\mathbb{B}_5^{\text{II}}$, т.е. мы указали некоторое множество параметров, которые можно выбирать произвольно, и формулы, вычисления по которым дают набор длин рёбер такой, что если существует бипирамида с такими длинами рёбер, то она с необходимостью является изгибаемой.

Теория Коннелли изгибаемых бипирамид



Обозначения, связанные с бипирамидой B_n .

Теория Коннелли изгибаемых бипирамид $\mathbb{B}_n$

Пусть $j = 1, \dots, n$ и $\theta_{j,j+1}$ — ориентированный двугранный угол при ребре ТВ псевдотетраэдра $\langle \text{TV} p_j p_{j+1} \rangle$.

Тогда $e^{i\theta_{j,j+1}} =$

$$= \frac{(e_j \cdot e_{j+1})(R \cdot R) - (e_j \cdot R)(e_{j+1} \cdot R) + i(e_j, e_{j+1}, R)|R|}{|e_j \times R||e_{j+1} \times R|}.$$

Поскольку $p_{n+1} = p_1$, то $\sum_{j=1}^n \theta_{j,j+1} = 2\pi k$ при некотором целом k , то

$$1 = \prod_{j=1}^n e^{i\theta_{j,j+1}} = \prod_{j=1}^n \frac{G_{j,j+1}}{H_j H_{j+1}} = \prod_{j=1}^n \frac{G_{j,j+1}}{H_j^2}.$$

Теория Коннелли изгибаемых бипирамид $\mathbb{B}_n$

Пусть $x = R \cdot R$,

$$Q_{j,j+1}(x) = \operatorname{Re} G_{j,j+1}(x) \text{ и } y_{j,j+1}(x) = i \operatorname{Im} G_{j,j+1}(x).$$

Можно показать, что функция $Q_{j,j+1}(x)$ является многочленом степени 2, а функция $y_{j,j+1}^2(x)$ — многочленом степени 3.

Индексы j и k называем **эквивалентными** и пишем $j \sim k$, если функции $y_{j,j+1}(x)$ и $y_{k,k+1}(x)$ зануляются в одних и тех же точках x .

Уточнение основного результата

ТЕОРЕМА I. Для бипирамиды $\mathbb{B}_5^I$ множество индексов $\{1, 2, \dots, 5\}$ распадается на два класса эквивалентности: $\mathcal{C}_1 = \{1, 4\}$ и $\mathcal{C}_2 = \{2, 3, 5\}$.

ТЕОРЕМА II. Для бипирамиды $\mathbb{B}_5^{II}$ множество индексов $\{1, 2, \dots, 5\}$ образует один класс эквивалентности: $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Сравнение разных классификаций

В таблице указано количество классов эквивалентности изгибаемых бипирамид $\mathbb{B}_n$ в разных классификациях при разных n .

Автор классификации	$\mathbb{B}_4$	$\mathbb{B}_5$	$\mathbb{B}_n, n \geq 6$
Брикар (1897)	3	N/A	N/A
Коннелли (1980)	2	2	?
Легерски и Ко. (2024)	N/A	2	N/A

$? \leq q(n)$ = количество способов, которыми можно представить число n в виде суммы целых чисел, каждое из которых ≥ 2 .

Экскурс в теорию разбиений:

Разбиение целого положительного числа n — это его представление в виде неупорядоченной суммы положительных целых чисел.

Общее количество разбиений числа n обозначим через $p(n)$. Тогда:

- $q(n) = p(n) - p(n - 1)$;
- первые члены последовательности $\{q(n)\}$:
 $1, 1, 2, 2, 4, 4, 7, \dots$. Эта последовательность зарегистрирована в «Энциклопедии целочисленных последовательностей» как [A002865](#);
- Харди и Рамануджан доказали асимптотику

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

Доп. бонус = Параметризация Коннелли

Напоминание: из уравнения

$$1 = \prod_{j=1}^n e^{i\theta_{j,j+1}} = \prod_{j=1}^n \frac{G_{j,j+1}}{\textcolor{red}{H}_j \textcolor{green}{H}_{j+1}}$$

возникают две функции

$$Q_{j,j+1}(x) = \operatorname{Re} G_{j,j+1}(x) \text{ и } y_{j,j+1}(x) = i \operatorname{Im} G_{j,j+1}(x),$$

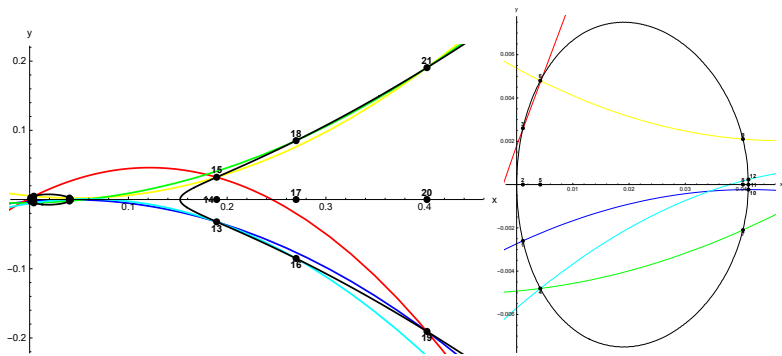
где $x = R \cdot R$,

$Q_{j,j+1}(x)$ есть многочлен степени 2,

$y_{j,j+1}^2(x)$ — многочлен степени 3.

Параметризация Коннелли для $\mathbb{B}_5^{\text{II}}$

На плоскости переменных x, y рассмотрим параболу $y = Q_{j,j+1}(x)$, кубическую кривую $y^2 = y_{j,j+1}^2(x)$ и точки их пересечения



Параметризация Коннелли, покрывающая $\mathbb{W}_5^{\text{II}}$

j	Q'_{j-}	Q_{j-}	Q'_{j+1+}	Q_{j+1+}
1	A	B	C	$-A - B - C$
2	$-C$	$-A - B - C$	D	$A + B + 2C - D$
3	D	$A + B + 2C - D$	E	$-A - B - 2C - E$
4	$-E$	$-A - B - 2C - E$	$A + C + E$	$B + C + E$
5	$A + C + E$	$-B - C - E$	$-A$	B

Эта таблица называется **параметризацией Коннелли** изгибаемых бипирамид $\mathbb{W}_5$, у которых все индексы $\{1, 2, \dots, 5\}$ образуют один класс эквивалентности. При этом

- A, C, D, E — произвольные точки на компактной компоненте связности кубической кривой K, заданной формулой $y = y_{jj+1}^2(x)$;
- B — произвольная точка на некомпактной компоненте связности кубической кривой K;
- сложение $+$ выполняется в абелевой группе кубической кривой K.

Спасибо за внимание!