Q1: Ориентированный объём тетраэдра

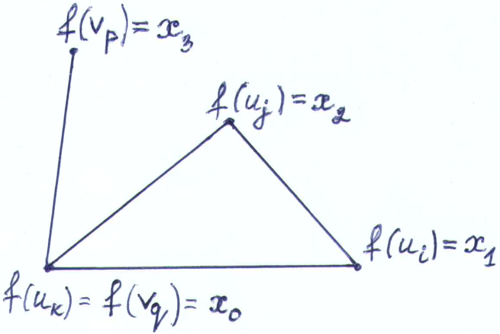
Если $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3})$, $k = 0, 1, 2, 3$, — вершины тетраэдра в $\mathbb{R}^3$, то

$$\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 1 & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_{1,1} - x_{0,1} & x_{1,2} - x_{0,2} & x_{1,3} - x_{0,3} \\ x_{2,1} - x_{0,1} & x_{2,2} - x_{0,2} & x_{2,3} - x_{0,3} \\ x_{3,1} - x_{0,1} & x_{3,2} - x_{0,2} & x_{3,3} - v_{0,3} \end{vmatrix}$$

— ориентированный объём этого тетраэдра.

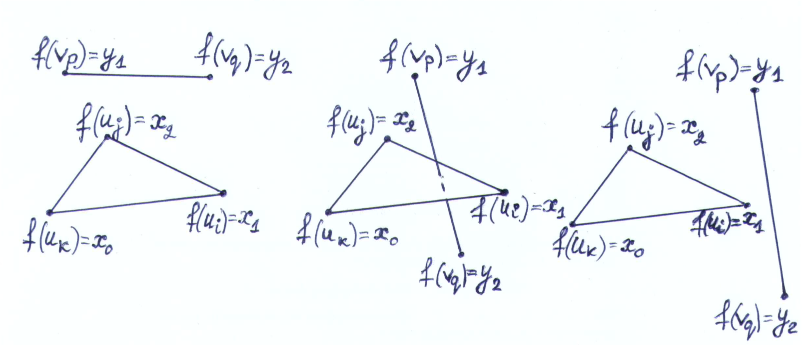
Q1, случай (2): грань (u_i, u_j, u_k) и ребро (v_p, v_q) в M имеют общую вершину



$6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq 0 \Rightarrow$ нет самопересечений

$6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow \Big\{$ исключительный случай, требующий дополнительного изучения

Q1, случай (1): грань (u_i, u_j, u_k) и ребро (v_p, v_q) в M не инцидентны



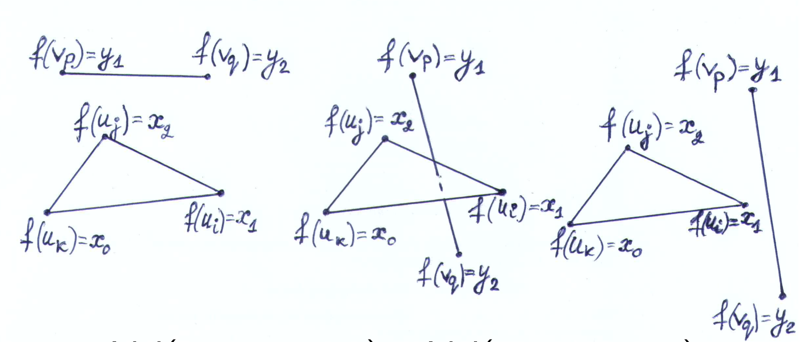
$$6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_1) \cdot 6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_2) > 0$$

$\Rightarrow$ нет самопересечений.

Иначе см. следующий слайд.

Q1, случай (1): грань (u_i, u_j, u_k) и ребро (v_p, v_q) в M не инцидентны

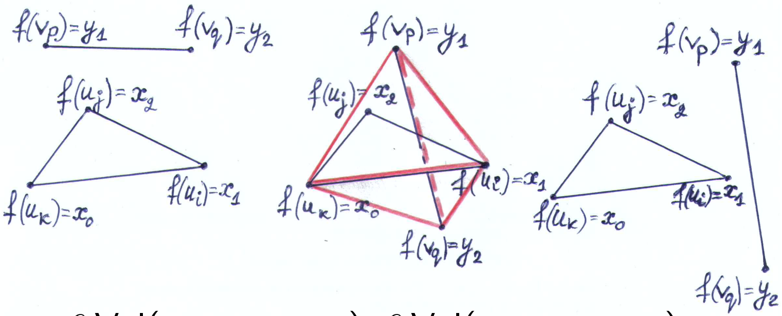
Подслучай $6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_1) \cdot 6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_2) < 0$.



Если $6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, y_1, y_2)$, $6\,\mathsf{Vol}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $6\,\mathsf{Vol}(x_2, x_0, y_1, y_2)$ имеют один знак, то есть самопересечение.

Q1, случай (1): грань (u_i, u_j, u_k) и ребро (v_p, v_q) в M не инцидентны

Подслучай $6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_1) \cdot 6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, x_2, y_2) < 0$.



Если $6\,\mathsf{Vol}(x_0, x_1, y_1, y_2)$, $6\,\mathsf{Vol}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $6\,\mathsf{Vol}(x_2, x_0, y_1, y_2)$ имеют один знак, то есть самопересечение. Иначе ...

Q1: о компьютерном счёте

- каждая задача о пересечении треугольника и отрезка требует вычисления двух или пяти определителей;

- всего надо решить $72 \times 48 = 3456$ таких задач, ведь $\mathscr{P}$ имеет 26 вершин, 72 ребра и 48 граней. Мы уменьшаем это число $72 \times 12 = 864$;

- результаты символьных вычислений в Mathematica 12.1: нет ни самопересечений, ни случаев, требующих дополнительного изучения.

Итог для Q1: $\mathscr{P}$ не имеет самопересечений.

Подзадача Q2: Напоминание и план действий

- Подзадача Q2: «Убедиться, что $\mathscr{P}$ допускает такое изгибание, при котором ни один его двугранный угол не остаётся постоянным.»
- $\mathscr{P}$ допускает 4-параметрическое[6] изгибание.
- Ниже мы строим 1-параметрическое изгибание $\mathscr{P}_{t\in[\alpha,\beta)}$ многогранника $\mathscr{P}$ и проверяем, что при этом изгибании ни один двугранный угол не остаётся постоянным.

[6] И.Г. Максимов, И.Х. Сабитов. О понятии комбинаторной p-параметричности многогранников // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.

Q2: Как изгибается $\mathscr{S}$?

Пусть E является «коньком крыши» $\mathscr{S}$; x и y — вершины $\mathscr{T}$, не инцидентные E; z — вершина $\mathscr{S}$, наиболее удалённая от E; Π — плоскость, перпендикулярная отрезку (x, y) и проходящая через его середину $\frac{1}{2}(\mathrm{x}+\mathrm{y})$.

N.B.: z можно произвольно двигать по окружности с центром $\frac{1}{2}(\mathrm{x}+\mathrm{y})$, лежащей в Π.

Изгибание $\mathscr{S}$: Вершины $\mathscr{T}$ неподвижны; $\mathrm{z}(\mathrm{t})$ движется по окружности с ненулевой скоростью; $|\dot{\mathrm{z}}(0)| = 1$; каждая из 4х оставшихся вершин $\mathscr{S}$ соединена рёбрами с тремя из упомянутых вершин, поэтому её положение определенó.

Q2: Как будем изгибать $\mathscr{P}$?

N.B.: $\mathscr{P}$ склеен из 4х копий $\mathscr{S}$, получаемых поворотами на 90° вокруг E. Называем эти копии сегментами $\mathscr{P}$.

Изгибание $\mathscr{P}$: движение одного сегмента задаём как описано на предыдущем слайде, а на остальные сегменты «переносим» это движение поворотами на 90° вокруг E.

Значит, нужно убедиться в непостоянстве двугранных углов только для одного сегмента $\mathscr{P}$, а именно, для $21 - 3 = 18$ двугранных углов (а это меньше 72).

Q2: Ещё уменьшаем количество проверяемых двугранных углов

N.B.: При изгибании октаэдра Брикара $\mathscr{B}$ изменяются все двугранные углы.

Поэтому проверять нужно только четыре двугранных угла $\varphi(t)$, а именно те, грани которых принадлежат разным октаэдрам Брикара.

Q2: Достаточно проверить, что $\dot{\varphi}(0) \neq 0$

Другими словами, достаточно проверить, что $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ для четырёх двугранных углов $\varphi(t)$.

N.B.: Отдельно взятый сегмент $\mathscr{P}$ переходит в себя под действием поворота на 180° вокруг прямой, проходящей через z и середину ребра E.

Поэтому достаточно проверить, что $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ только для двух двугранных углов.

Q2: Вычисление векторов скорости вершин при $t = 0$

Назовём множество, состоящее из вершин $\mathscr{T}$ и вершины z, референсным множеством. Для любой точки этого множества мы знаем её скорость при $t = 0$ непосредственно из построения изгибания $\mathscr{P}$.

Два интересующих нас двугранных угла таковы, что любая концевая точка p ребра этого двугранного угла либо сама является референсной, либо соединяется рёбрами $\mathscr{P}$ с тремя референсными точками. Обозначим их через p_k, а их скорости через v_k, $k = 1, 2, 3$.

Q2: Вычисление векторов скорости вершин при $t = 0$. Продолжение

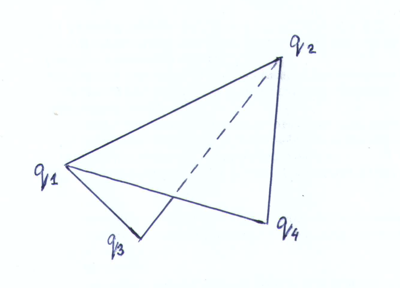
- Вектор скорости v вершины p находим как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(p - p_k) \cdot (v - v_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

- Вычисления проводим символьно в Wolfram's Mathematica 12.1.

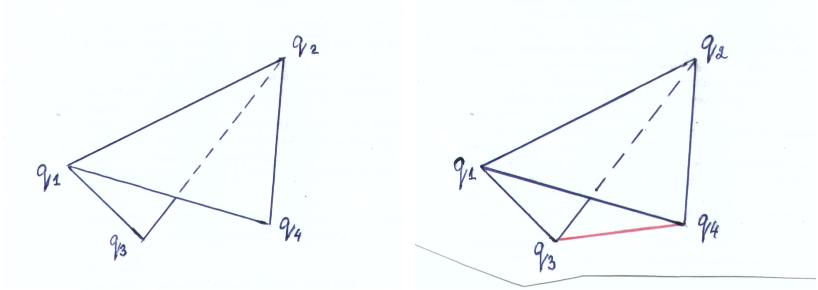
- В результате знаем не только координаты, но и скорости всех вершин $\mathscr{P}$ [при $t = 0$].

Q2: План завершающего вычисления



- Длины всех нарисованных рёбер стационарны, т.е. $(q_i - q_j) \cdot (v_i - v_j) = 0$.

Q2: План завершающего вычисления



- Длины всех нарисованных рёбер стационарны, т.е. $(q_i - q_j) \cdot (v_i - v_j) = 0$.
- Двугранный угол при ребре (q_1, q_2) стационарен $\Rightarrow$ Длина ребра (q_3, q_4) стационарна, т.е. $(q_3 - q_4) \cdot (v_3 - v_4) = 0$. Наш план — убедиться, что последнее равенство нарушается.

Q2: Завершающее вычисление

Символьные вычисления в Wolfram's Mathematica 12.1 дают $(q_3 - q_4) \cdot (v_3 - v_4) \neq 0$.

Итог для Q2: $\mathscr{P}$ допускает изгибание, при котором ни один его двугранный угол не остаётся постоянным.

Общий итог: основной результат доказан. $\square$

Сравнение с дипломом Заславского[7]

- В связи с вопросом И.Х. Сабитова в [7] построены 2 многогр-ка; один из них совпадает с $\mathscr{P}$;
- в [7] изучен вопрос об отсутствии самопересечений у модифицированного мн-ка Штеффена, но при этом использованы приближённые вычисления;
- в [7] нет аргументов в пользу того, что
  - у $\mathscr{P}$ нет самопересечений;
  - все двугранные углы $\mathscr{P}$ изменяются.

[7] О.А. Заславский. Диагонали изгибаемых многогранников // Дипломная работа. Кафедра высшей геометрии и топологии. Московский гос. университет им. М.В. Ломоносова. 2019. 13 с.

Конкретные открытые вопросы

- Существует ли замкнутый 1-параметрический изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$, не имеющий самопересечений и такой, что при его изгибании изменяются все двугранные углы?

- Существует ли замкнутый изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$, не имеющий самопересечений и такой, что при его изгибании изменяются длины всех его диагоналей?

Открытые вопросы, более похожие на направления исследований

- Длины каких диагоналей вообще или малых диагоналей в частности нужно зафиксировать, чтобы многогранник оказался неизгибаемым? [И.Х. Сабитов[8,9].]

- Все обсуждавшиеся вопросы можно ставить не только в $\mathbb{R}^3$, а в любом пространстве постоянной кривизны размерности ≥ 3.

---

[8] И.Г. Максимов, И.Х. Сабитов. О понятии комбинаторной p-параметричности многогранников // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.

[9] I.Kh. Sabitov. On polyhedra with calculable diagonals // Rend. Circ. Mat. Palermo (2), Suppl. 2002. V. 70. P. 289–294.

Спасибо за внимание!