Изгибаемый многогранник без самопересечений, все двугранные углы которого изменяются в процессе изгибания

В.А. Александров
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский государственный университет

21 мая 2024 г.

Совместная работа с Е.П. Волокитиным

Аннотация

В докладе даётся положительный ответ на следующий вопрос И.Х. Сабитова:

Существует ли замкнутый изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$, не имеющий самопересечений и такой, что при его изгибании изменяются все двугранные углы?[1,2]

Наш пример имеет 26 вершин, 72 ребра и 48 граней. Для изучения его свойств использована Wolfram's Mathematica.

---

[1] М.И. Штогрин. Об изгибаемых полиэдральных поверхностях // Труды МИАН. 2015. Т. 288. С. 171–183.

[2] A.A. Gaifullin. Flexible polyhedra and their volumes // In: Proceedings of the 7th European congress of mathematics, Berlin, 2016. Zürich: European Mathematical Society, 2018. P. 63–83.

Продолжение аннотации

Уже после того, как информация об этом докладе была разослана участникам семинара по Дискретной геометрии и геометрии чисел, А.А. Гайфуллин прислал мне дипломную работу[3], защищённую в 2019 году под его руководством.

Оказалось, что наш пример уже был построен в дипломе О.А. Заславского, причём построен именно для ответа на вопрос И.Х. Сабитова.

[3] О.А. Заславский. Диагонали изгибаемых многогранников // Дипломная работа. Кафедра высшей геометрии и топологии. Московский гос. университет им. М.В. Ломоносова. 2019. 13 с.

Определение многогранника

Пусть M — абстрактное двумерное многообразие, склееное из конечного числа евклидовых треугольников Δ_k, $k = 1, \ldots, n$. [Не исключается, что M имеет непустой край.]

Пусть $f : M \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, ограничение которого на каждый треугольник Δ_k является линейным изометричным вложением.

Тогда $f(M)$ называется многогранником в $\mathbb{R}^3$.

Определение самопересечения

Если $\delta \subset \mathrm{M}$ совпадает с одним из Δ_{k}, либо с его стороной, либо с вершиной, то $\mathrm{f}(\delta) \subset \mathbb{R}^3$ называем гранью, ребром, или вершиной $\mathrm{f}(\mathrm{M})$.

Если отображение $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^3$ инъективно, то говорят, что многогранник $\mathrm{f}(\mathrm{M})$ не имеет самопересечений.

Точку $\mathrm{x} \in \mathrm{f}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}^3$ называют точкой самопересечения многогранника $\mathrm{f}(\mathrm{M})$, если её полный прообраз $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) \subset \mathrm{M}$ состоит более чем из одной точки.

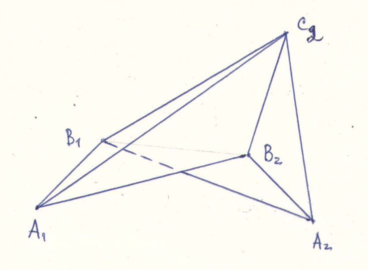
Определение изгибания

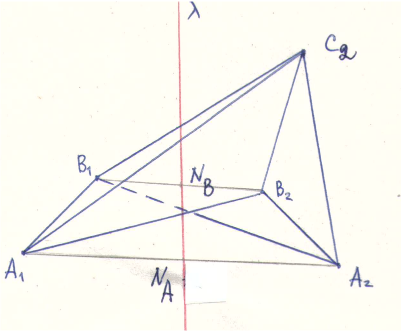
Многогранник $P = f(M)$ называем изгибаемым, если его пространственную форму можно изменить непрерывным образом только за счёт изменения его двугранных углов, т.е. если P можно включить в непрерывное семейство $\{P_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ так, что $P = P_\alpha$ и $\forall t \in (\alpha, \beta)$

- P_α и P_t комбинаторно эквивалентны;
- соответствующие грани P_α и P_t конгруэнтны;
- P_α и P_t не конгруэнтны.

Такое семейство $\{P_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ называем нетривиальным изгибанием многогранника P.

Пример: Октаэдр Брикара типа 1

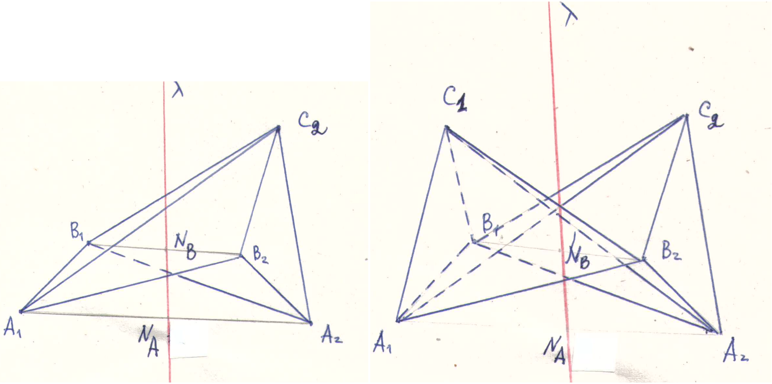




Многогранник $\mathscr{D}$. Условия на длины его сторон:

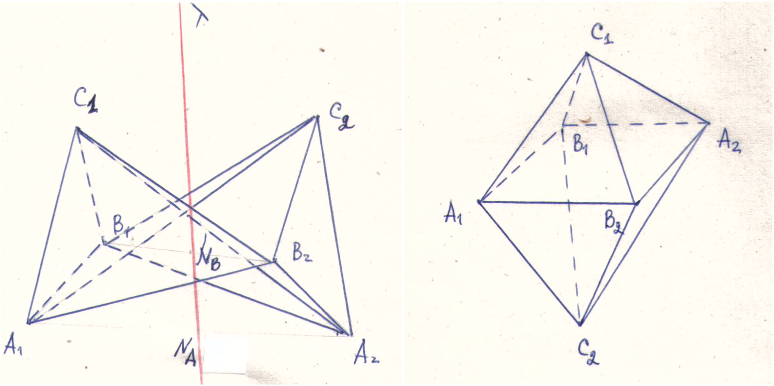
$|A_1B_1| = |A_2B_2|$ и $|B_1A_2| = |B_2A_1|$.

Октаэдр Брикара типа 1: продолжение

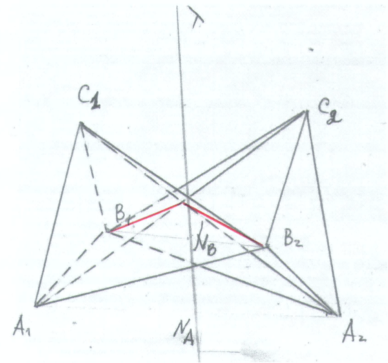


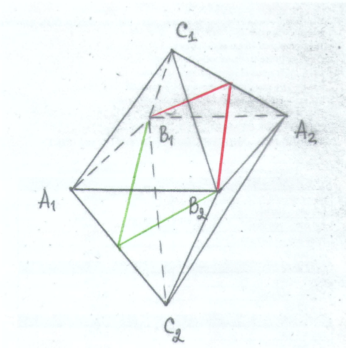
Многогранник $\mathscr{D}$ и октаэдр Брикара типа 1, $\mathscr{B}$.

Октаэдр Брикара $\mathscr{B}$: самопересечения



Октаэдр Брикара $\mathscr{B}$: самопересечения





Теорема (Основной результат)

В $\mathbb{R}^3$ существует многогранник $\mathscr{P}$, обладающий следующими свойствами:

1. $\mathscr{P}$ комбинаторно эквивалентен сфере $\mathbb{S}^2$, имеет только треугольные грани и не имеет самопересечений,
2. существует (непрерывное, нетривиальное) изгибание многогранника $\mathscr{P}$, при котором ни один из его двугранных углов не остаётся постоянным.

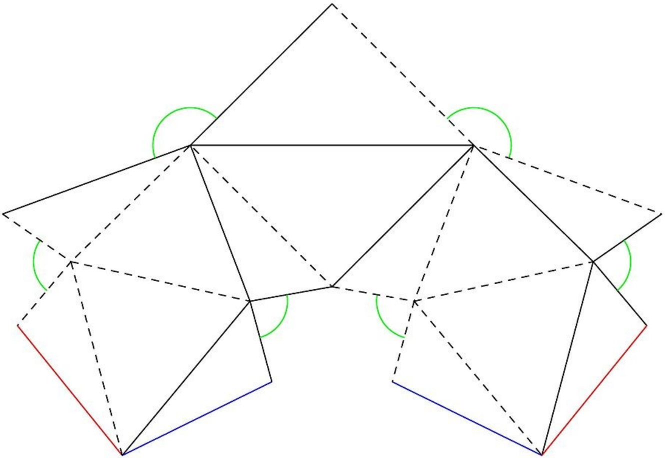
N.B.: Построенный нами $\mathscr{P}$ имеет 26 вершин, 72 ребра и 48 граней и совпадает с одним из примеров, построеных О.А. Заславским в [3].

Многогранник Штеффена $\mathscr{S}$

Изгибаемый многогранник Штеффена, $\mathscr{S}$, получается склеиванием по конгруэнтным граням некоторого тетраэдра, $\mathscr{T}$, и двух копий одного и того же октаэдра Брикара типа 1, $\mathscr{B}$.

Общеизвестно: $\mathscr{S}$ имеет 9 вершин, 21 ребро и 14 граней; он является изгибаемым и не имеет самопересечений.

Развёртка многогранника Штеффена $\mathscr{S}$



Основная идея

N.B.: $\mathscr{S}$ имеет всего одно ребро, E, двугранный угол при котором остаётся постоянным в процессе изгибания; он равен $\arccos\frac{45}{287} \approx 80^\circ 59'$.

Основная идея: Модернизировать $\mathscr{S}$ так, чтобы двугранный угол при E стал равняться 90°; трижды повернуть модернизированный многогранник на 90° вокруг E и склеить все 4 многогранника.

Получившийся многогранник $\mathscr{P}$ и есть искомый, ведь E не является его ребром.

Что предстоит доказать?

Подзадача Q1: Убедиться, что $\mathscr{P}$ не имеет самопересечений.

Подзадача Q2: Убедиться, что $\mathscr{P}$ допускает такое изгибание, при котором ни один его двугранный угол не остаётся постоянным.

Q1 – хорошо известная задача

Она возникает в математике и прикладной математике, теоретическом программировании и при анимации в компьтерных играх.

Известны десятки вариантов задачи Q1 и многие десятки алгоритмов для их решения[4,5].

[4] Ch. Ericson. Real-time collision detection. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2005.

[5] D.M. Mount. Geometric intersection. In: C.D. Toth (ed.) et al. Handbook of discrete and computational geometry. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2017. Chapter 42.

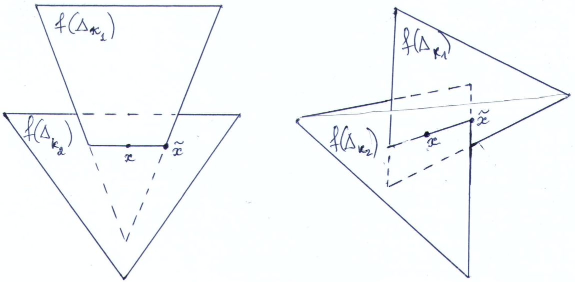
Q1: нам не подходят существующие алгоритмы

Хотим иметь достоверный результат, поэтому:

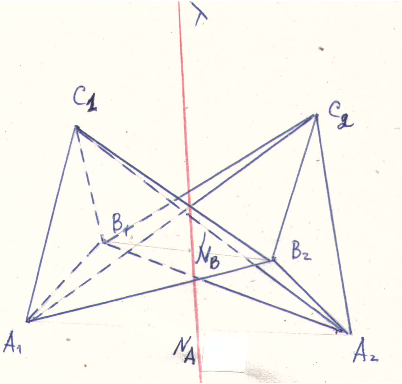
- Хотим использовать только символьные вычисления, напр., в Mathematica; т.е. не хотим работать с числами с плавающей точкой.
- Хотим, чтобы алгоритм был логически максимально прозрачным; для этого не разбираем «исключительные случаи», но о появлении каждого такого случая компьютер нас извещает; т.е. нам не интересны полная автоматизация, трудоёмкость, быстродействие.

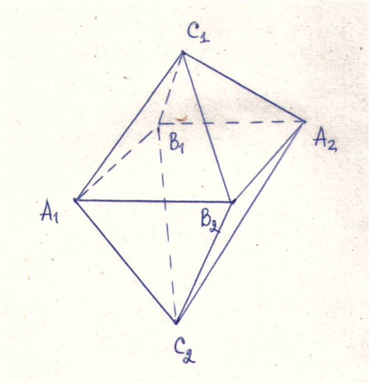
Q1: сведе́ние к пересечению треугольника и отрезка

N.B.: Многогранник имеет самопересечение
$\Leftrightarrow$ у него есть две пересекающиеся грани
$\Leftrightarrow$ у него есть пересекающиеся грань и ребро.



Q1: почему перебираем грани и ребра в M, а не в $f(M) \subset \mathbb{R}^3$?





Q1: случаи взаимного расположения грани и ребра в M:

(1) они не инцидентны друг другу (а значит, всякое пересечение их образов в f(M) даёт самопересечение самого f(M));

(2) они имеют одну общую вершину (значит, образ этой общей вершины лежит в пересечении их образов в f(M), но это ещё не означает, что у f(M) есть самопересечение);

(3) они имеют две общие вершины (без вычислений ясно, что эта пара «грань–ребро» не порождает самопересечений у f(M)).