Даны развёртки двух выпуклых октаэдров. Как выяснить являются ли эти октаэдры аффинно эквивалентными?

В.А. Александров
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский государственный университет

Семинар по дискретной геометрии и геометрии чисел
18 марта 2026 г.; МГУ

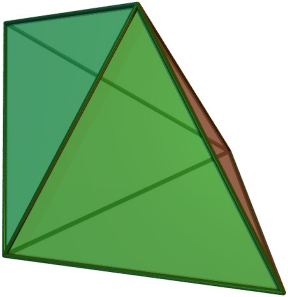
2: Аннотация

Даны натуральные развёртки двух выпуклых октаэдров в $\mathbb{R}^3$. Мы объясняем какие вычисления надо проделать с длинами рёбер этих развёрток, чтобы однозначно ответить на вопрос “Верно ли, что октаэдры, породившие эти развёртки, аффинно эквивалентны друг другу?”

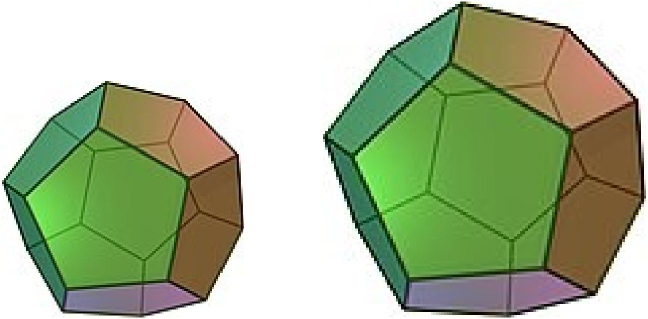
На аналогичный вопрос об изометричности выпуклых многогранников отвечает теорема Коши: “Многогранники изометричны $\Leftrightarrow$ их развёртки изометричны”. Т.е. для установления изометричности выпуклых многогранников вычисления не требуются и развёртки могут быть любыми.

3: Предостережение

Любые два треугольника аффинно-эквивалентны, однако среди многогранников с исключительно треугольными гранями есть аффино неэквивалентные:

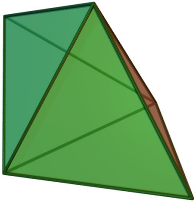


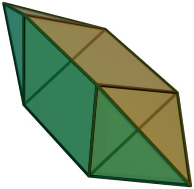
4: Многогранники с исключительно 3-валентными вершинами

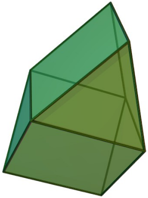


В.А. Александров, “Распознавание аффинно-эквивалентных многогранников по их натуральным разверткам”, Сиб. мат. ж., 64:2 (2023), 252–275.

5: Многогранники с несколькими 3-валентными вершинами







Треугольная бипирамида J_{12};
Удлинённая треугольная бипирамида J_{14};
Двускатный повёрнутый бикупол J_{26}.

6: Постановка задачи для октаэдров

Дано: натуральные развёртки двух выпуклых октаэдров.

Не даны: сами октаэдры (в частности, не даны координаты вершин и длины диагоналей).

Требуется: понять являются ли эти октаэдры аффинно эквивалентными.

Разрешается: производить измерения на развёртках (например, измерять расстояние $\mathrm{d_{ij}}$ между вершинами i и j одной грани развёртки) и производить вычисления с полученными данными (в теореме Коши вычисления не нужны).

7: Общая идея решения – начало

По теореме Коши выпуклый многогранник однозначно определяется своей развёрткой.

P и P' – октаэдры с данными развёртками;
i, j, k, l – вершины октаэдров P, P' (и их развёрток);
d_{ij} и d'_{ij} – квадраты длины ребра, соединяющего
i, j в P и P' (и их развёртках), если такое ребро имеется;
δ_{ij} и δ'_{ij} – квадраты длины диагонали многогранников P и P', соединяющей вершины i, j в $\mathbb{R}^3$.

8: Общая идея решения – продолжение

Используя теорему Кэли–Менгера мы строим некоторую систему (Σ) полиномиальных уравнений и неравенств (с коэффициентами, являющимися многочленами от чисел d_{ij}), решениями которой являются числа δ_{ij}.

В силу теоремы Коши эта система имеет единственное решение.

Аналогичная система (Σ') построенная для многогранника P' позволяет «найти» числа δ'_{ij}.

9: Общая идея решения – окончание

Октаэдры P и P' аффинно-эквивалентны $\Leftrightarrow$ решения δ_{ij} и δ'_{ij} систем (Σ) и (Σ') таковы, что $\exists\ \alpha > 0$ такое, что для любых вершин $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{l}$ октаэдра P выполнено равенство

$$\mathsf{vol}_3^2(\mathsf{conv}(\mathrm{ijkl})') = \alpha\, \mathsf{vol}_3^2(\mathsf{conv}(\mathrm{ijkl})). \qquad (1)$$

Здесь $\mathsf{conv}(\mathrm{ijkl})'$ и $\mathsf{conv}(\mathrm{ijkl})$ – выпуклые оболочки вершин $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{l}$ октаэдров P' и P соответственно.

10: Литература

[1] V. Alexandrov, "How to decide whether two convex octahedra are affinely equivalent using their natural developments only" // Journal for Geometry and Graphics, 26:1 (2022), 29–38.

11: Определитель Кэли–Менгера

Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ – метрическое пространство и $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{X}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \rho^2(x_1, x_2) & \ldots & \rho^2(x_1, x_k) \\ 1 & \rho^2(x_2, x_1) & 0 & \ldots & \rho^2(x_2, x_k) \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \rho^2(x_k, x_1) & \rho^2(x_k, x_2) & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

называется определителем Кэли–Менгера.

Обозначение: $\mathsf{cm}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

12: cm и объём симплекса

Пусть $(\mathbb{X}, \rho) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$;
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ – симплекс с вершинами
$x_1, x_2, \ldots, x_k$ в $\mathbb{R}^n$, где $2 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Тогда

$$(\mathsf{vol}_{k-1}\langle x_1, \ldots, x_k \rangle)^2 = \frac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\,\mathsf{cm}(x_1, \ldots, x_k),$$

где vol_{k-1} обозначает $(k-1)$-мерный объём симплекса $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$.

13: Изометрическое вложение

Говорят, что метрическое пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ изометрически вкладывается в $\mathbb{R}^n$, если существует отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n$ такое, что $|f(x) - f(y)| = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$, где $|f(x) - f(y)|$ обозначает евклидово расстояние между точками $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^n$.

При этом $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n$ называют изометрическим вложением метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ в $\mathbb{R}^n$.

14: Теорема Кэли–Менгера (для $n = 3$, $k = 6$)

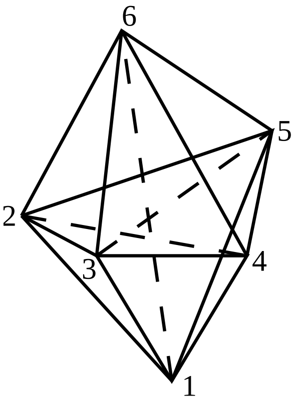
Пусть $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ и ρ – метрика на $\mathbb{X}$. Тогда $(\mathbb{X}, \rho)$ изометрически вкладывается в $\mathbb{R}^3$ если и только если выполнены условия (i)–(iii):

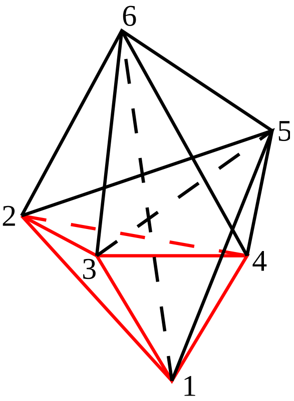
(i) $\forall\ Y \subset \mathbb{X} \ \ (2 \leqslant |Y| \leqslant 4 \ \Rightarrow \ (-1)^{|Y|}\mathsf{cm}(Y) \geqslant 0)$;

(ii) $\forall\ Y \subset \mathbb{X} \ \ (|Y| = 5 \ \Rightarrow \ \mathsf{cm}(Y) = 0)$;

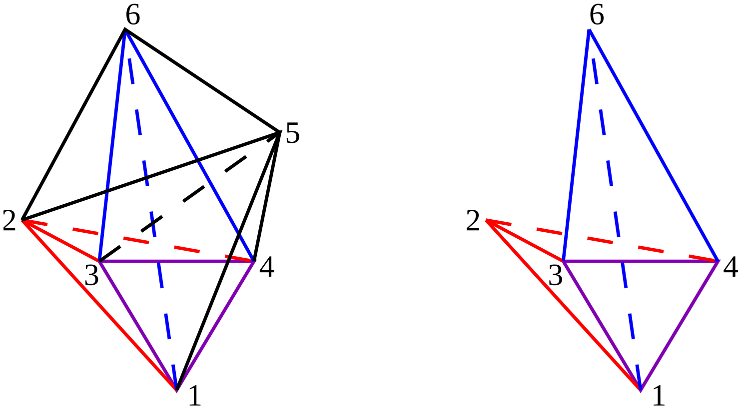
(iii) $|Y| = 6 \ \Rightarrow \ \mathsf{cm}(Y) = 0$.

15: Как учесть выпуклость?





16: Как учесть выпуклость?



Тетраэдры $\langle 1,2,3,4\rangle$ и $\langle 1,3,4,6\rangle$ могут лежать в одном полупространстве, определяемом гранью $\langle 1,3,4\rangle$ или в разных. В первом случае d_{26} меньше, чем во втором.

17: $\mathsf{cm}(1,2,3,4,6)$

Условие (ii) теоремы Кэли–Менгера $\Rightarrow$

$$\mathsf{cm}(1,2,3,4,6) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \delta_{16} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & \delta_{24} & d_{26} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{36} \\ 1 & d_{14} & \delta_{24} & d_{34} & 0 & d_{46} \\ 1 & \delta_{16} & d_{26} & d_{36} & d_{46} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathsf{cm}(1,2,3,4,6) = Ad_{26}^2 + Bd_{26} + C = 0.$$

$$\Rightarrow \quad d_{26}^2 \leqslant d_{26}\widetilde{d}_{26} = C/A \quad \Rightarrow \quad \boxed{C - d_{26}^2 A \geqslant 0}.$$

18: Система (Σ)

- 3 неизвестных (δ_{16}, δ_{24} и δ_{35})
- 7 уравнений ($\mathsf{cm}(Y) = 0$ для $|Y| = 5$ и 6)
- много неравенств ($(-1)^{|Y|}\mathsf{cm}(Y) \geqslant 0$ для $2 \leqslant |Y| \leqslant 4$ и условия выпуклости вида $C - d_{26}^2 A \geqslant 0$).

Из теоремы Коши мы знаем, что система (Σ) имеет единственное решение.

19: Система (Σ')

Система (Σ') строится по второй развёртке так же, как система (Σ) была построена по первой развёртке.

20: Основная теорема

Выпуклые октаэдры P и P′, соответствующие двум данным натуральным развёрткам, аффинно-эквивалентны если только если решения δ_{16}, δ_{24}, δ_{35} и δ'_{16}, δ'_{24}, δ'_{35} систем (Σ) и (Σ') таковы, что $\exists\ \alpha > 0$ такое, что для любой четвёрки [ijkl] вершин октаэдра P и соответствующей четвёрки [ijkl]′ вершин октаэдра P′ выполнено равенство

$$\frac{\mathsf{cm}([\mathrm{ijkl}]')}{\mathsf{cm}([\mathrm{ijkl}])} = \alpha.$$

21: Заключительные замечания

- Теорема на слайде 20 лишена красоты, присущей теореме Коши.

- Пусть $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – аффинное преобразование, переводящее j-ю грань первой развёртки в j-ю грань второй развёртки.
Не удалось использовать f_j в основной теореме.

- Нет продвижений в аналогичной задаче о распознавании проективно-эквивалентных октаэдров по их развёрткам.

Спасибо за внимание!