Новые интегральные формулы для компактных поверхностей

И.Х. Сабитов

27/02/2024

План доклада

1. 1.История вопроса
2. 2. Обобщенные формулы Минковского и Герглотца
3. 3. Инвариантные интегральные характеристики поверхностей произвольного топологического рода

Идея постановки вопроса

Известно, что многие знаменитые результаты геометрии «в целом» получены с использованием некоторых интегральных формул. Среди них наиболее знаменита, конечно, формула Гаусса-Бонне

$$\iint_S K \, dA = 2\pi\chi,$$

где S является C^2-гладкой компактной поверхностью с элементом площади dA, а K – гауссова кривизна и χ – эйлерова характеристика поверхности. Как метод доказательства, интегральные формулы были использованы, например, Бляшке для доказательства жесткости и Герглотцем – неизибаемости овалоидов. В теории выпуклых поверхностей есть несколько формул Минковского, справедливость которых представляет собой необходимые условия в теоремах существования. Мы же хотим предложить некоторый метод для получения много новых интегральных формул для компактных поверхностей произвольного топологичекого рода g.

Отправная идея - использовать формулу Стокса для интегралов от дифференциальных форм: берем некоторую 1-форму ω и применяем к ней формулу Стокса для компактной поверхности S без границы в такой постановке - сначала от поверхности отсекаем маленькую область с границей γ_ε, к интегралу $\int \omega$ по γ_ε и к интегралу $\int\int d\omega$ по S_ε применяем формулу Стокса, а затем устремляем ε к нулю и получаем равенство

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{d}\omega = \mathbf{0},$$

это и даст нам некоторое интегральное равенство.

Обобщение формул Минковского и Герглотца

Отправляемся от 1-формы ω в виде смешанного произведения $(\mathbf{r}, d\mathbf{n}, \mathbf{n})$. Предполагается, что на поверхности **S** метрика задана в изотермических координатах (u, v), в которых

$$ds^2 = \Lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Введем 1-форму $\Omega = f(u, v)\omega$. Имеем

$$d\Omega = \left[(\mathbf{r}, \mathbf{r}_u)\frac{Mf_v - Nf_u}{\Lambda^4} + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_v)\frac{Mf_u - Lf_v}{\Lambda^4}\right]\ dA$$
$$-2f\ \ H\ dA - 2f\ \ Kp\ dA$$

где через $\mathbf{p} = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ обозначена опорная функция поверхности, равная ориентированному расстоянию от начала координат до касательной плоскости к поверхности в концевой точке вектора $\mathbf{r}$, а L, M, N - коэффициенты второй формы поверхности.

Отсюда имеем формулу

$$2\iint\limits_S f\ H\ dA + 2\iint\limits_S f\ Kp\ dA =$$

$$\iint\limits_S \left[(\mathbf{r},\mathbf{r}_u)\frac{Mf_v - Nf_u}{\Lambda^4} + (\mathbf{r},\mathbf{r}_v)\frac{Mf_u - Lf_v}{\Lambda^4}\right]\ dA, \qquad (1)$$

которая при $f(u,v) = 1$ и является формулой Минковского, доказанной им для выпуклых поверхностей.

Возьмем теперь другую 1-форму $\tilde{\Omega} = f \cdot (\mathbf{r}, \tilde{\omega}, \mathbf{n})$ с

$$\tilde{\omega} = \frac{L^*}{\Lambda^2}\mathbf{r}_u + \frac{M^*}{\Lambda^2}\mathbf{r}_v)\mathbf{du} + (\frac{M^*}{\Lambda^2}\mathbf{r}_u + f\frac{N^*}{\Lambda^2}\mathbf{r}_v)\mathbf{dv}$$

где L^*, M^*, N^* – коэффициенты второй формы некоторой поверхности $\mathbf{S}^*$ изометричной $\mathbf{S}$. На этот раз имеем

$$d\tilde{\Omega} = \left[(\mathbf{r}, \mathbf{r}_u)\frac{N^* f_u - M^* f_v}{\Lambda^4} + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_v)\frac{L^* f_v - M^* f_u}{\Lambda^4}\right] dA +$$

$$2f\ H^*\ dA + 2f\ Kp\ dA - f\begin{vmatrix} l^* - l & \mathbf{m}^* - \mathbf{m} \\ m^* - m & \mathbf{n}^* - \mathbf{n} \end{vmatrix} p\ dA,$$

$$l^* - l = \frac{L^* - L}{\Lambda^2}, m^* - m = \frac{M^* - M}{\Lambda^2}, n^* - n = \frac{N^* - N}{\Lambda^2}.$$

И мы приходим к второй формуле

$$2\iint\limits_S fH^*\, dA + 2\iint\limits_S fKp\, dA - \iint\limits_S f \begin{vmatrix} \mathbf{l}^* - \mathbf{l} & \mathbf{m}^* - \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^* - \mathbf{m} & \mathbf{n}^* - \mathbf{n} \end{vmatrix} p\, dA =$$
$$\iint\limits_S \left[(\mathbf{r}, \mathbf{r}_u) \frac{M^* f_v - N^* f_u}{\Lambda^4} + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) \frac{M^* f_u - L^* f_v}{\Lambda^4} \right] dA. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) мы получаем такое обобщение формулы Герглотца

$$2\iint\limits_S fH\, dA - 2\iint\limits_S fH^*\, dA + \iint\limits_S pf \begin{vmatrix} \mathbf{l}^* - \mathbf{l} & \mathbf{m}^* - \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^* - \mathbf{m} & \mathbf{n}^* - \mathbf{n} \end{vmatrix} dA =$$
$$\iint\limits_S \left[(\mathbf{r}, \mathbf{r}_u) \frac{(M - M^*) f_v - (N - N^*) f_u}{\Lambda^4} + (\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) \frac{(M - M^*) f_u - (L - L^*) f_v}{\Lambda^4} \right] dA. (3)$$

В частности, из этого равенства получаем такую теорему

Теорема 1. Если изометричные компактные поверхности S и S^* имеют общую среднюю кривизну, то для них и для любой функции f верно следующее равенство

$$\iint_S pf\,\Delta\,dA =$$

$$\iint_S \left[(\mathbf{r},\mathbf{r}_u)\frac{(M-M^*)f_v-(N-N^*)f_u}{\Lambda^4}+(\mathbf{r},\mathbf{r}_v)\frac{(M-M^*)f_u-(L-L^*)f_v}{\Lambda^4}\right] dA,$$

где $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} l^*-l & m^*-m \\ m^*-m & n^*-n \end{vmatrix}$$

и, в частности, $\Delta \leq 0$.

Есть много и других способов получения новых интегральных формул. Например, возьмем другое равенство Минковского

$$\iint_S Hp\ dA + A = 0,\ \text{где А – площадь поверхности,}$$

доказательство которого основано на соотношении

$$d(\mathbf{n}, \mathbf{r}, d\mathbf{r}) = (2 + 2pH)dA.$$

Если мы используем 1-форму $f \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{r}, d\mathbf{r})$, то приходим к равенству

$$2\iint_S fHp\ dA + 2\iint_S f\ dA =$$

$$-\iint_S \left[\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}_u)f_u}{\Lambda^2} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v)f_v}{\Lambda^2}\right]\ dA = \frac{1}{2}\iint_S r^2 \Delta f\ dudv$$

обобщающем упомянутое равенство Минковского. Есть и другие варианты обобщений, можно, например, в качестве f использовать различные характеристики, связанные с поверхностями, и вместо скалярной функций использовать векторные функции, в том числе и векторы деформаций, например, изгибаний.

Интегральные характеристики гауссовой и средней кривизны поверхности

1) Выберем в формуле (1) значение $f = 1$ и сдвинем данную поверхность на произвольный вектор $\mathbf{C}$. Тогда (1) принимает вид

$$\iint\limits_S H\, dA + \iint\limits_S K(p + (\mathbf{C}, \mathbf{n}))\, dA = 0,$$

откуда получаем известное векторное соотношение

$$\iint\limits_S K\mathbf{n}\, dA = 0.$$

Аналогично, из равенства Минковского имеем

$$\iint\limits_S H\mathbf{n}\, dA = 0.$$

2) Выберем $f = p^k, k \in \mathbb{N}$. Тогда из формулы (1) можно получить равенство

$$2 \iint_S p^k H \; dA + (2+k) \iint_S K p^{k+1} \; dA = k \iint_S (\mathbf{r}^2) p^{k-1} K \; dA. \quad (4)$$

Равенство (4) не зависит от положения поверхности S в пространстве. Это значит, что мы можем перенести ее на произвольный постоянный вектор $\mathbf{C}$ и равенство останется верным. Отметим начальное положение всех объектов нижним индексом 0, т.е. пишем $\mathbf{r}_0, p_0$ и т.д. После переноса на постоянный вектор $\mathbf{C}$ имеем

$$\mathbf{2} \iint_{\mathbf{S}} [\mathbf{p_0} + (\mathbf{C}, \mathbf{n})]^{\mathbf{k}} \mathbf{H} \; \mathbf{dA} + (\mathbf{2} + \mathbf{k}) \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{K} [\mathbf{p_0} + (\mathbf{C}, \mathbf{n})]^{\mathbf{k+1}} \; \mathbf{dA} = \mathbf{k} \iint_{\mathbf{S}} \left[(\mathbf{r_0})^2 + \mathbf{2}(\mathbf{r_0}, \mathbf{C}) + \mathbf{C}^2 \right] [\mathbf{p_0} + (\mathbf{C}, \mathbf{n})]^{\mathbf{k-1}} \mathbf{K} \; \mathbf{dA}. \quad (5)$$

Пусть единичная нормаль $\mathbf{n}$ имеет в стандартном базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ координаты $\{n_1, n_2, n_3\}$. Возьмем в (4) степень k равной 1. Пусть вектор сдвига равен $C_1\mathbf{i}$. Тогда имеем

$$2\iint_S (p_0 + C_1 n_1) H \, dA + 3\iint_S (p_0^2 + 2p_0 C_1 n_1 + C_1^2 n_1^2) K \, dA = \iint_S (r_0^2 + 2x_0 C_1 + C_1^2) K \, dA. \qquad (6)$$

Все члены в (6) при C_1^2 дают равенство

$$3\iint_S K n_1^2 = \iint_S K \, dA,$$

или

$$\iint_S K n_i^2 \, dA = \frac{2\pi}{3}\chi, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (7)$$

где χ обозначает эйлерову характеристику поверхности.

Теперь рассмотрим коэффициенты при C_1. Имеем

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{3p_0n_1K}\ \mathbf{dA} = \iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{x_0K}\ \mathbf{dA}.$$

в этом равенстве после переноса на вектор $\mathbf{C_2j}$ коэффициенты при C_2 дают равенство

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{Kn_1n_2}\ \mathbf{dA} = \mathbf{0}. \qquad (8)$$

Теперь рассмотрим случай произвольной степени k и возьмем в (5) члены наибольшей степенью при $\mathbf{C}$. Тогда получим

$$(\mathbf{2} + \mathbf{k}) \iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{Kn_i^{k+1}}\ \mathbf{dA} = \mathbf{k} \iint\limits_{\mathbf{S}} \mathbf{Kn_i^{k-1}}\ \mathbf{dA}.$$

Пусть k нечетно, $k = 2m - 1$, тогда используя рекуррентное соотношение и формулу (7) we find

$$\iint\limits_S \mathbf{K}\mathbf{n}_\mathbf{i}^{\mathbf{2m}}\,\mathbf{dA} = \frac{\mathbf{2}\pi\chi}{\mathbf{2m+1}}. \quad \textcolor{red}{(\mathbf{9})}$$

Если же k четно,тогда рекуррентное соотношение приводит нас в конечном счете к формуле (8) и мы для всех нечетных степеней имеем равенство

$$\iint\limits_S \mathbf{K}\mathbf{n}_\mathbf{i}^{\mathbf{2m-1}}\,\mathbf{dA} = \mathbf{0}.$$

Используя формулу (9) мы можем найти интеграл $\iint\limits_S \mathbf{K}\mathbf{n}_\mathbf{i}^{\mathbf{2m}}\mathbf{n}_\mathbf{j}^\mathbf{2}\,\mathbf{dA}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

Действительно, рассмотрим случай $i = 1$. Тогда

$$\iint\limits_S \mathbf{K}\mathbf{n}_\mathbf{1}^{\mathbf{2m}}\mathbf{n}_\mathbf{2}^\mathbf{2}\,\mathbf{dA} = \iint\limits_S \mathbf{K}\mathbf{n}_\mathbf{1}^{\mathbf{2m}}\mathbf{n}_\mathbf{3}^\mathbf{2}\,\mathbf{dA} = \mathbf{J}.$$

Из формулы (9) мы знаем

$$\iint\limits_S Kn_1^{2m+2}\, dA = \iint\limits_S Kn_1^{2m} n_1^2\, dA = \frac{2\pi\chi}{2m+3}.$$

Тогда

$$\iint\limits_S Kn_1^{2m}\, dA = \iint\limits_S Kn_1^{2m+2}\, dA + 2J$$

и

$$J = J(m) = \iint\limits_S Kn_1^{2m} n_2^2\, dA = \iint\limits_S Kn_1^{2m} n_3^2\, dA = \frac{2\pi\chi}{(2m+1)(2m+3)}.$$

Значит, имеем рекуррентное правило понижения степени

$$\iint\limits_S Kn_1^{2m+2}\, dA = \iint\limits_S Kn_1^{2m}\, dA - 2J(m)$$

с известным $2J(m)$. Например, так получаем $\iint\limits_S Kn_1^2 n_2^2\, dA = \frac{2\pi}{15}\chi$.

Теперь мы можем рассмотреть тот же подход к интегралам от всех возможных комбинаций вида $Kn_1^p n_2^q n_3^r$. Существенное наблюдение состоит в том, что метод сведения таких интегралов к подобным интегралам от меньших степеней n_1, n_2, n_3 не зависит от вида конкретной поверхности. Он всегда дает произведение $2\pi\chi$ на некоторый коэффициент, который один и тот же для всех поверхностей. Более того, вычисляя этот коэффициент для сферы, получаем такую теорему:

Теорема 2. Для любой компактной C^2-гладкой поверхности имеем

$$\iint\limits_S Kn_1^l n_2^m n_3^n \, dA = 0,$$

если хотя бы одна из степеней l, m, n нечетная. Для четных степеней имеем

$$\iint\limits_S Kn_1^{2l} n_2^{2m} n_3^{2n} \, dA = \frac{(2l)!(2m)!(2n)!(l+m+n)!}{l!m!n!(2l+2m+2n+1)!} 2\pi\chi.$$

Например, имеем равенство $\iint\limits_S Kn_1^2 n_2^2 n_3^2 \, dA = \frac{2\pi\chi}{105}$.

Следствие.

Если в интеграле $$\iint\limits_S (K n_1^l n_2^m n_3^n)\mathbf{n}\, dA$$

все степени четные или 2 или 3 из них нечетные, тогда он равен 0.

Вернемся к интегралу (4). Повторим его вид.

$$2\iint\limits_S p^k H\ dA + (2+k)\iint\limits_S K p^{k+1}\ dA = k\iint\limits_S (\mathbf{r}^2) p^{k-1} K\ dA. \qquad (4)$$

Умножая уравнение (4) на ε^k и суммируя по всем $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаем равенство

$$2\iint\limits_S \frac{H}{1-\varepsilon p} dA + \iint\limits_S \frac{2p-\varepsilon p^2}{(1-\varepsilon p)^2} K\ dA = \iint\limits_S \frac{\varepsilon \mathbf{r}^2}{(1-\varepsilon p)^2} K\ dA. \qquad (10)$$

Все три интеграла в (10) могут быть рассмотрены как некоторые аналитические функции F_1, F_2, F_3 комплексного переменного z, продолженного со значений $z = \varepsilon$ из интервала $(-1, 1)$ на всю комплексную плоскость с возможными особенностями на действительной оси и со свойством $F_1(z) + F_2(z) = F_3(z)$. Природа этих функций вовсе не изучена и мы совсем не знаем их геометрический смысл. Во всяком случае мы видим, что каждая компактная поверхность является источником интересных и пока таинственных связей с другими областями математики.

В заключение приведем аналогичный результат для замкнутых плоских кривых. Пусть замкнутая регулярная C^2-гладкая кривая $L : x = x(s), y = y(s)$ в натуральной параметризации имеет кривизну $k(s)$ и индекс вращения $\varkappa$. Тогда верна

Теорема 3. Интеграл

$$\int_L k(s)(x'(s))^p(y'(s))^q \ ds$$

равен 0, если хотя бы одна из степеней p или $\mathbf{q}$ нечетна. Если обе степени четные, тогда

$$\int_L k(s)(x'(s))^{2n}(y'(s))^{2m} \ ds = \frac{(2n-1)!(2m-1)!}{4^{n+m-1}(n+m)!}\varkappa.$$