Число ребер в подграфах дистанционных графов

Шубин Яков

Определение

Граф называется *дистанционным*, если его вершины - это точки пространства $\mathbb{R}^n$ и ребро между двумя вершинами проводится т. и т., к. расстояние между соответственными точками равно заданной константе.

Графы Джонсона

Мы рассмотрим специальный дистанционный граф $G(n, r, s)$, вершинами которого являются точки n-мерного булева куба, у которых ровно r единиц. Ребро между двумя вершинами проводится т. и т. к. слярное произведение соответственных векторов равно s.

Основная задача

Обозначим за $\rho(l)$ минимальное количество рёбер в индуцированных подграфах графа $G(n,r,s)$ с l вершинами.

Основная задача состоит в оценке асимптотики величины $\rho(l)$ при $n \to \infty$ и r, s константы.

Число независимости

Теорема (Frankl P., F¨uredi Z.).

Пусть даны числа r,s. Тогда

1) если $r > 2s + 1$, то при достаточно больших n

$$\alpha(G(n, r, s)) = C_{n-s-1}^{r-s-1}.$$

2) для любых r, s существуют константы $c(r,s)$ и $d(r,s)$, с которыми

$$c(r, s) \cdot max\{n^s, n^{r-s-1}\} \le \alpha(G(n, r, s)) \le d(r, s) \cdot max\{n^s, n^{r-s-1}\}$$

Турановский подход

Теорема Турана для дистанционных графов.

$$\rho(l) \geq (1 + o(1)) \frac{l^2}{\alpha(G(n, r, s))}.$$

Верхняя оценка

Посчитаем мат. ожидание числа рёбер при выборе случайного подграфа на l вершинах.

$$\rho(l) \leq \frac{C_n^r \cdot C_r^s \cdot C_{n-r}^{r-s}}{2} \cdot \frac{C_{C_n^r-2}^{l-2}}{C_{C_n^r}^{l}} \sim \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}.$$

Theorem 1. Дана функция $l = l(n)$ такая, что $n = o(l)$ и $l = o(n^2)$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\rho(l) \sim \frac{l^2}{2n}$$

при $n \to \infty$.

Theorem 2. Дана функция $l = l(n)$ такая, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$. Тогда существуют последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что

$$(1 + a_n)\frac{3l^2}{2n} \le \rho(l) \le (1 + b_n)\frac{9l^2}{2n}$$

и $lim_{i\to\infty} a_i = lim_{i\to\infty} b_i = 0$.

Новый результат

Theorem 3. Дана функция $l = l(n)$ такая, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\rho(l) \sim \frac{9l^2}{2n}$$

при $n \to \infty$.

Новый результат

Обобщение. Дана функция $l = l(n)$ такая, что $n^{r-1} = o(l)$ при $n \to \infty$. Тогда для графа $G(n, r, s)$ с фиксированными $r, s > 0$ выполнено соотношение

$$\rho(l) \sim \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2(r-s)!}$$

при $n \to \infty$.

Заключение

- Почти полностью закрыт случай $G(n, 3,1)$ и в общем виде закрыт случай самых больших l(n).
- В случае r=1 зазор между верхней и нижней оценкой остаётся лишь в константу.
- В самом общем случае верхняя и нижняя оценка всё еще отличаются по порядку.