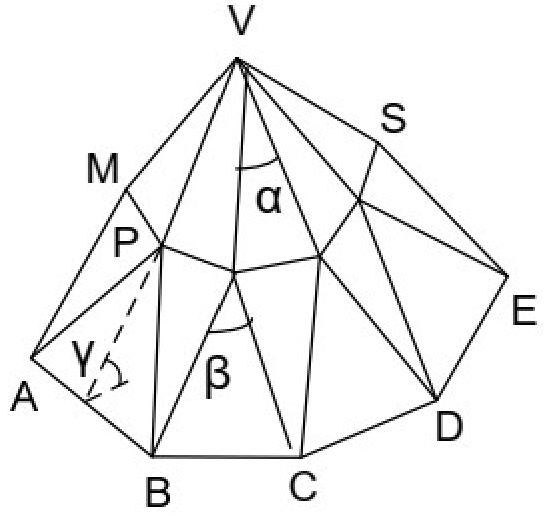
Южно-Российский государственный политехнический университет, г. Новочеркасск

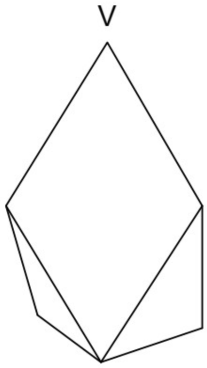
Правильногранные многогранники с ромбическими вершинами: условные рёбра, полнота списка

МГУ, 13.05.2026

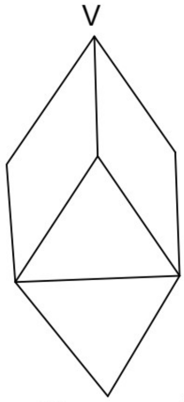


V
S
M
α
P
E
γ
β
A
D
B
C

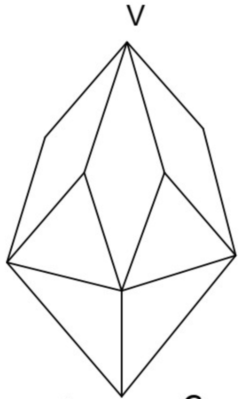
ПРАВИЛЬНОГРАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ ПЕРВОГО ТИПА



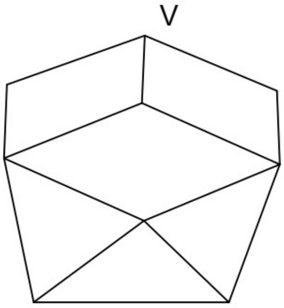
a) C_{3v}



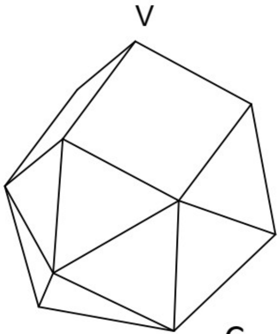
b) C_{4v}



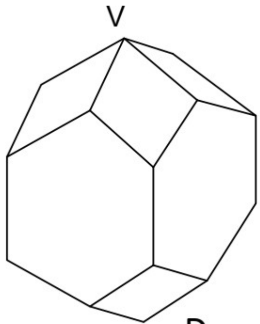
c) C_{5v}



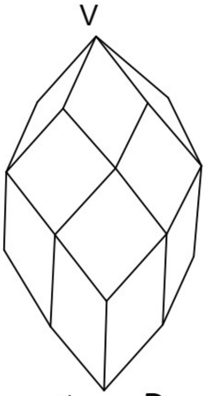
d) C_{3v}



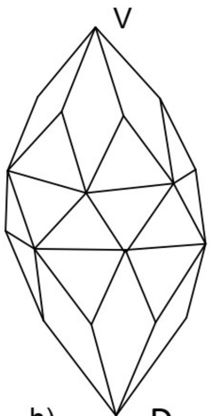
e) C_{3v}



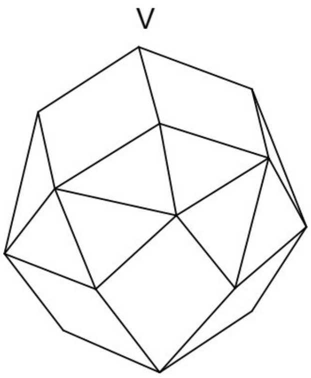
f) D_{4h}



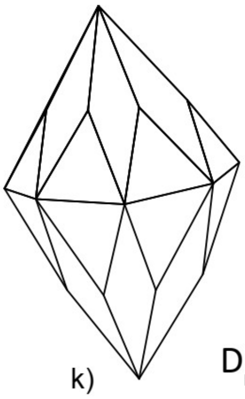
g) D_{5d}



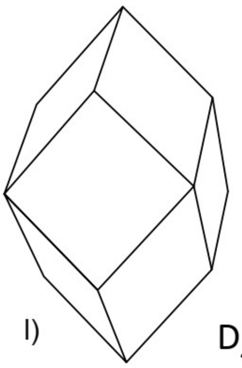
h) $D_{nd,\ 5<n<12}$



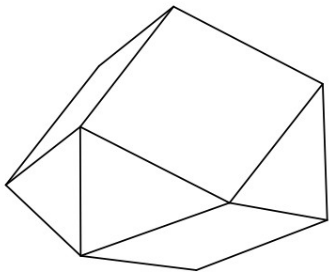
i) D_{4d}



k) $D_{nh,\ 4<n<12}$



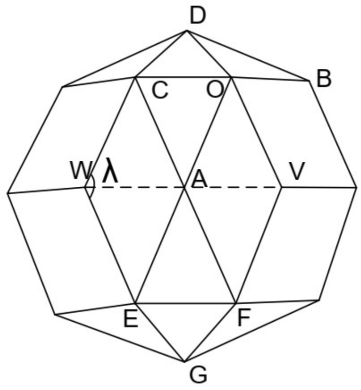
l) D_{4h}



m) D_{3h}

Ромбически наращенный тетраэдр
с двадцатью восемью гранями

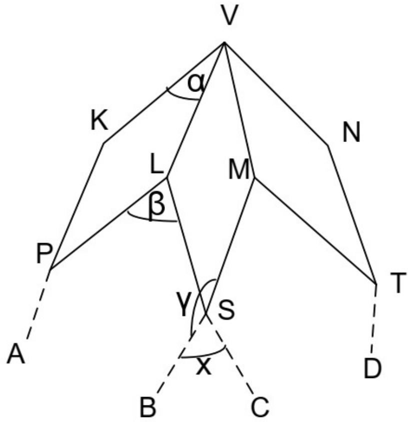
четыре 3-ромбических тупоугольных вершины

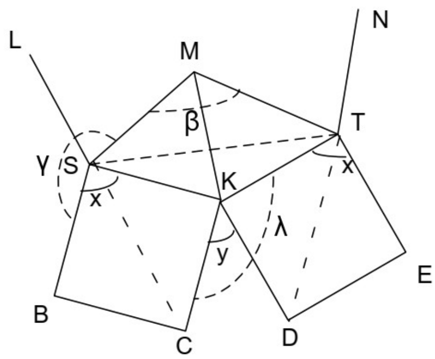


(1) 7-*гранник с треугольными гранями и одной* 3-*ромбической вершиной* (*расширенный октаэдр*);
(2) 12-*гранник с треугольными гранями и одной* 4-*ромбической вершиной*;
(3) 15-*гранник с треугольными гранями и одной* 5-*ромбической вершиной*;
(4) 13-*гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной* 3-*ромбической вершиной*;
(5) 19-*гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной* 3-*ромбической вершиной*;

(6)—(11) *шесть многогранников с двумя n-ромбическими вершинами, $6 \leqslant n < 12$, и правильными треугольными гранями*;
(12) 24-*гранник с двумя* 4-*ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями*;
(13) 20-*гранник с двумя* 5-*ромбическими вершинами и квадратными гранями*;
(14) *удлинённый ромбический додекаэдр*;

RR-*многогранники с неизолированными ромбическими вершинами*:
(15) 12-*гранник с двумя неизолированными* 4-*ромбическими вершинами и четырьмя квадратами* (*дважды расширенный кубооктаэдр*);
(16)—(22) *семь многогранников с двумя неизолированными n-ромбическими вершинами*, $4 < n < 12$, *и треугольными гранями*;
(23) 12-*гранник с двумя неизолированными тупоугольными ромбическими вершинами.*





Лемма 4. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них парами правильных треугольников, имеющих обще нефиктивное ребро, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены правильные многоугольники.*

$$y = \arccos\left(\cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'})\right).$$

$$\widehat{\gamma} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) + \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right). \tag{22}$$

$$\widehat{\Gamma} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos x + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{27}$$

$$\lambda = \arccos\left(\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa})\right). \tag{31}$$

$$\widehat{\kappa'} = \arccos\left(\frac{\cos x - \cos\beta\cos\lambda}{\sin\beta\sin\lambda}\right).$$

$$\widehat{\kappa} = \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right).$$

СОСТАВНЫЕ RR-МНОГОГРАННИКИ С УСЛОВНЫМИ РЁБРАМИ

Из определения составного RR-многогранника следует, что для того, чтобы найти все составные RR-многогранники с условными рёбрами, нужно рассмотреть все возможные присоединения ромбических пирамид к многогранникам из следующих классов: пять правильных (платоновых) многогранников, тринадцать полуправильных (архимедовых), девяносто два многогранника Джонсона (правильногранных) и бесконечные серии правильногранных призм и антипризм, а также класс из семидесяти восьми правильногранных многогранников с условными рёбрами, представленный в [9]. Возможными считаются такие присоединения ромбических пирамид, в результате которых получается выпуклый RR-многогранник с условными рёбрами. Далее будет показано, что существует конечное число таких присоединений. Проводится также анализ доказательств существования всех 46-ти составных RR-многогранников без условных рёбер из [12] и проверяется возможность возникновения в каждом случае условных рёбер. Справедлива следующая

Теорема 1. *Существуют только тридцать два составных RR-многогранника с условными рёбрами.*

Далее γ_n будем обозначать двугранный угол γ n-ромбической пирамиды, $\delta_{n,m}$ — двугранный угол n-угольной грани с m-угольной.

выражение для косинуса угла треугольной грани антипризмы

с пятиугольным основанием имеет вид:

$$\cos \delta_{3,5} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin \gamma_5 = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{15}}, \qquad (3.3)$$

Очевидно, что треугольная грань ромбической пирамиды с углом γ_m будет находиться в одной плоскости с присоединяемой n-угольной гранью, если выполнено равенство:

$$\sin^2 \gamma_m + \cos^2 \delta_{n,m} = 1. \qquad (3.5)$$

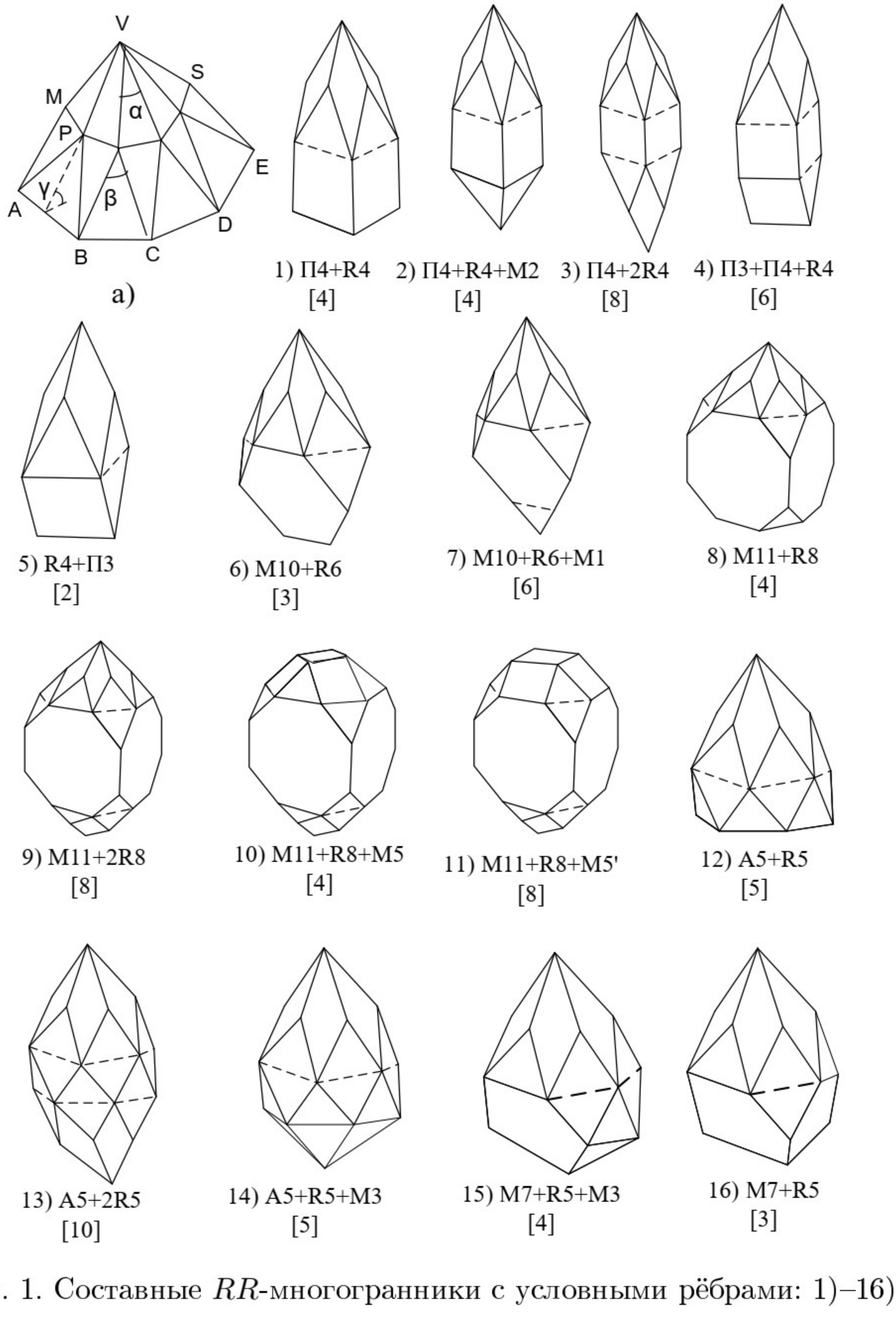


Рис. 1. Составные RR-многогранники с условными рёбрами: 1)–16)

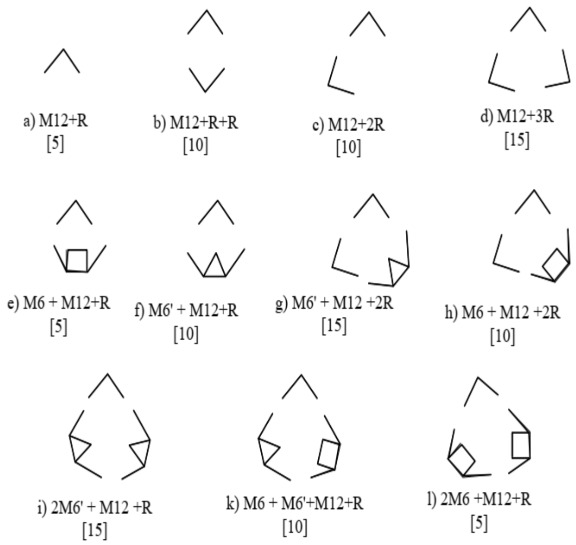


Рис. 2. Ромбические усечённые додекаэдры: a)–d); ромбические наращённые усечённые додекаэдры: e)–l.

На схематическом рис. 2 присоединённые к усечённому додекаэдру ромбические пирамиды изображены в форме угла, пятискатные купола — в форме квадрата внутри угла, повёрнутые купола — в форме треугольника внутри угла.

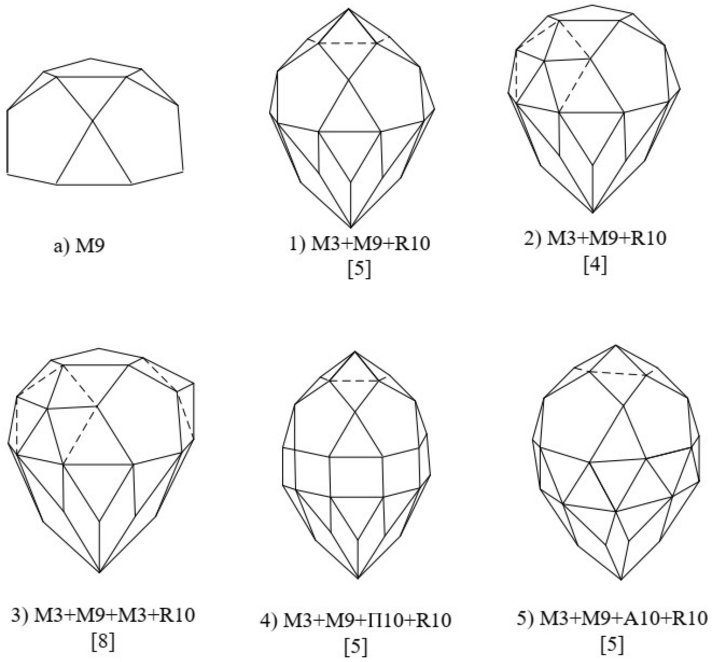
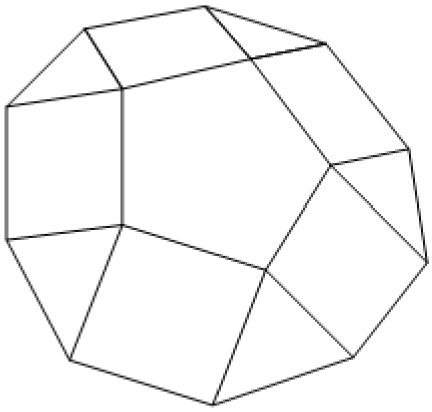


Рис. 3. Пятискатная ротонда: a); ромбические наращённые пятискатные ротонды: 1)–5).

Полученный класс из тридцати двух многогранников в E^3 состоит из всех возможных RR-многогранников с условными рёбрами и без условных вершин. Данный класс расширяет список [9] из 78-ми правильногранных многогранников в направлении допущения в многограннике ромбических вершин с углами ромбов, отличными от 60 градусов. Максимальное количество симметричных ромбических вершин в одном и том же многограннике полученного класса равно трём.

Пятискатный купол



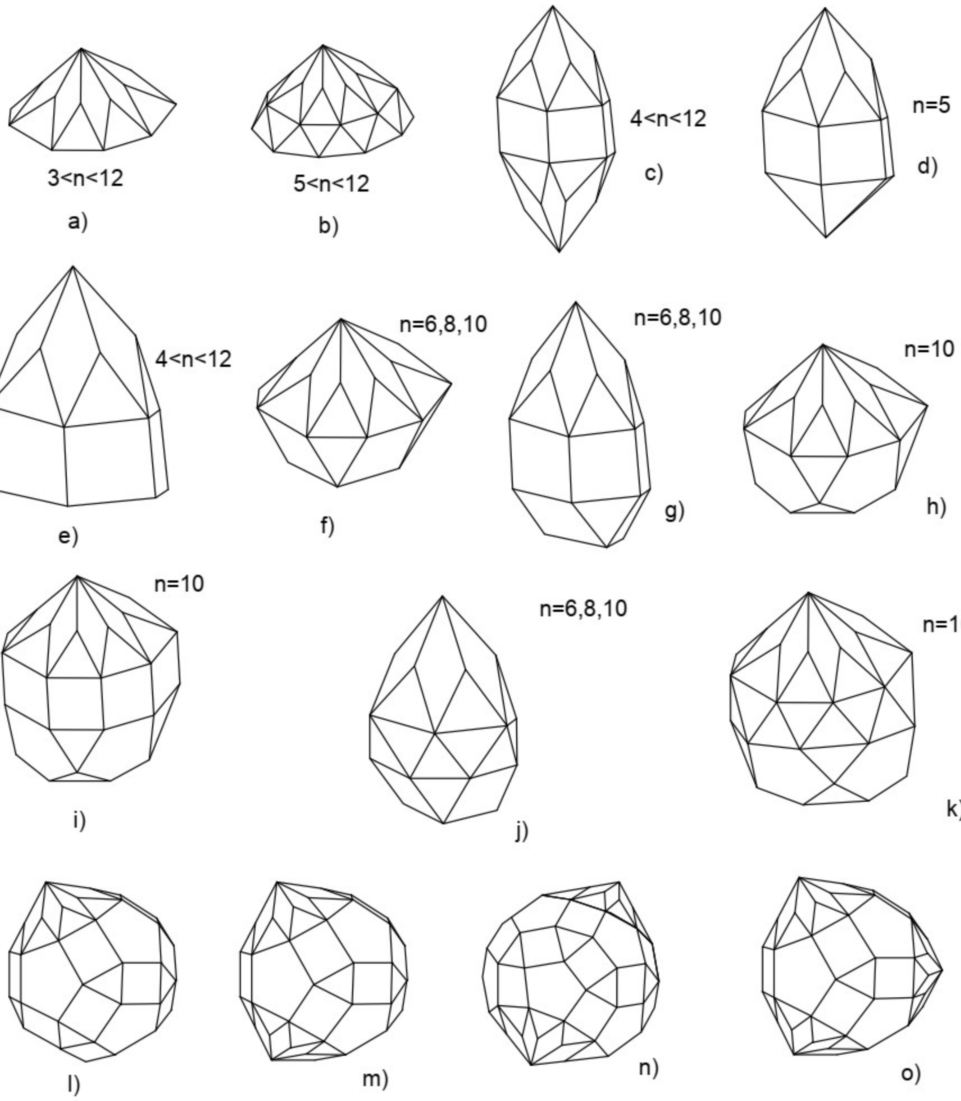


Рис. 1. Составные RR-многогранники второго типа.

Составным будем называть такой RR-многогранник второго типа, который можно разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

В данной работе будут найдены все составные RR-многогранники второго типа.

Для того, чтобы найти все составные RR-многогранники, необходимо проверить все случаи возможного присоединения ромбических пирамид к выпуклым многогранникам с правильными гранями, учитывая при этом и бесконечные серии последних. Очевидно, что для этого достаточно рассмотреть правильные многогранники, равноугольно-полуправильные многогранники и многогранники Джонсона — Залгаллера, а также бесконечные серии правильногранных призм и антипризм. Отметим сразу, что число таких присоединений окажется конечным.

Теорема 1. *Существуют только пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа.*

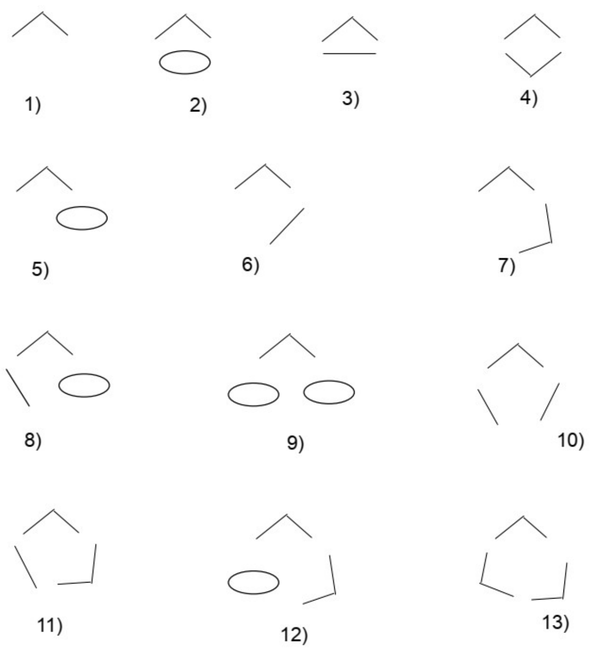


Рис. 2. Ромбические ромбоикосододекаэдры: 1)–13).

Если не учитывать отсечения и скручивания пятискатных куполов, то получим четыре ромбических ромбоикосододекаэдра с одной, двумя и тремя ромбическими вершинами (рис. 1, l)–o)). Комбинируя эти четыре с поворотами и отсечениями пятискатных куполов, получим еще девять составных RR-многогранников. На рис. 2 условно изображены схемы присоединения ромбических пирамид (в форме угла), скручиваний куполов (в виде овала) и отсечений куполов (в виде отрезка прямой). На этом рисунке изображены схемы всех тринадцати возможных *ромбических ромбоикосододекаэдров*, причем многогранникам l), m), n), o) на рис. 1 соответствуют схемы 1), 7), 4), 13) на рис. 2. Отметим, что ромбические ромбоиксододекаэдры можно рассматривать как полученные из многогранников Джонсона — Залгаллера. Действительно, отсечения и скручивания пятискатных куполов ромбоикосододекаэдра приводят к правильногранным многогранникам.