Изгибания скольжения компактных поверхностей и гипотеза Эйлера

И.Х. Сабитов

14 февраля 2023 г.

План доклада

1. История вопроса

1. Гипотеза Эйлера, сформулированная им в 1770-х годах и опубликованная в первом томе его посмертных сочинений [1] под номером 97 по записям его ученика М.Е. Головина, утверждает. что компактная (т.е. ограниченная и без края) поверхность не допускает деформации изгибания. На самом деле у Эйлера нет такой четкой формулировки, так как в его время еще не было таких понятий, как компактность, непрерывность и изгибание. Такое понимание его предположения (даже будто бы и утверждения!) стало популярным, наверно, после появления статьи [2], в которой работе 97 из [1] приписывается именно такое толкование (хотя в той или иной формулировке этот вопрос наверняка должен был возникать у многих авторов еще в XIX веке, например, у Гаусса, Бонне, Петерсона и др.).

К настоящему времени гипотеза Эйлера доказана для выпуклых поверхностей в самой общей постановке, а для остальных классов поверхностей есть только отдельные результаты, о которых можно прочитать в [3], Во многих работах, в частности, и в [3], предлагается уточнить постановку задачи, обращая внимание на класс гладкости поверхности и ее рассматриваемых изгибаний, мы же сейчас предлагаем уточнить и вид изгибания. Среди многих видов изгибаний выделяются так называемые *изгибания скольжения*, в ходе которых точки поверхности изменяют свое положение в пространстве, оставаясь на само́й поверхности. Примером такого изгибания (правда, тривиального) является вращение поверхности вращения вокруг своей оси вращения. Изгибания скольжения известны, по-видимому, уже с 19-го века, по крайней мере они упоминаются в книге [4] со ссылкой на работу Бианки. В [4] утверждается, а в [5] доказывается, что метрика поверхности, допускающей изгибания скольжения, локально является метрикой вращения, и там же ставится вопрос о строении такой поверхности в целом при условии ее компактности.

Как ответ на этот вопрос в [6] показано, что такая поверхность должна быть гомеоморфна сфере или тору с метрикой вращения в целом. В настоящей работе доказана следующая теорема

Theorem

Любая компактная C^2 - гладкая поверхность в R^3 с метрикой вращения, допускающая аналитические изгибания скольжения, допускает также скользящие б.м. изгибания 1-го порядка.

Мы предъявляем явный вид таких б.м. изгибаний, но вопрос о том, являются ли эти б.м. изгибания тривиальными или нет, в общем случае пока остается открытым.

2. Доказательство теоремы

2. Пусть рассматриваемая поверхность S допускает изгибания скольжения по себе и имеет топологический тип сферы. Тогда она является погружением в R^3 единичной сферы $S_0 \to R^3$ и ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)\}. \tag{1}$$

Известно, что введенные координаты (ξ, η) всегда можно считать изотермическими, поэтому метрика поверхности имеет вид

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{2}$$

(учтено, что согласно [6] метрика должна быть метрикой вращения).

Изгибание скольжения поверхности по себе имеет в каждой точке поверхности скорость $\mathbf{Z}(\xi, \eta)$, лежащую на касательной плоскости к поверхности, т.е. $\mathbf{Z}$ имеет вид

$$\mathbf{Z} = a(\xi, \eta)\mathbf{r}_\xi + b(\xi, \eta)\mathbf{r}_\eta. \tag{3}$$

Эту скорость можно толковать также как поле бесконечно малого изгибания, которое по определению является полем начальных скоростей изгибания, поэтому векторное поле $\mathbf{Z}$ должно удовлетворять уравнению

$$d\mathbf{r}d\mathbf{Z} = 0. \tag{4}$$

При раскрывании уравнения б.м изгибания $d\mathbf{r}d\mathbf{Z} = 0$ по дифференциалам надо иметь в виду, что

$$\mathbf{r}_\xi^2 = \Lambda^2,\ \mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_\eta = 0,\ \mathbf{r}_\eta^2 = \Lambda^2,$$

$$2\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\xi\xi} = (\Lambda^2)_\xi,\ 2\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\xi\eta} = (\mathbf{r}_\xi^2)_\eta = (\Lambda^2)_\eta,\ 2\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\xi\eta} = (\mathbf{r}_\eta^2)_\xi = (\Lambda^2)_\xi, 2\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\eta\eta} = (\Lambda^2)_\eta.$$

Тогда из (4) получим систему

$$\begin{cases} a_\xi\Lambda^2 + \dfrac{a}{2}(\Lambda^2)_\xi + \dfrac{b}{2}(\Lambda^2)_\eta = 0 \\ b_\eta\Lambda^2 + \dfrac{a}{2}(\Lambda^2)_\xi + \dfrac{b}{2}(\Lambda^2)_\eta = 0 \\ b_\xi\Lambda^2 + a\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\xi\xi} + \dfrac{b}{2}(\Lambda^2)_\xi + a_\eta\Lambda^2 + \dfrac{a}{2}(\Lambda^2)_\eta + b\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\eta\eta} = 0. \end{cases}$$

Вычитая 2-е уравнение из первого, получаем

$$a_\xi - b_\eta = 0, \tag{5}$$

а сумма этих уравнений дает уравнение

$$a_\xi + b_\eta = -a(\ln \Lambda^2)_\xi - b(\ln \Lambda^2)_\eta. \tag{6}$$

Учитывая разложения вторых производных радиус-вектора по базису $(\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v,\ \mathbf{n})$ с использованием символов Кристоффеля, 3-е уравнение принимает вид

$$a_\eta + b_\xi = 0. \tag{7}$$

Видим, что уравнения (5) и (7) составляют для функций a и b систему Коши-Римана, следовательно, функция $W = a + ib$ является голоморфной на всей поверхности.

Считаем, что координаты (ξ, η) являются на параметрической сфере S_0 стереографическими координатами. Тогда точка ∞ является на S_0 особой точкой параметризации. Пусть ей на поверхности S соответствует некоторая точка A. Перейдем к координатам $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ по закону $\zeta = \dfrac{1}{\tilde{\zeta}}$ с обозначением $\zeta = \xi + i\eta$, $\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$. Тогда точке A будет соответствовать регулярная точка $\tilde{\zeta} = 0$. Метрическая форма ds^2 как инвариантная величина не изменится, но примет вид

$$ds^2 = \tilde{\Lambda}^2(\tilde{\zeta})(d\tilde{\xi}^2 + d\tilde{\eta}^2) = \Lambda^2(\frac{1}{\tilde{\zeta}})\frac{d\tilde{\xi}^2 + d\tilde{\eta}^2}{(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^2},$$

следовательно, $\Lambda^2(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ как $O(\dfrac{1}{\rho^4}), \rho \to \infty$ (так как $\tilde{\Lambda}^2(\tilde{\zeta})$ при $\tilde{\zeta} \to 0$ стремится к отличной от нуля конечной величине). Тогда $a^2 + b^2 = \dfrac{|Z|^2}{\Lambda^2(\rho)} = O(\rho^4), \rho \to \infty$ (в слабом смысле, т.е. рост не выше 4-й степени).

Значит, целая голоморфная функция $W = a + ib$ является многочленом не выше 2-й степени, поэтому в самом общем случае $W(\zeta)$ имеет вид

$$W = a + ib = a_0\zeta^2 + a_1\zeta + a_2, (|a_0| \geq 0). \tag{8}$$

Далее, с учетом равенства (6) имеем $2Re\ W'_\zeta = -a(\ln\Lambda^2)_\xi - b(\ln\Lambda^2)_\eta$ или

$$Re\ W' + a(\ln\Lambda)_\xi + b(\ln\Lambda)_\eta = 0. \tag{9}$$

Используя вид W из (8) и учитывая, что Λ зависит только от $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, получаем равенство

$$2a_\zeta + a_1 + 2\bar{\zeta} + \bar{a}_1 = (\zeta\bar{W} + \bar{\zeta}W)(\ln\Lambda)'_\rho = 0,$$

из которого, положив $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, приходим к уравнениям

$$a_1 + \bar{a}_1 = 0,$$
$$2a_0\rho e^{2i\varphi} + 2\bar{a}_0\rho + (\bar{a}_0\rho^2 + \bar{a}_2\rho e^{2i\varphi} + a_0\rho^2 e^{2i\varphi} + a_2)(\ln\Lambda)'_\rho = 0.$$

Так как второе уравнение выполняется тождественно по φ, получается вывод, что $a_0 = a_2 = 0$ и $a_1 = ic$, где c - действительное число. Значит, $W = a + ib = ic\zeta, a = -c\eta, b = c\xi$, и

$$\mathbf{Z} = c(-\eta\mathbf{r}_\xi + \xi\mathbf{r}_\eta), \tag{10}$$

при этом можем считать, что с самого начала в точке $\zeta = 0$ базисные векторы подчинялись условию $\mathbf{r}_\xi(0) = \Lambda(0)\mathbf{i}, \mathbf{r}_\eta(0) = \Lambda(0)\mathbf{j})$. Таким образом, $\mathbf{Z}(0,0) = \mathbf{0}$, и так как $\mathbf{r}_\xi^2 + \mathbf{r}_\eta^2 = 2\Lambda^2(\zeta) = O(\rho^{-4})$ при $\rho \to \infty$, получаем, что $\mathbf{Z}(\infty) = 0$. Значит, при изгибании скольжения на компактной поверхности есть по крайней мере две точки, в которых начальная скорость изгибания равна нулю.

На самом деле, в формуле (10) ничего неожиданного нет: в полярных координатах она имеет вид $\mathbf{Z} = c\mathbf{r}_\varphi$, т.е. скольжение идет по касательной к φ-линиям.

3. Тривиально ли полученное б.м. изгибание?

Почему важен такой вопрос? Если поле $\mathbf{Z}$ окажется тривиальным, то это будет означать, что поверхность не допускает аналитических по параметру изгибаний и для изгибаний скольжения гипотеза Эйлера будет доказанной. Посмотрим, тривиально ли полученное поле б.м. изгибания 1-го порядка. Если к данному полю б.м. изгибания добавить произвольное поле тривиального б.м. изгибания, то снова получим некоторое поле б.м. изгибания. Если поле $\mathbf{Z}$ из (10) тривиальное, тогда добавляемое поле тривиального б.м. изгибания можно подобрать так, чтобы новое поле было тождественно нулевым. Так как поле (10) уже равно $\mathbf{0}$ в точке O с координатами $(\xi, \eta) = (0.0)$, то добавлять можно только поле вращения $\mathbf{V} \times \mathbf{r}$ с постоянным полем $\mathbf{V}\{V_1, V_2, V_3\}$, при этом не обязательно, чтобы новое поле тоже было полем скольжения. Следовательно, мы должны проверить, можно ли подобрать поле $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$c(-\eta \mathbf{r}_\xi + \xi \mathbf{r}_\eta) + \{V_2 z - V_3 y, V_3 x - V_1 z, V_1 y - V_2\} = \mathbf{0}. \qquad (11)$$

Проверку такой возможности проводим при трех возможных случаях.

Первый случай $V_1 = V_2 = 0$. Тогда уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} c(-\eta x_\xi + \xi x_\eta) - V_3 y &= 0, \\ c(-\eta y_\xi + \xi y_\eta) + V_3 x &= 0, \\ c(-\eta z_\xi + \xi z_\eta) &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

Переходя от координат (ξ, η) к полярным координатам (ρ, φ), получаем систему

$$\begin{aligned} c x_\varphi - V_3 y &= 0, \\ c y_\varphi + V_3 x &= 0, \\ z_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} c^2 x_{\varphi\varphi} + V_3^2 x &= 0, \\ c^2 y_{\varphi\varphi} + V_3^2 y &= 0, \\ z = z(\rho) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

Из этой системы выводим уравнение поверхности

$$x = C_1(\rho)\cos(\frac{V_3}{c}\varphi) + C_2(\rho)\sin(\frac{V_3}{c}\varphi)$$
$$y = D_1(\rho)\cos(\frac{V_3}{c}\varphi) + D_1(\rho)\sin(\frac{V_3}{c}\varphi)$$
$$z = z(\rho),$$

а требование регулярности поверхности около точки O приводит к равенству $V_3 = c$. Далее, эта поверхность должна иметь метрику

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2),$$

что, в частности, накладывает на коэффициенты C_1, C_2, D_1, D_2 условие выполнения равенств

$$C_1 C_2 + D_1 D_2 = 0, C_1^2 + D_1^2 = D_1^2 + D_2^2 = \rho^2\Lambda^2,$$

откуда получаем представления

$$C_1 = \rho\Lambda(\rho)\cos\alpha, D_1 = \rho\Lambda(\rho)\sin\alpha, C_2 = \rho\Lambda(\rho)\cos\beta, D_2 = \rho\Lambda(\rho)\sin\beta,$$

с равенством $\cos(\alpha-\beta) = 0$. Равенство $\mathbf{r}_\rho^2 = \Lambda^2$ получается за счет подбора функции $z(\rho)$, а равенство $(\mathbf{r}_\rho \mathbf{r}_\varphi) = 0$ доказывается прямой проверкой

В итоге получается, что поверхность является поверхностью вращения с осью вращения Oz, а ее найденное б.м. изгибание скольжения есть не что иное как вращение вокруг Oz. Значит, в рассмотренном случае нетривиального изгибания скольжения нет и для поверхностей вращения в этом классе изгибаний гипотеза Эйлера оказывается верной.

Второй случай $V_3 = 0, V_1 \neq 0, V_2 \neq 0$. Тогда уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} c(-\eta x_\xi + \xi x_\eta) + V_2 z = 0, \\ c(-\eta y_\xi + \xi y_\eta) - V_1 z = 0, \\ c(-\eta z_\xi + \xi z_\eta) + V_1 y - V_2 x = 0. \end{aligned}$$

Переходя от координат (ξ, η) к полярным, получаем систему

$$c x_\varphi + V_2 z = 0, \tag{14}$$

$$c y_\varphi - V_1 z = 0, \tag{15}$$

$$c z_\varphi + V_1 y - V_2 x = 0,$$

откуда имеем

$$c^2 z_{\varphi\varphi} + (V_1^2 + V_2^2) z = 0.$$

Выберем V_1 и V_2 такими, чтобы было $V_1^2 + V_2^2 = c^2$, и для z получим значение

$$z = C_1(\rho)\cos\varphi + C_2(\rho)\sin\varphi. \tag{16}$$

Теперь из (14) и (15) можем найти x и y:

$$x = -\frac{V_2}{c}[C_1(\rho)\sin\varphi - C_2(\rho)\cos\varphi] + \frac{C_3(\rho)}{c} \tag{17}$$

$$y = \frac{V_1}{c}[C_1(\rho)\sin\varphi - C_2(\rho)\cos\varphi] + \frac{C_4(\rho)}{c}. \tag{18}$$

Коэффициенты $C_i(\rho), i = 1, 2, 3, 4$ находим из условия, что метрика поверхности известна. В частности, из соотношений

$$x_\varphi = -\frac{V_2}{c}z,\ \ y_\varphi = \frac{V_1}{c}z,\ \ z_\varphi = xV_2 - yV_1$$

при выборе $V_1^2 + V_2^2 = c^2$ находим, что

$$\rho^2\Lambda^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = C_1^2(\rho) + C_2^2(\rho).$$

Значит,

$$C_1 = \rho\Lambda(\rho)\cos\alpha,\ \ C_2 = \rho\Lambda(\rho)\sin\alpha$$

и получаем такой вид для компонент радиуса-вектора поверхности:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{V_2}{c}(\rho\Lambda)\sin(\varphi-\alpha)+\frac{C_3(\rho)}{c}\\
y &= \frac{V_1}{c}(\rho\Lambda)\sin(\varphi-\alpha)+\frac{C_4(\rho)}{c}\\
z &= \rho\Lambda\cos(\varphi-\alpha).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Остается найти $C_3(\rho)$ и $C_4(\rho)$ из условия знания остальных слагаемых метрики ds^2. Пропуская подробности вычислений, скажем только, что искомая поверхность окажется полученной из классической поверхности вращения с уравнением

$$
x=\rho\Lambda\cos\varphi, y=\rho\Lambda\sin\varphi, z=z(\rho)
$$

действием некоторой ортогональной матрицы. Значит, и этом случае мы не получаем новых поверхностей с выполнением гипотезы Эйлера.

Это же верно и в **третьем** случае, когда все три компоненты вектора вращения $\mathbf{V}$ отличны от нуля. Тем самым получается, что **если метрика вращения допускает изометрическую реализацию в** R^3 **в виде некоторой поверхности, отличной от поверхности вращения, то любая такая поверхность является нежесткой относительно б.м. изгибаний скольжения.**
Все высказанные утверждения верны и для поверхностей с метрикой вращения топологического типа тора.

- L. Euleri, Opera postuma. I. Petropoli, 1862, pp. 494-496.
- H/ Gluck, Almost all simply connected closed surfaces are rigid. Lectue Notes in Math., 1975, v.438, pp.225-240 (русский перевод в сборнике "Математика М., Мир, вып. 18, с. 148-163.)
- И.Х. Сабитов, К гипотезе Эйлера о неизгибаемости компактных поверхностей. http://dfgm.math.msu.su/chairsem.php (2022).
- Каган В.Ф., Основы теории поверхностей. Часть вторая. М.-Л., ОГИЗ, 1948.
- Spivak M., A comprehensive introduction in Differential Geometry, vol. 5, Berkeley: Publish or Perish, 1979, 661 p.
- Сабитов И.Х., Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя. Фундаментальная и прикладная математика, 1995, 1:1, с. 281-288.