

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: "МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ"

*Для студентов 1 – 3-го курсов отделения механики
механико-математического факультета МГУ
Профессор В.И. Горбачев*

1	Общие сведения.	3
1.1	О механике в бытовом и научном смысле.	3
1.2	Механика сплошных сред (МСС).	3
1.3	Следствия гипотезы сплошности.	3
1.4	Основные разделы МСС.	3
1.5	Механика деформируемых твердых тел.	3
1.6	Изотропия и анизотропия. Однородность и неоднородность	4
1.7	Композиционный материал (КМ).	4
1.7.1	Дисперсные, волокнистые и слоистые КМ.	5
1.7.2	Графен, нанотрубка, фуллерен.	6
1.8	Представительный объём.	6
1.9	Физическое определение эффективных свойств.	6
1.10	Масштабный эффект.	6
1.11	О необходимости теоретических методов расчета эффективных характери- стик.	7
2	Композиты с регулярной структурой.	7
2.1	Рисунки Мориса Эшера.	7
2.2	Стержень с шестигранной ячейкой.	10
2.3	Сведение прямоугольной ячейки периодичности к кубу периодичности.	11
3	Эффективные физико-механические свойства композитов.	12
3.1	Среднее значение функции в объёме.	12
3.2	Эффективные определяющие соотношения.	12
3.3	Эффективные модули Фойхта и Рейсса.	13
3.4	Вилка Фойхта–Рейсса.	14
3.5	Схема эксперимента по определению эффективных модулей Фойхта и Рейсса.	14
3.6	Суть теоретического подхода к вычислению эффективных физико - механи- ческих характеристик композитов.	15
4	Регулярные композиты. Метод Бахвалова-Победри.	15
4.1	Глобальные и локальные координаты.	15
4.2	Малый геометрический параметр.	16
4.3	Математическая формалистика метода Бахвалова–Победри (МБП)	18
4.3.1	Постановка исходной задачи.	18
4.3.2	Постановка задачи в безразмерных координатах.	19
4.3.3	Разложение решения исходной задачи в асимптотический ряд по сте- пеням малого параметра. Структурные функции.	20

4.3.4	Сведение исходного уравнения второго порядка с переменным коэффициентом к уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.	20
4.3.5	Рекуррентные уравнения для структурных функций.	21
4.3.6	Выражение коэффициентов \mathbf{h}_q через структурные функции.	21
4.4	Первая рекуррентная последовательность для вычисления структурных функций и коэффициентов \mathbf{h}_q	21
4.4.1	Условие периодичности и условие нормировки для выделения единственного решения структурных уравнений.	22
4.5	Вторая рекуррентная последовательность задач для вычисления гладкой функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$	23
4.6	Вычисление структурных функций $N_q(\zeta)$ и констант \mathbf{h}_{q-1}	24
4.6.1	Функция $N_1(\zeta)$ и константа h_0	25
4.6.2	Функции $N_q(\zeta)$ и константы \mathbf{h}_{q-1} при $q \geq 2$	25
4.6.3	Окончательные формулы для структурных функций $N_{q+1}(\zeta)$, $q=1,2,\dots$	27
4.7	Доказательство сходимости метода Бахвалова-Победри к точному решению.	28
5	Замечания по поводу рекуррентных уравнений для структурных функций. Класс Аппелевых многочленов.	29
5.1	Многочлены Бернулли.	30
5.2	Многочлены Эйлера.	30
5.3	Таблица некоторых первых многочленов Бернулли и Эйлера.	31
6	Метод Горбачева-Победри (МГП) для осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.	31
6.1	Исходная модельная задача.	32
6.1.1	Сопутствующая модельная задача.	32
6.1.2	Фундаментальное решение исходного модельного уравнения.	33
6.1.2.1	Замечание по поводу дифференцирования обобщенных функций.	33
6.1.3	Интегральная формула представления решения исходного модельного уравнения.	34
6.1.4	Вывод общего решение исходного уравнения из интегральной формулы.	34
6.1.5	Подстановка интегральной формулы в исходное уравнение.	35
7	Уравнения второго порядка общего вида.	35
7.0.6	Интегральная формула.	36
7.0.7	Общее решение сопутствующего уравнения.	37
7.0.8	Общее решение исходного уравнения.	38
7.0.9	Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения.	38
7.0.10	Построение фундаментального решения исходного уравнения.	38
7.1	Примеры.	42
7.1.1	Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$	42
7.1.2	Приближенные формулы решения уравнения Чебышева. Сравнение с точными решениями.	45
8	Заключение. Направление дальнейших исследований.	47

1 Общие сведения.

Быть студентом отделения механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова это большая ответственность и большой труд. Для успешного овладения специальностью Вам понадобятся знание многих математических дисциплин. Прежде всего это математический анализ, высшая алгебра, аналитическая геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, обобщённые дифференциальные уравнения, функциональный анализ, тензорный анализ и ряд других важных разделов математики.

1.1 О механике в бытовом и научном смысле.

Механика это очень широкое понятие. В бытовом плане механик — это человек ремонтирующий машины и механизмы. В научном плане механика подразделяется на механику абсолютно твердых тел и на механику сплошных деформируемых сред (МСС). Движение в пространстве абсолютно твердых тел изучают в курсе теоретической механики.

1.2 Механика сплошных сред (МСС).

В механике сплошных сред основным моментом является понятие сплошности, или гипотеза сплошности, в которой утверждается, что среда заполняет пространство сплошным (непрерывным) образом, то есть в любом бесконечно малом объёме содержится бесконечное число "частиц" среды. На самом деле реальная среда состоит из молекул и атомов. Расстояние между ними существенно меньше их характерных размеров, то есть можно сказать, что физическая среда в основном состоит из пустоты.

1.3 Следствия гипотезы сплошности.

Основываясь на гипотезе сплошности, в МСС

1.) *вводят различные локальные характеристики (плотности), как непрерывные (или кусочно-непрерывные) функции координат точки среды.* К таковым, например, относится плотность среды ρ , температура в точке среды T , вектор перемещений материальных точек среды $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, вектор скорости материальной точки $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и т.д.

2.) **Принятие гипотезы сплошности позволяет описывать процессы в сплошной среде с помощью дифференциальных уравнений.**

1.4 Основные разделы МСС.

Сплошная среда, в свою очередь, подразделяется на механику газа и плазмы, механику жидкостей и механику деформируемых твёрдых тел (МДТТ). К сплошной среде относят также и электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле и т.п. [1]. На самом деле деление МСС на газ, жидкость и твёрдое тело достаточно условно. В качестве примера приведу обычную воду, которая, в зависимости от температуры, может быть газом, жидкостью или твёрдым телом. Здесь будет рассмотрена механика деформируемых твердых тел и, в частности, один из основных разделов МДТТ — механика композитов.

1.5 Механика деформируемых твердых тел.

Это чрезвычайно важный раздел в МСС. Люди изначально вынуждены были заниматься строительством жилищ, различных культовых сооружений, созданием орудий и приспособлений для добычи пищи, нападения и обороны. Это приводило к накоплению правил выбора материалов (в те далёкие времена это камень, либо дерево) и их размеров. Как отмечает Степан Прокофьевич Тимошенко "Нет сомнения в том, что египтянам были уже известны некоторые эмпирические правила подобного рода" [2]. Далее Тимошенко отмечает вклад греков и римлян в дальнейшее развитие строительного искусства.

1.6 Изотропия и анизотропия. Однородность и неоднородность

Традиционные конструкционные материалы (сталь, медь, алюминий, стекло и т.д.) представляют собой изотропные и однородные материалы.

Изотропия материала означает его одинаковые физико-механические свойства в любом направлении. То есть, если мы из большого тела, в заданном месте, вырежем маленькую полоску (или стержень) в каком либо выбранном направлении, проведем испытание по определению какой либо физико-механической характеристики (например модуля Юнга), то мы получим совершенно одинаковые значения этой характеристики для образцов, вырезанных в одном и том же месте, но в различных направлениях.

Если значения определяемой характеристики зависят от направления вырезания образца для испытания, то изотропии нет и такой материал называется анизотропным [3].

Однородность материала означает, что искомая характеристика не зависит от места в теле где вырезается образец для эксперимента. **Процессы в однородных материалах описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.**

Если, при прочих равных условиях, в разных точках тела получаются разные значения характеристик, то материал является неоднородным. **Процессы в неоднородных материалах описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.**

1.7 Композиционный материал (КМ).

В книге Кристенсена "Введение в механику композитов" [4], да и во многих других книгах, под композиционным материалом (композитом) понимается любой гетерогенный материал, то есть материал разнородный по составу.

Часто композит называют многофазной средой, как в книге [5] Роберта Искандеровича Нигматулина, что, впрочем, является эквивалентом гетерогенной среды.

Виктор Александрович Ломакин рассматривал неоднородные тела, у которых свойства являются непрерывными функциями координат [6]. Если предположить, что между фазами существует переходный слой, в котором физико-механические характеристики материалов непрерывно переходят от одного к другому, тогда и композит можно считать непрерывно неоднородным телом.

Александр Николаевич Полилов под композитом понимает искусственно созданные материалы (материалы-конструкции) [7].

В книге "Механика композиционных материалов" Бориса Ефимовича Победри, основателя кафедры механики композитов на механико-математическом факультете МГУ, композит определяется как **"некая математическая модель, описываемая с помощью**

разрывных по координатам материальных функций определяющих соотношений" [8]. Определение композита, данное Б.Е. Победрей позволяет применить мощный аппарат теории обобщенных функций к исследованию процессов в композитах.

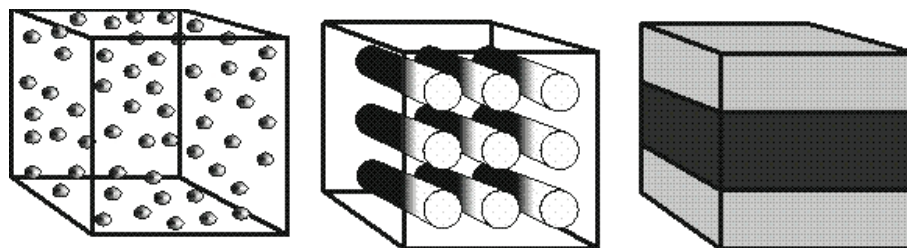
Как правило композит композит создаётся и существует в виде изделия или же конструкции

В настоящее время изделия из композитов можно создавать различными способами: печать на 3D-принтере, намотка нитью, напыление слоёв вещества и т.п. Эти и другие способы принято называть *аддитивными технологиями*, под которыми подразумевается постепенное наращивание тела до требуемых размеров и формы.

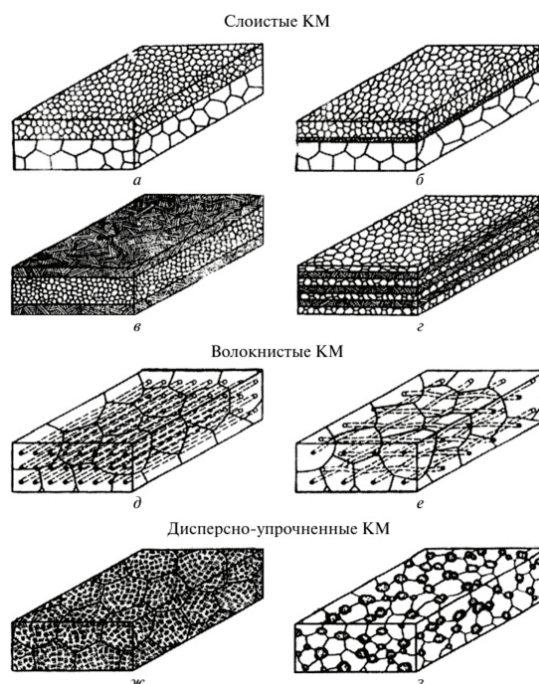
Для композита существенным является то обстоятельство, что объемы различных веществ (компонентов, фаз), составляющих тело обладают характерными размерами много меньшими характерных размеров всего тела и в тоже время они намного больше размеров молекул, так что каждое вещество в своем объеме можно считать сплошной средой.

Таким образом, в единой композиции материалов, образующих тело налицо три характерных уровня: макро, микро и нано уровень. **Поведение материала на макро и микроуровне изучает механика композитов** — один из важнейших разделов механики деформируемых твердых тел (МДТТ), который в свою очередь является разделом механики сплошных сред (МСС).

1.7.1 Дисперсные, волокнистые и слоистые КМ.

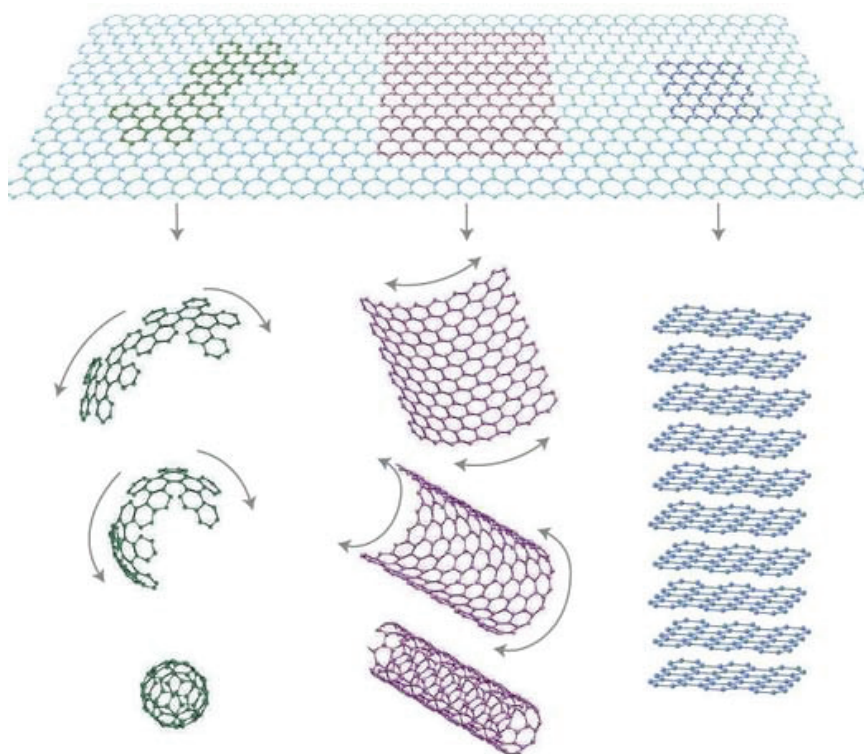


Дисперсный, волокнистый и слоистый композиты.



Дисперсный, волокнистый и слоистый композиты.

1.7.2 Графен, нанотрубка, фулерен.



Графен, нанотрубка, фулерен.

1.8 Представительный объём.

В механике композитов важным является понятие о представительном объёме вещества. В википедии приводится следующее понятие представительного объёма, позаимствованного из курса общей физики Д.В. Сивухина "Представительный объём — минимальный объём материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния тела число «носителей» рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объёму других частей данного материала с аналогичной (в статистическом смысле) конфигурацией «носителей» анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации «носителей». *В классической МСС предполагается, что размеры представительного объёма таковы, что градиентами этих полевых величин и других параметров состояния в пределах представительного объёма можно пренебречь, что позволяет считать указанные поля однородными (в статистическом смысле) в масштабах представительного объёма.*"

1.9 Физическое определение эффективных свойств.

Композиционное тело, состоящее из большого количества одинаковых представительных объёмов ведёт себя при внешних воздействиях как некоторое однородное тело, свойства которого отличны от свойств компонентов, составляющих представительный объём. Свойства такого модельного однородного тела называются эффективными свойствами.

1.10 Масштабный эффект.

При экспериментальном подходе к нахождению эффективных физико-механических свойств композитов, выясняется, что результаты существенно зависят от количества элементов, входящих в образец, над которым проводятся все эксперименты. В этом заключается суть масштабного эффекта в композитах. При увеличении числа элементов в образце наступает такой момент, когда добавление элементов в образце практически перестаёт сказываться на измеряемые величины.

Реально экспериментальный образец состоит довольно из большого числа представительных объёмов. Эксперимент над таким образцом должен быть так организован, чтобы в любом представительном объёме реализовывалось в среднем одинаковое напряженно деформированное состояние.

1.11 О необходимости теоретических методов расчета эффективных характеристик.

Эксперименты по определению эффективных физико-механических и прочностных свойств композитов трудоемки и сложны, как при их проведении, так и при подготовке образцов для экспериментов. Многие из эффективных свойства композитов имеют тензорную природу. При экспериментальном подходе, нужно заранее знать, сколько независимых компонентов имеет каждый из эффективных тензоров и соответственно спланировать эксперименты. Поэтому полный набор экспериментов по определению всех компонентов эффективных тензоров довольно длительная и дорогая процедура. При экспериментальном подходе проблематично спроектировать оптимальную процедуру создания композиционного материала с заранее заданными физико-механическими эффективными характеристиками.

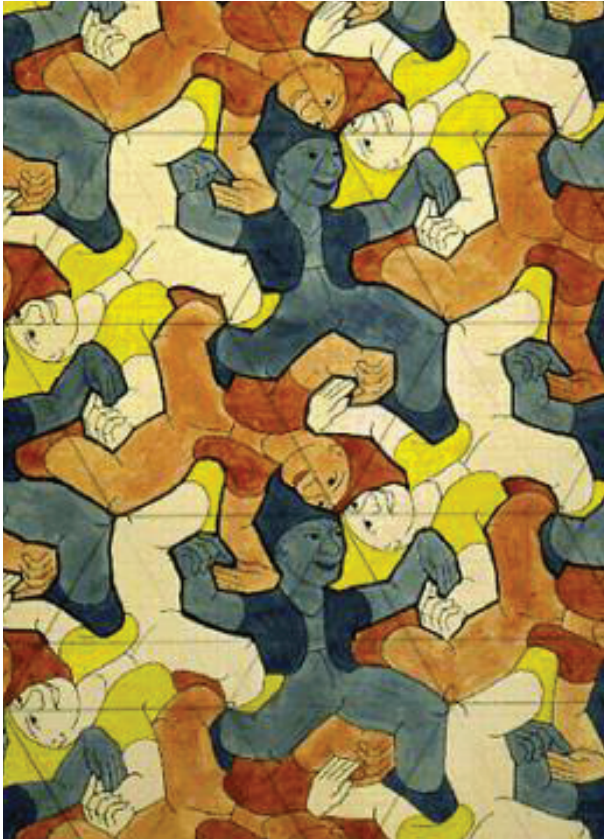
Прежде чем проводить эксперимент должна быть построена математическая модель для расчета всех эффективных тензоров. Полученные из математической модели аналитические и численные результаты позволят разработать теорию эксперимента, на котором аттестуется математическая модель.

2 Композиты с регулярной структурой.

Характерной особенностью композитов с регулярной структурой является наличие, так называемой, ячейки периодичности, или же типичного элемента (объёма). *Типичный элемент - это такой элемент, многократное повторение которого в определенной логической последовательности позволяет построить все тело.* Типичные элементы совершенно одинаковы и пересекаются друг с другом только по границам. Представительный объём состоит из одного или нескольких типичных элементов. В математике образование тела с помощью типичных элементов называется *замощением* [9]. Например плоскость можно замостить прямоугольниками, параллелограммами, правильными шестиугольниками.

2.1 Рисунки Мориса Эшера.

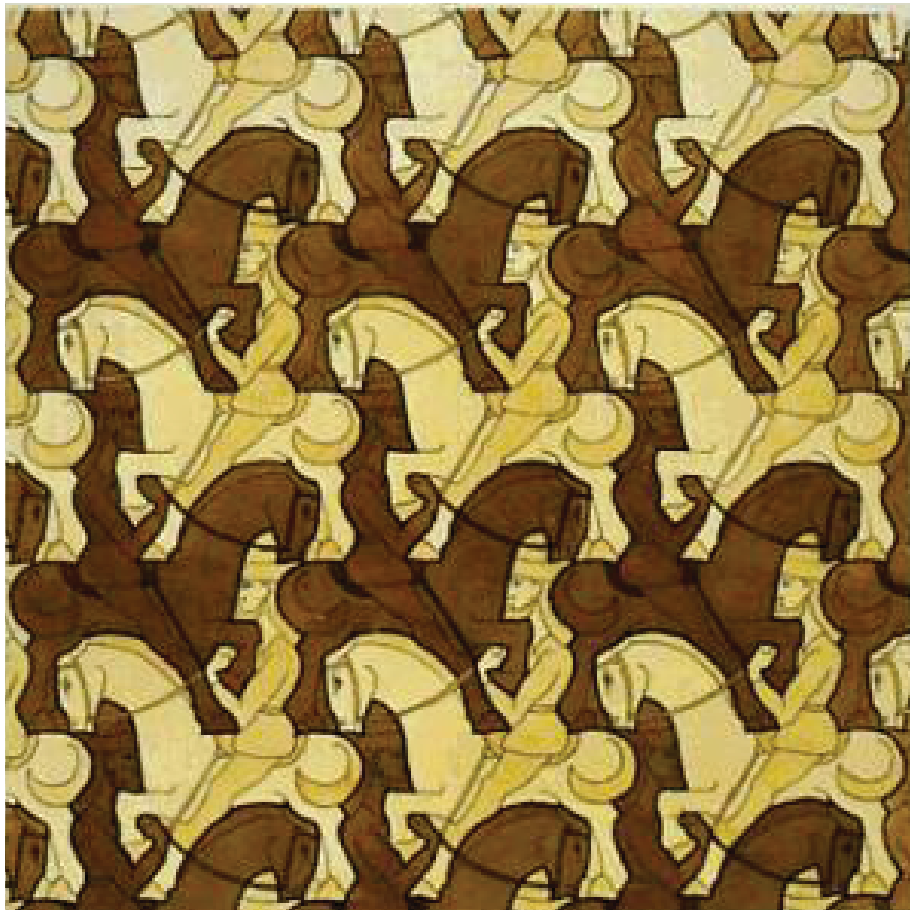
Можно придумать очень красивые замощения плоскости и пространства. Мориц Корнелиус Эшер – голландский художник второй половины прошлого века рисовал картины, многие из которых основаны на принципах замощения плоскости типичными элементами.



Танцующие люди.



Бабочки.



Лошади со всадниками.



Рыбы.

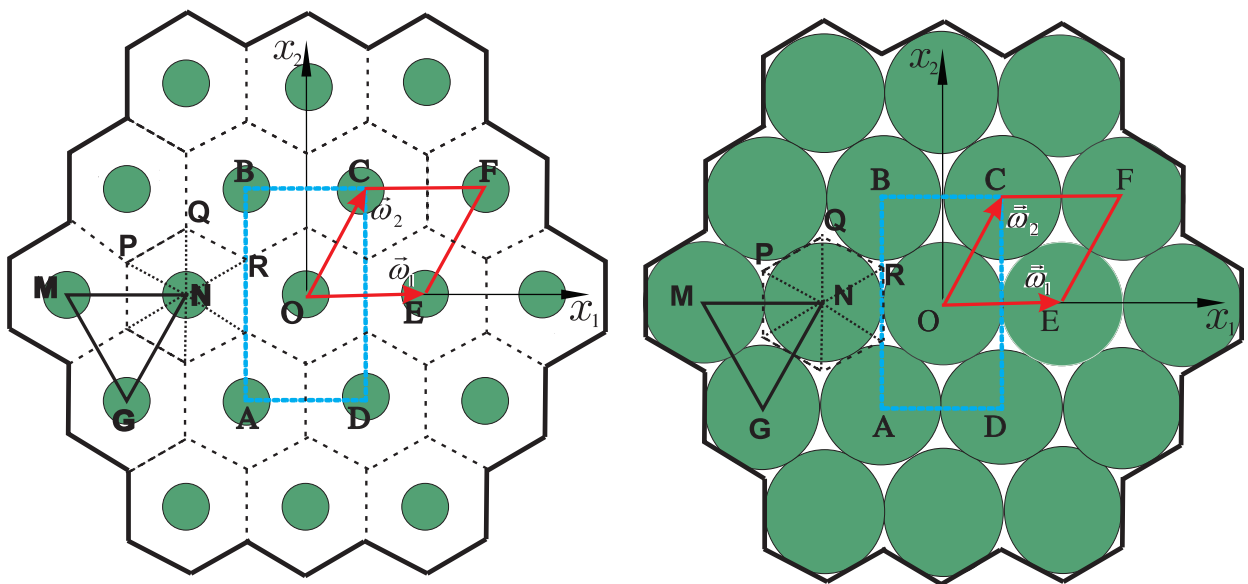
Многokратное повторение типичного элемента в определенной логической последовательности позволяет построить всю картину. На правом рисунке "Танцующие люди" показан шестигранник, повторением которого получается вся картина.

На рисунке "Рыбы" ситуация аналогичная, только противоположные стороны шестигранника одинаково искривлены, чтобы повторением искривленного шестигранника возможно было бы построить всю картину. Таким образом, искривленный шестигранник является типичным элементом.

На всех представленных рисунках вместо правильного или же искривлённого шестигранника можно построить прямоугольник, представляющий собой ячейку периодичности.

2.2 Стержень с шестигранной ячейкой.

Покажем сказанное на более простом примере волокнистого композита. На рисунке изображено поперечное сечение стержня созданного из материала (матрицы), упрочнённой круглыми волокнами из другого материала.



Типичные элементы: малый треугольный NPQ , малый ромбовидный $NPQR$, большой треугольный GMN , большой ромбовидный $OCFE$, шестиугольный и прямоугольный $ABCD$

Волокна радиуса r расположены в центрах правильного шестиугольника. Обозначим длину стороны PQ шестиугольника через a . Маленький равносторонний треугольник NPQ является **типичным элементом минимальной площади** $S_{\Delta NPQ} = a^2\sqrt{3}/4$, с помощью которого можно замостить плоскость, соблюдая при этом геометрию круглого волокна.

Следующим по площади типичным элементом является маленький ромб $NPQR$ составленный, из двух маленьких треугольных элементов, с площадью $S_{\diamond NPQR} = 2S_{\Delta NPQ}$ в два раза большей площади минимального элемента.

Затем идёт большой равносторонний треугольник GMN , в трёх углах которого расположено по $1/6$ части армировки, и площадь которого в три раза больше минимальной: $S_{\Delta GMN} = 3S_{\Delta NPQ}$.

Потом идут два разных по форме, но одинаковых по площади типичных элемента — правильный шестиугольник и ромб $OCFE$. Площадь каждого из этих элементов в 6 раз больше минимального $S_{\diamond OCFE} = 2S_{\Delta GMN} = 6S_{\Delta NPQ} = a^23\sqrt{3}/2$. Повторением ромба вдоль векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ можно покрыть все поперечное сечение стержня из волокнистого композита.

И наконец последний типичный элемент, который одновременно является и ячейкой периодичности — это прямоугольник ABCD со сторонами $AD = a\sqrt{3}$ и $AB = 3a$.

$$S_{\triangle NPQ} = a^2\sqrt{3}/4, \quad S_{\diamond NPQR} = 2S_{\triangle NPQ} = a^2\sqrt{3}/2, \quad S_{\triangle GMN} = 3S_{\triangle NPQ} = a^23\sqrt{3}/4, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{шестигр.}} = S_{\diamond OCFE} = 6S_{\triangle NPQ} = a^23\sqrt{3}/2, \quad S_{ABCD} = 12S_{\triangle NPQ} = a^23\sqrt{3}$$

Все другие типичные элементы имеют большую чем у прямоугольника ABCD площадь. Относительная объёмная доля армировки во всех типичных элементах вычисляется по следующей формуле

$$v_a = \frac{S_{\text{арм.}}}{S_{\text{тип. эл.}}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{r^2}{a^2} \quad (2.2)$$

На рисунке справа изображен случай плотной упаковки. В этом случае $r = a\sqrt{3}/2$ и объёмная доля волокон максимальна $v_a = S_{\circ}/S_{\text{шестигр.}} = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0.906$.

2.3 Сведение прямоугольной ячейки периодичности к кубу периодичности.

Прямоугольную ячейку периодичности ABCD, изображённую синим цветом на рисунке, можно путём масштабирования осей координат преобразовать в квадратную ячейку с заданной стороной $l_1 \leq l \leq l_2 = l_1\sqrt{3}$. Для этого вводим новые глобальные координаты x_1^* и x_2^* , а также новые локальные координаты z_1^* z_2^* , такие, что

$$x_i^* = \frac{l x_i}{l_i} \Rightarrow z_i^* = \frac{l z_i}{l_i}, \quad 0 \leq z_i^* \leq l, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

На рисунке 1 показана схема преобразования координат для случая $l = l_1$. В этом случае все линейные размеры в направлении параллельном оси x_1 остаются без изменений, а размеры по оси x_2 сокращаются в отношении $l_1/l_2 = 1/\sqrt{3}$ раз. При этом включение радиуса $0 < r \leq l_1/2$ переходит в эллипс с полуосями $a_1 = r$ и $a_2 = rl_1/l_2$.

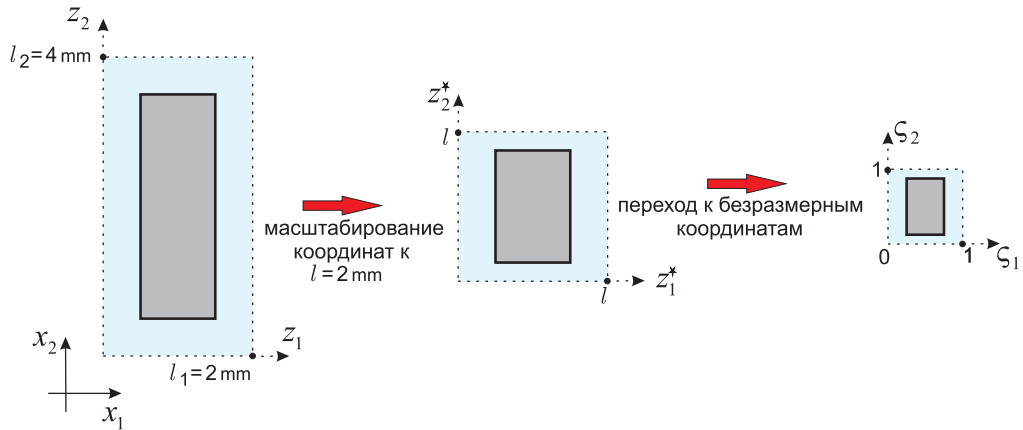


Рис. 1: Схема преобразования координат при сведении прямоугольной ячейки периодичности $l_1 \times l_2$ к квадратной $l_1 \times l_1$. Переход к безразмерным локальным координатам.

Переход от трёхмерной ячейки периодичности в виде прямоугольного параллелепипеда к кубу периодичности с ребром l реализуется совершенно аналогично двумерному.

3 Эффективные физико-механические свойства композитов.

Композит состоит из объёмов вещества (компонентов, фаз) с различными свойствами. При действии внешних факторов он ведёт себя как некий однородный анизотропный материал, свойства которого отличаются от свойств его составляющих компонентов. Однако же свойства такого однородного тела зависят от физико-механических свойств фаз, их объёмных долей, геометрии, расположения, контактных условий. Такие усреднённые свойства называются **эффективными свойствами**.

3.1 Среднее значение функции в объёме.

Под средним значением функции $f(x)$, $x \in V$ распределённой в объёме V понимается интеграл по этому объёму поделённый на сам объём

$$\frac{1}{V} \int_V f(x) dV \equiv \langle f \rangle$$

$$\text{IF } V = \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i \quad \text{AND} \quad f_i(x) = \text{const.}, \quad x \in V_i \quad \text{THEN}$$

$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^n f_i v_i, \quad v_i = \frac{V_i}{V}$$

v_i — относительная объёмная доля i -го компонента, где $f_i = \text{const.}$

3.2 Эффективные определяющие соотношения.

Эффективные свойства проявляются в определяющих соотношениях, то есть в соотношениях связывающих между собой причины и следствия в процессах, происходящих в телах.

Под эффективными определяющими соотношениями понимаются соотношения, связывающие между собой средние по представительному объёму значения причин и следствий. Материальные константы и функции, входящие в эти соотношения называются эффективными физико-механическими свойствами (характеристиками) композита.

Экспериментальное определение всего комплекса эффективных свойств композита дорого и долго. Поэтому необходимы математические методы вычисления эффективных характеристик, позволяющие более или менее точно вычислять эффективные свойства.

В МДТТ под эффективными определяющими соотношениями понимаются соотношения позволяющие выразить средние напряжения через средние деформации ($\langle \sigma \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle$), либо наоборот средние деформации через средние напряжения ($\langle \varepsilon \rangle \sim \langle \sigma \rangle$).

Материальные константы и функции, входящие в эти соотношения называются эффективными константами и соответственно эффективными функциями композита.

В общем случае эффективные материальные константы и функции, получаемые из прямых и обратных определяющих соотношений не являются взаимно обратными, то есть они не совпадают.

Для примера рассмотрим пока только упругие композиты. В одномерном случае (например в слоистом стержне) в каждом компоненте композита продольные напряжения пропорциональны продольным деформациям

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i$$

Здесь σ_i — напряжение в i -м компоненте, вызванное деформацией ε_i в этом же компоненте. Коэффициент пропорциональности E_i называется модулем Юнга — константа i -го материала, определяющая его упругие свойства при растяжении (сжатии). Находится из эксперимента.

3.3 Эффективные модули Фойхта и Рейсса.

В неоднородном стержне напряжение и деформации определяются по закону Гука

$$\sigma = E(x)\varepsilon, \quad x \in [0, L] \quad (3.1)$$

I.) Пусть $\varepsilon = const.$, тогда можно усреднить выражение (3.1)

$$\langle \sigma \rangle = \langle E \rangle \varepsilon = \langle E \rangle \langle \varepsilon \rangle \quad (3.2)$$

По определению $\langle E \rangle$ — эффективный модуль Юнга, который принято называть модулем Фойхта

$$\mathbf{E}^{(F)} \equiv \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{E}(x) dx \quad (3.3)$$

В случае, когда $E(x)$ — кусочно-постоянная функция

$$E^{(F)} = \sum_{i=1}^n E_i v_i, \quad v_i = \frac{L_i}{L}$$

II.) Пусть теперь $\sigma = const.$, тогда можно усреднить выражение

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(x)}$$

Получим

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle 1/E \rangle \sigma = \langle 1/E \rangle \langle \sigma \rangle \Rightarrow \langle \sigma \rangle = \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \langle \varepsilon \rangle \quad (3.4)$$

Следовательно, коэффициент при $\langle \varepsilon \rangle$ также является эффективным модулем и называется он модулем Рейсса

$$\mathbf{E}^{(R)} \equiv \frac{1}{\langle 1/\mathbf{E} \rangle} = \frac{1}{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\mathbf{E}(x)} dx} \quad (3.5)$$

В кусочно-постоянном случае

$$E^{(R)} = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{E_i}$$

3.4 Вилка Фойхта–Рейсса.

В механике композитов доказывается, что любой теоретический или же экспериментальный метод определения эффективного модуля упругости должен удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{\langle 1/E \rangle} \leq E^{(\text{эфф})} \leq \langle E \rangle \quad (3.6)$$

Неравенство (3.7) называется вилкой Фойхта–Рейсса.

В общем случае неоднородного анизотропного материала вместо закона Гука используется обобщенный закон Гука, связывающий компоненты тензора напряжений σ_{ij} с компонентами тензора деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

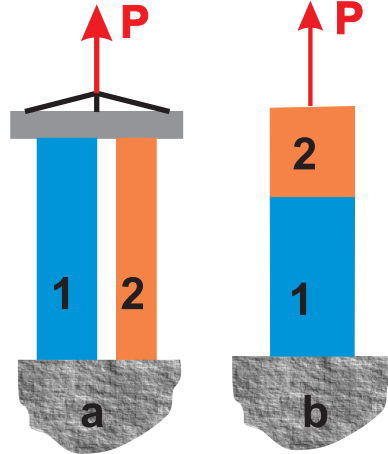
В этом случае вилка Фойхта–Рейсса представляет собой более сложное неравенство

$$\langle C_{ijkl}^{-1} \rangle^{-1} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq C_{ijkl}^{(\text{эфф})} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq \langle C_{ijkl} \rangle \gamma_{ij} \gamma_{kl}, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const}. \quad (3.8)$$

где γ_{ij} постоянный симметричный тензор, у которого не все компоненты нулевые.

3.5 Схема эксперимента по определению эффективных модулей Фойхта и Рейсса.

Рассмотрим неоднородный стержень, составленный из двух упругих материалов с модулями Юнга E_1 и E_2 и с постоянными по длине поперечными сечениями.



Метод Фойхта и метод Рейсса

I. В примере рис. 3.5а неоднородный в поперечном направлении составной стержень растягивается силой P , приложенной в центре жесткой прокладки на верхнем сечении. Прокладка нужна чтобы стержень №1 и стержень №2 получили одинаковое продольное перемещение и, соответственно, одинаковую продольную деформацию ε

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где l_0 — первоначальная длина стержней, l — длина стержней после приложения нагрузки P . Пусть σ_1 и σ_2 — продольные напряжения в первом и втором стержнях, возникшие в

ответ на их продольную деформацию. Площади поперечных сечений обозначим через F_1 и F_2 соответственно. Предполагается, что продольные напряжения распределены равномерно по поперечному сечению каждого стержня, тогда

$$P = \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 = \langle \sigma \rangle F, \quad F = F_1 + F_2 \quad (3.9)$$

Здесь через $\langle \sigma \rangle$ обозначено среднее продольное напряжение в однородном стержне суммарной площадью $F = F_1 + F_2$. Из равенства (3.9) вытекает формула для среднего напряжения

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2, \quad v_1 = \frac{F_1}{F}, \quad v_2 = \frac{F_2}{F} \quad (3.10)$$

Через v_1 и v_2 обозначены относительные доли поперечных сечений первого и второго стержней.

С другой стороны, в соответствии с законом Гука

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 = E_1 \varepsilon_1 v_1 + E_2 \varepsilon_2 v_2 = (E_1 v_1 + E_2 v_2) \varepsilon = \langle E \rangle \langle \varepsilon \rangle = E^{(F)} \langle \varepsilon \rangle \quad (3.11)$$

В формуле (3.11) средние напряжения пропорциональны средним деформациям, следовательно коэффициент пропорциональности есть эффективный (по Фойхту) модуль Юнга.

II. На рисунке 3.5b представлена схема, по которой можно экспериментально определить эффективный модуль Рейсса. В этом случае $\sigma = P/F = const.$. Следовательно нужно воспользоваться обратным законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(x)} \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \langle 1/E \rangle \sigma = \langle 1/E \rangle \langle \sigma \rangle \Rightarrow E^{(R)} = \frac{1}{\langle 1/E \rangle}$$

3.6 Суть теоретического подхода к вычислению эффективных физико - механических характеристик композитов.

При теоретическом подходе к вычислению эффективных физико-механических характеристик нужно создать такие внешние воздействия, чтобы *средние значения полевых величин в каждом из представительных объёмов были одинаковы и совпадали со средними значениями во всем композиционном теле, состоящем из большого числа представительных объёмов.* Такой общий взгляд на проблему теоретического способа расчёта эффективных физико-механических свойств композиционных материалов изложен в работе [10, стр. 15].

4 Регулярные композиты. Метод Бахвалова-Победри.

4.1 Глобальные и локальные координаты.

Рассмотрим тело объёма V из регулярного композиционного материала с ячейкой периодичности в виде куба¹ с ребром l . Тело составлено из большого числа ячеек. На плоском рисунке 2 показан пограничный слой, где расположены как целые ячейки так и их

¹если ячейка периодичности реального композита является прямоугольником $l_1 \times l_2 \times l_3$, то изменяя масштаб единиц по осям координат сводим его к кубу периодичности с ребром l (см. раздел 2.3)

части, примыкающие к границе тела Σ . Толщина пограничного слоя порядка характерного размера ячейки периодичности. Внутри каждой ячейки расположены включения из других материалов. Расположим начало глобальных декартовых координат x_1, x_2, x_3 в вершине какого либо куба периодичности, а внутри каждого куба периодичности введем **безразмерные локальные (местные или же быстрые)** переменные $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ такие, что $0 < \zeta_i < 1$ (рис.2).

В этом случае глобальные координаты любой точки композита, регулярной структуры будут определяться по формуле

$$\begin{aligned} x_i &= l\zeta_i + lm_i, \quad m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \zeta_i &= \frac{x_i}{l} - m_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Три целых числа m_1, m_2, m_3 — являются индивидуальным номером ячейки периодичности.

Если заданы глобальные координаты какой либо точки $M(x_1, x_2, x_3) \in V$, то можно найти номер ячейки периодичности (m_1, m_2, m_3) куда попала точка M , а также её локальные координаты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ в этой ячейке

$$m_i = \left\lfloor \frac{x_i}{l} \right\rfloor, \quad \zeta_i = \left\{ \frac{x_i}{l} \right\} = \frac{x_i}{l} - m_i, \quad (4.2)$$

где $\lfloor \bullet \rfloor$ — обозначает целую часть числа с недостатком, а $\{ \bullet \}$ — его дробную часть.

4.2 Малый геометрический параметр.

В композите с периодической структурой в виде куба $l \times l \times l$ естественным образом появляется **малый геометрический параметр**, равный отношению характерного размера l ячейки периодичности к характерному размеру L всего тела $\alpha = l/L \ll 1$.

Пусть a некая физическая величина, например плотность, модуль Юнга, коэффициент теплопроводности и т.п. Пусть величина a , как функция глобальных координат, является периодической функцией с периодом l по каждой координате. Физическая величина a имеет свою собственную размерность. **По этой причине функциональная зависимость a от координат должна быть такой, чтобы координаты входили в эту зависимость в безразмерном виде т.е.**

$$a = a\left(\frac{x_1}{l}, \frac{x_2}{l}, \frac{x_3}{l}\right) = a(\zeta_1 + m_1, \zeta_2 + m_2, \zeta_3 + m_3) = a(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (4.3)$$

То есть, величина a , как функция локальных безразмерных переменных $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, является периодической функцией с периодом 1 по всем переменным $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

Если теперь вместо размерных координат x_i перейти к безразмерным $\bar{x}_i = x_i/L$, тогда, соответствии с формулой (4.2)

$$\zeta_j = \frac{x_j}{l} - m_j = \frac{x_j/L}{l/L} - m_j = \frac{\bar{x}_j}{\alpha} - m_j, \quad m_j = \left\lfloor \frac{x_j}{l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x_j/L}{l/L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\bar{x}_j}{\alpha} \right\rfloor \quad (4.4)$$

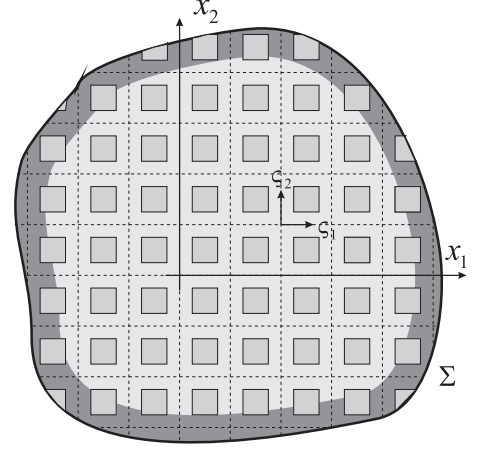


Рис. 2: Пограничный слой в изделии из композита с регулярной структурой.

Именно через зависимость (4.4) материальных характеристик от локальных переменных и входит малый параметр в уравнения, описывающие процесс в композите. В самом деле, в уравнениях процесса в периодически неоднородном композите появляются производные по безразмерным глобальным координатам от функций, зависящих от безразмерных быстрых переменных, например

$$\frac{\partial a(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial a}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \bar{x}_i} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial a}{\partial \zeta_j} \delta_{ij} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial a}{\partial \zeta_i} \quad (4.5)$$

А раз так, то можно разработать процедуру разложения искомого решения в ряд по малому геометрическому параметру α . Эта процедура называется **осреднением** и была предложена в работах Н.С. Бахвалова в 1974 году для случая дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами.

Задачи теории упругости для тел с быстроосциллирующими упругими свойствами в шестидесятые годы рассматривал В.А. Ломакин [6, 11–13]. Для этого он активно использовал метод возмущений. Примерно в эти же годы появились первые работы Бориса Ефимовича Победри в механике композитов [14–22]. В 1970 году у него совместно с Алексеем Антоновичем Ильюшиным вышла книга по математической теории термовязкоупругости [23]. Как раз в те же годы появились первые математические работы Николая Сергеевича Бахвалова по осреднению дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами. В 1974 и в 1975 годах в докладах академии наук СССР вышли три работы по осредненным характеристикам тел с периодической структурой и по осреднению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами [24–26]. Борис Ефимович, пожалуй, первый связал эти математические работы с реальными композитами и начал активно разрабатывать это направление. В 1984 году одновременно вышли две замечательные книги: у Бахвалова Н.С. совместно с Панасенко Г.П. — "Осреднение процессов в периодических средах" [27], у Победри Б.Е. — "Механика композиционных материалов" [8], в которой обобщены результаты самого Победри и его учеников по развитию и практическому применению метода осреднения к линейным и нелинейным задачам статики и динамики композитов. В 1985 году Николай Сергеевич Бахвалов и Борис Ефимович Победря в составе коллектива авторов за создание методов расчета конструкций из композиционных материалов получили Государственную премию СССР в области науки. В 1987 году на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова была организована кафедра механики композитов, которую с первого дня и до своей кончины 1 марта 2016 года возглавлял Борис Ефимович Победря. Основной задачей новой кафедры было подготовка специалистов в области фундаментальной механики композитов. За прошедшие 33 года по тематике кафедры было выпущено более 300 студентов и около 160 аспирантов.

Начиная с 1967 года Б.Е. Победрей опубликовано более 200 печатных работ, из них примерно половина, так или иначе, касается проблем деформирования и прочности композитов. Причем большинству из работ используются идеи, заложенные в методе осреднения. **Метод осреднения в механике композитов с регулярной структурой по праву называется методом осреднения Бахвалова-Победри.**

Следует отметить, что после публикации перечисленных выше работ Н.С. Бахвалова появилось очень много работ российских и иностранных авторов, посвященный математическим проблемам теории осреднения. Учитывая, что целью настоящей публикации не

является подробный литературный обзор, упомяну лишь некоторые книги из обширного списка книг и статей. Это книги Марченко В.А., Хрушова Е.Я. [28], Санчес-Паленсии [29], Олейник, Иосифьяна, Шамаева [30], Жикова В.В., Козлова С.М., Олейник О.А. [31] и др. В этих книгах можно найти более подробную библиографию работ по теории осреднения.

4.3 Математическая формалистика метода Бахвалова–Победри (МБП) .

Поясним метод осреднения Бахвалова–Победри на примере задачи для бесконечной в плане, неоднородной по толщине плиты $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ толщины $L : 0 \leq x_3 \leq L$ из изотропного материала.

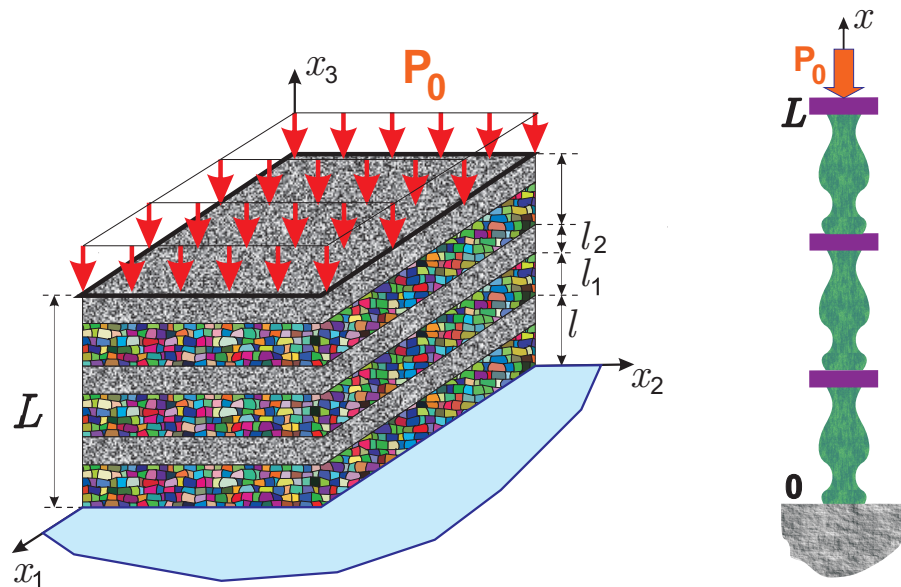


Рис. 3: Периодически неоднородная по толщине, бесконечная в плане плита и периодически неоднородный стержень с переменным сечением

Плита является периодически неоднородной, то есть она построена из склеенных между собой **одинаковых слоёв (ячеек периодичности)** изотропного материала толщины l . В каждом слое модуль Юнга E является одинаковой функцией локальной переменной $0 < \zeta < 1$.

Глобальная переменная x_3 связана с локальной по формуле $x_3/l = \zeta + m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, где m — номер ячейки периодичности начиная с ячейки с нулевым номером $m = 0$, прилегающей к нижней границе $x_3 = 0$ плиты (рис.3).

Слой сжимается (растягивается) равномерно распределённой по верхней стороне $x_3 = L$ нагрузкой $P_0 = const.$ и объёмной нагрузкой $X(x_3)$. На нижней плоскости $x_3 = 0$ задано перемещение $u_0 = const.$ (как правило $u_0 = 0$).

4.3.1 Постановка исходной задачи.

В этом случае задача об определении напряженно – деформированного состояния (НДС) является одномерной и описывается обыкновенным дифференциальным уравнением для перемещения $u(x_3)$ и двумя граничными условиями на нижней и верхней плос-

костях (для сокращения записи в дальнейшем полагаем $x_3 \equiv x$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[E(\zeta) \frac{du}{dx} \right] + X(x) = 0, \quad \zeta = \frac{x}{l} - \left\lfloor \frac{x}{l} \right\rfloor = \left\{ \frac{x}{l} \right\} \\ u|_{x=0} = u_0, \quad E(\zeta) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = -P_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что этими же уравнениями описывается НДС стержня с периодическим переменным поперечным сечением $F(\zeta)$ (рис.3). Только в уравнениях (4.6) нужно сделать следующие замены: $E(\zeta) \rightarrow E(\zeta)F(\zeta)$, $X(x) \rightarrow X(x)F(\zeta)$.

Задача (4.6) имеет точное решение

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \left[-P_0 + \int_z^L X(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)} \quad (4.7)$$

4.3.2 Постановка задачи в безразмерных координатах.

Далее перейдём к безразмерным координатам $\bar{x} = x/L$. Уравнения (4.6) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{x}} \left[E(\zeta) \frac{du}{d\bar{x}} \right] + X^*(\bar{x}) = 0, \quad \zeta = \left\{ \frac{\bar{x}}{\alpha} \right\} = \frac{\bar{x}}{\alpha} - \left\lfloor \frac{\bar{x}}{\alpha} \right\rfloor = \frac{\bar{x}}{\alpha} - m, \\ u|_{\bar{x}=0} = u_0, \quad E(\zeta) \frac{du}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = -P_0^*, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $X^*(\bar{x}) \equiv L^2 X(\bar{x})$, $P_0^* = L P_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ — целое число равное номеру ячейки. Модуль Юнга $E(\zeta)$ — одно периодическая функция быстрой переменной $0 \leq \zeta \leq 1$. Может быть как непрерывной, так и кусочно непрерывной функцией.

Решение задачи (4.8), отнесенной к безразмерным координатам, представляется следующей формулой:

$$u(\bar{x}) = u_0 + \int_0^{\bar{x}} \left[-P_0^* + \int_z^1 X^*(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)} \quad (4.9)$$

Предположим для простоты, что $E(\zeta)$ — непрерывная функция, тогда уравнение (4.8), с учетом правила (4.5), принимает вид:

$$Eu'' + \frac{1}{\alpha} E' u' + X^* = 0 \quad (4.10)$$

В этом разделе штрихи обозначают обыкновенные производные по безразмерной координате \bar{x} , а вертикальная черта вверху символа — производную по локальной переменной ζ .

В уравнение (4.10) входит малый параметр α , следовательно решение уравнения (4.10), соответственно и уравнения (4.8) зависит от этого параметра, то есть $u = u(\bar{x}, \alpha)$.

4.3.3 Разложение решения исходной задачи в асимптотический ряд по степеням малого параметра. Структурные функции.

Попробуем искать решение уравнения (4.8) путем **специального разложения** функции $u(\bar{x}, \alpha)$ в ряд по параметру α

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \alpha) &= v(\bar{x}, \alpha) + \alpha N_1(\zeta)v'(\bar{x}, \alpha) + \alpha^2 N_2(\zeta)v''(\bar{x}, \alpha) + \dots = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_q(\zeta)v^{(q)}(\bar{x}, \alpha), \quad (N_0 \equiv 1), \quad v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) \equiv \frac{d^q v(\bar{x}, \alpha)}{d\bar{x}^q}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $v(\bar{x}, \alpha)$ — гладкая функция безразмерной координаты, зависящая и от малого параметра². **Функции $N_q(\zeta)$ — непрерывные периодические функции быстрой переменной ζ с единичным периодом (однопериодические функции). При $q < 0$ функции $N_q \equiv 0$. В случае постоянного модуля Юнга, то есть при $E = const.$ они также обращаются в нуль. Назовём их структурными функциями.**

Функции $v(\bar{x}, \alpha)$ и $N_q(\zeta)$ при $q > 1$ пока неизвестные. Их предстоит найти в процессе удовлетворения всем уравнениям исходной задачи (4.8).

По перемещению находим ряд для деформации $\varepsilon = u'$ и затем ряд для напряжения $\sigma = E(\zeta)\varepsilon$

$$\varepsilon = u' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} (N_q^| + N_{q-1})v^{(q)} \quad (4.12)$$

$$\sigma = E\varepsilon = Eu' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} E(N_q^| + N_{q-1})v^{(q)} \quad (4.13)$$

Ещё нам понадобится производная от напряжения

$$\sigma' = (Eu')' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-2} \left\{ [E(N_q^| + N_{q-1})]^| + E(N_{q-1}^| + N_{q-2}) \right\} v^{(q)} \quad (4.14)$$

4.3.4 Сведение исходного уравнения второго порядка с переменным коэффициентом к уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

В результате из исходного уравнения (4.8) второго порядка с переменным коэффициентом для функции $u(\bar{x})$ получаем дифференциальное уравнение бесконечного порядка для гладкой функции $v(\bar{x})$, да ещё с переменными коэффициентами

$$\sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-2} \left\{ [E(N_q^| + N_{q-1})]^| + E(N_{q-1}^| + N_{q-2}) \right\} v^{(q)} + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (4.15)$$

В уравнении (4.15) первое слагаемое порядка $1/\alpha$. То есть, первое слагаемое стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$. Чтобы избавиться от этой особенности нужно приравнять к нулю выражение в фигурных скобках при $v^{(1)} \equiv v'$.

²Строгое и обстоятельное математическое доказательство существования разложения (4.11) приведено в книге Бахвалова Н.С. и Панасенко Г.П. [27, стр. 16-21, стр. 40-52]

Далее, поскольку $v(\bar{x}, \alpha)$ гладкая по \bar{x} функция, постольку коэффициенты при производных в уравнении (4.15) необходимо положить равными некоторым постоянным величинам. Обозначим их через h_0, h_1, \dots . При этом, уравнение (4.15) становится дифференциальным уравнением бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-2} h_{q-2} v^{(q)} + \bar{X} = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)} + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (4.16)$$

4.3.5 Рекуррентные уравнения для структурных функций.

Для структурных функций получается следующая система рекуррентных уравнений, которые будем называть **структурными уравнениями**:

$$[E(N_1^| + 1)]^| = 0, \quad (4.17)$$

$$[E(N_2^| + N_1)]^| + E(N_1^| + 1) = h_0, \quad (4.18)$$

$$[E(N_3^| + N_2)]^| + E(N_2^| + N_1) = h_1, \quad (4.19)$$

.....

$$[E(N_q^| + N_{q-1})]^| + E(N_{q-1}^| + N_{q-2}) = h_{q-2}, \quad q = 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

4.3.6 Выражение коэффициентов h_q через структурные функции.

В формулах (4.18)–(4.20) **выражения в квадратных скобках являются непрерывными однопериодическими функциями быстрой переменной ζ , хотя $E(\zeta)$ и $N_q^|(\zeta)$ по отдельности могут иметь конечные разрывы.** Поэтому среднее значение по периоду от производной квадратных скобок обращается в нуль.

Усреднив равенства (4.18)–(4.20) по периоду, получим формулы, по которым константы h_q выражаются через структурные функции

$$h_q = \langle E(N_{q+1}^| + N_q) \rangle, \quad q = 0, 1, \dots \quad (4.21)$$

4.4 Первая рекуррентная последовательность для вычисления структурных функций и коэффициентов h_q .

Теперь можно записать рекуррентную последовательность, по которой можно найти структурные функции и константы h_q любого порядка. Первым этапом рекурсии служит уравнение (4.17). После этого по формуле (4.22) при $q = 0$ получаем формулу для константы h_0 . Потом находим находим константу h_1 , и так далее

$$\text{1-й этап — начало рекурсии :} \quad [E(N_1^| + 1)]^| = 0, \quad h_0 = \langle E(N_1^| + 1) \rangle; \quad (4.22)$$

$$\text{2-й этап. } [E(N_2^| + N_1)]^| + E(N_1^| + 1) = h_0, \quad h_1 = \langle E(N_2^| + N_1) \rangle;$$

$$\text{3-й этап. } [E(N_3^| + N_2)]^| + E(N_2^| + N_1) = h_1, \quad h_2 = \langle E(N_3^| + N_2) \rangle;$$

.....

$$\text{q-й этап. } [E(N_{q+2}^| + N_{q+1})]^| + E(N_{q+1}^| + N_q) = h_q, \quad h_{q+1} = \langle E(N_{q+2}^| + N_{q+1}) \rangle$$

Отметим, что в начало рекурсии, то есть в первое уравнение системы (4.22), входит функция $E(\zeta)$, следовательно первая структурная функция $N_1(\zeta)$ определяется функциональной зависимостью модуля Юнга от локальной координаты. Во второе структурное уравнение входит функция $N_1(\zeta)$ и константа h_0 , которая определяется, в свою очередь, через $N_1(\zeta)$. Таким образом, функция $N_2(\zeta)$ выражается через функцию $N_1(\zeta)$. Как видно из последнего уравнения (4.22), при $q \geq 2$ структурная функция q -го порядка $N_q(\zeta)$ выражается через две предыдущие функции $N_{q-1}(\zeta)$ и $N_{q-2}(\zeta)$, а следовательно через $E(\zeta)$.

4.4.1 Условие периодичности и условие нормировки для выделения единственного решения структурных уравнений.

Решение каждого из уравнений (4.22) определено с точностью до двух произвольных констант. Поэтому необходимо определиться с выбором условий накладываемых на структурные функции для выделения единственного решения каждого из рекуррентных дифференциальных уравнений второго порядка. Прежде всего **используем условие периодичности и непрерывности структурных функций $N_q(\zeta)$ на ячейке периодичности**. В этом случае среднее значение производной от структурной функции равно нулю, то есть

$$\langle N_q^| \rangle = \int_0^1 N_q^|(\zeta) d\zeta = N_q(1) - N_q(0) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

Формула (4.23) носит название **условие периодичности**. Из условия периодичности находится первая константа интегрирования q -го структурного уравнения.

Второе условие выбирается из тех соображений, что **среднее значение исходного перемещения в любой ячейке периодичности при дроблении структуры, то есть при $\alpha \rightarrow 0$, должно совпадать с гладкой функцией $v(\bar{x}, \alpha)$** .

При достаточно малых α функция $v(\bar{x}, \alpha)$ вместе со всеми своими производными практически не меняется в пределах любой из ячеек периодичности. В этом случае

$$\langle u(\bar{x}, \alpha) \rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \langle N_q(\zeta) v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) \rangle \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \langle N_q(\zeta) \rangle v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) = v(\bar{x}, \alpha),$$

если среднее значение любой структурной функции на ячейке периодичности равно нулю, то есть

$$\langle N_q(\zeta) \rangle = \int_0^1 N_q(\zeta) d\zeta = 0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Это и есть второе условие, из которого находится вторая константа интегрирования. Формула (4.24) носит название **условие нормировки**.

4.5 Вторая рекуррентная последовательность задач для вычисления гладкой функции $v(x, \alpha)$.

Функция $v(\bar{x}, \alpha)$, которая вводится в разделе 4.3.3 удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.16) бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)}(\bar{x}, \alpha) + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (4.25)$$

Как видно из (4.25), сама функция v и все её производные зависят от параметра α . Попробуем её представить так же в виде ряда по степеням параметра α

$$v(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w_n(\bar{x}), \quad (4.26)$$

где функции $w_n(\bar{x})$ уже зависят только от безразмерной переменной \bar{x} .

Подставим ряд (4.26) в уравнение (4.25). В полученном двойном ряде соберём все коэффициенты при одинаковых степенях параметра α .

$$\sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)} = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w_n^{(q+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[h_0 w_n'' + \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)} \right]$$

В результате приходим к уравнению следующего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[h_0 w_n'' + \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)} \right] + X^*(\bar{x}) = 0, \dots \quad (4.27)$$

Приравнявая в уравнении (4.27) коэффициенты при α^n справа и слева знака равенства получаем рекуррентные уравнения для функций $w_n(\bar{x})$

$$\boxed{h_0 w_n'' + X_n^*(\bar{x}) = 0, \quad X_n^*(\bar{x}) = \begin{cases} X^*(\bar{x}), & \text{если } n = 0 \\ \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)}, & \text{если } n > 0 \end{cases}} \quad (4.28)$$

Например:

$$X_1^*(\bar{x}) = h_1 \frac{d^3 w_0}{d\bar{x}^3}, \quad X_2^*(\bar{x}) = h_1 \frac{d^3 w_1}{d\bar{x}^3} + h_2 \frac{d^4 w_0}{d\bar{x}^4}$$

Ряд (4.11) для перемещения преобразуется аналогично

$$u(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[w_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right] \quad (4.29)$$

Из граничного условия исходной задачи при $\bar{x} = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[w_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} = u_0$$

Отсюда

$$w_n|_{\bar{x}=0} = u_{0(n)} = \begin{cases} u_0, & \text{если } n = 0 \\ - \left[\sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0}, & \text{если } n > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

В частности:

$$w_1|_{\bar{x}=0} = -N_1(0)w'_0(0), \quad w_2|_{\bar{x}=0} = -N_1(0)w'_1(0) - N_2(0)w''_0(0), \dots$$

Для аналогичного преобразования напряжения, то есть ряда (4.13) перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma = E\varepsilon = Eu' &= \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} E(N_q^| + N_{q-1})v^{(q)} = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} \tilde{C}_{q-1}(\zeta)v^{(q)} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \tilde{C}_q(\zeta)v^{(q+1)}, \quad \tilde{C}_q(\zeta) \equiv E(\zeta)[N_{q+1}^|(\zeta) + N_q(\zeta)] \end{aligned}$$

После подстановки сюда ряда (4.25) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях α , получаем

$$\sigma(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[\tilde{C}_0(\zeta)w'_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n \tilde{C}_q(\zeta)w_{n-q}^{(q+1)}(\bar{x}) \right], \quad (4.31)$$

$$\tilde{C}_q(\zeta) = E(\zeta)[N_{q+1}^|(\zeta) + N_q(\zeta)]$$

Из второго граничного условия на верхней плоскости плиты, где задано равномерное давление находим:

$$\tilde{C}_0(\zeta)w'_n|_{\bar{x}=0} = -P_{0(n)}^* = - \begin{cases} P_0^*, & \text{если } n = 0 \\ \left[\sum_{q=1}^n \tilde{C}_q(\zeta)w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1}, & \text{если } n > 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Или:

$$P_{0(1)}^* = \left[\tilde{C}_1(\zeta)w'_0(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1}, \quad P_{0(2)}^* = \left[\tilde{C}_1(\zeta)w'_1(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1} + \left[\tilde{C}_2(\zeta)w''_0(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1}, \dots$$

4.6 Вычисление структурных функций $N_q(\zeta)$ и констант h_{q-1} .

Рассмотрим подробнее процесс вычисления структурных функций в модельной задаче о сжатии неоднородной по толщине плиты.

4.6.1 Функция $N_1(\zeta)$ и константа h_0 .

Теперь можно найти явные выражения для всех структурных функций. Например, общее решение уравнения (4.22) начала рекурсии имеет вид:

$$N_1(\zeta) = a_1 \int_0^\zeta \frac{1}{E(\eta)} d\eta - \zeta + b_1$$

Константы интегрирования a_1 и b_1 находим из условий (4.23) и (4.24)

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{\langle 1/E \rangle}, \quad b_1 = - \left\langle \int_0^\zeta \left[\frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta \right\rangle &= - \left\langle (1 - \eta) \left[\frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta \right\rangle = \\ &= \left\langle \eta \left[\frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta \right\rangle \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие выражения для $N_1^l(\zeta)$ и $N_1(\zeta)$

$$N_1^l(\zeta) = \frac{1}{E(\zeta)\langle 1/E \rangle} - 1,$$

$$\boxed{N_1(\zeta) = \int_0^\zeta \left[\frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta - \left\langle (1 - \eta) \left[\frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] \right\rangle} \quad (4.33)$$

После этого сразу, по формуле (4.22), находим

$$\boxed{h_0 = \langle E(N_1^l + 1) \rangle = \frac{1}{\langle 1/E \rangle}} \quad (4.34)$$

4.6.2 Функции $N_q(\zeta)$ и константы h_{q-1} при $q \geq 2$.

Рассмотрим второе уравнение (4.22) для функции $N_2(\zeta)$. Из формул (4.33) и (4.34) получаем

$$E(\zeta)(N_1^l + 1) = \frac{1}{\langle 1/E \rangle} = h_0$$

Следовательно, уравнение (4.22) для $N_2(\zeta)$ принимает вид:

$$[E(N_2^l + N_1)]^l = 0$$

Отсюда, а так же из условий периодичности (4.23) и нормировки (4.24), находим $N_2(\zeta)$.

После этого, по формуле (4.22), находим константу h_1

$$\begin{aligned}
N_2^| &= -N_1(\zeta), & N_2(\zeta) &= -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta + \left\langle \int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta \right\rangle = \\
&= -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta + \left\langle (1-\eta)N_1(\eta)d\eta \right\rangle = -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta - \left\langle \eta N_1(\eta) \right\rangle, \\
h_1 &= \left\langle E \cdot (N_2^| + N_1) \right\rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Вообще для любого $q \geq 1$ получаем:

$$\boxed{N_{q+1}^| = -N_q \Rightarrow N_{q+1}(\zeta) = -\int_0^\zeta N_q(\eta)d\eta + b_{q+1}}, \tag{4.36}$$

где $b_{q+1} = const$. Из формулы (4.36) следует, что:

1.) Каждая структурная функция определена с точностью до константы, которая определяется из условия нормировки

$$\langle N_{q+1} \rangle = 0 \Rightarrow b_{q+1} = \left\langle \int_0^\zeta N_q(\eta)d\eta \right\rangle = \left\langle (1-\eta)N_q(\eta) \right\rangle = -\left\langle \eta N_q(\eta) \right\rangle \tag{4.37}$$

2.) Коэффициенты $h_q = 0$, при $q \geq 1$. В соответствии с формулой (4.21) и рекуррентным соотношением (4.36) получаем:

$$\boxed{h_q = \left\langle E \cdot (N_{q+1}^| + N_q) \right\rangle = 0} \tag{4.38}$$

3.) Структурную функцию, чей номер больше двух, можно выразить через любую из предыдущих функций. Для доказательства нужно продифференцировать рекуррентную формулу (4.36) соответствующее число раз

$$\boxed{\frac{d^{s+1}N_{q+1}}{d\zeta^{s+1}} = (-1)^{s+1}N_{q-s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, q-1} \tag{4.39}$$

4.) Любая структурная функция, чей номер больше двух, выражается через начальную структурную функцию $N_1(\zeta)$ в виде дифференциального уравнения q -го порядка. Для доказательства нужно в формуле (4.39) положить $s=q-1$, тогда

$$\boxed{\frac{d^q N_{q+1}}{d\zeta^q} = (-1)^q N_1} \tag{4.40}$$

5.) Воспользуемся вторым рекуррентным соотношением в формуле (4.36) и получим полезную формулу, по которой функция N_{q+1} выражается через структурную функцию N_{q-s} нижнего уровня

$$N_{q+1} = (-1)^{s+1} N_{q-s}^{(-s-1)} + \sum_{n=0}^s (-1)^n b_{q-n+1}^{(-n)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, q-1 \quad (4.41)$$

Эту же формулу можно получить непосредственно из дифференциального уравнения (4.39).

6.) Структурная функция N_{q+1} выражается непосредственно через начальную структурную функцию $N_1(\zeta)$. Это утверждение непосредственно следует из формулы (4.41) при $s = q-1$. Её же можно получить интегрируя уравнение (4.40).

$$N_{q+1} = (-1)^q N_1^{(-q)} + \sum_{n=1}^{q-1} (-1)^n b_{q-n+1}^{(-n)} + b_{q+1}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

7.) И, наконец, последнее утверждение: функция $N_{q+1}(\zeta)$ q раз непрерывно дифференцируема, то есть $N_{q+1}(\zeta) \in C^q[0, 1]$. Справедливость этого утверждения вытекает из формулы (4.42).

Верхний отрицательный индекс в круглых скобках в формулах (4.41), (4.42) означает интеграл кратности, соответствующий значению индекса

$$N_1^{(-q)} \equiv \int_0^\zeta d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \cdots \int_0^{\eta_{q-1}} N_1(\eta) d\eta = \frac{1}{(q-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^{q-1} N_1(\eta) d\eta, \quad (4.43)$$

$$\langle N_1^{(-q)} \rangle = \frac{1}{q!} \langle (1 - \eta)^q N_1(\eta) \rangle$$

$$b_{q-n+1}^{(-n)} \equiv b_{q-n+1} \int_0^\zeta d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \cdots \int_0^{\eta_{n-1}} 1 d\eta = \frac{b_{q-n+1}}{n!} \zeta^n, \quad (4.44)$$

$$\langle b_{q-n+1}^{(-n)} \rangle = \frac{b_{q-n+1}}{(n+1)!}$$

4.6.3 Окончательные формулы для структурных функций $N_{q+1}(\zeta)$, $q=1,2,\dots$
 Воспользуемся формулами (4.43), (4.44) и запишем для структурных функций более удобные формулы, позволяющие выразить все функции через начальную $N_1(\zeta)$

$$N_{q+1} = \frac{(-1)^q}{(q-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^{q-1} N_1(\eta) d\eta + \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(-1)^n}{n!} b_{q-n+1} \zeta^n + b_{q+1}, \quad (4.45)$$

$$b_{q+1} = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \langle (1 - \eta)^q N_1(\eta) \rangle - \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} b_{q-n+1}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Вычисления нужно проводить последовательно, начиная с $q=1$, то есть с функции $N_2(\zeta)$. Считая при этом, что функция $N_1(\zeta)$ находится по формуле (4.33), либо просто задана

$$\begin{aligned}
N_2 &= -\frac{1}{0!} \int_0^\zeta N_1 d\eta + b_2, & b_2 &= \frac{1}{1!} \langle (1-\eta)N_1 \rangle \\
N_3 &= \frac{1}{1!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)N_1 d\eta - b_2\zeta + b_3, & b_3 &= -\frac{1}{2!} \langle (1-\eta)^2 N_1 \rangle + \frac{1}{2!} b_2 \\
N_4 &= -\frac{1}{2!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^2 N_1 d\eta - b_3\zeta + \frac{b_2}{2!} \zeta^2 + b_4, & b_4 &= \frac{1}{3!} \langle (1-\eta)^3 N_1 \rangle + \frac{b_3}{2!} - \frac{b_2}{3!} \\
N_5 &= \frac{1}{3!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^3 N_1 d\eta - b_4\zeta + \frac{b_3}{2!} \zeta^2 - \frac{b_2}{3!} \zeta^3 + b_5, & b_5 &= -\frac{1}{4!} \langle (1-\eta)^4 N_1 \rangle - \frac{b_4}{2!} + \frac{b_3}{3!} - \frac{b_2}{2!}
\end{aligned}$$

4.7 Доказательство сходимости метода Бахвалова-Победри к точному решению.

Учтем результаты предыдущего раздела 4.6 и вернёмся к разделу 4.5, где для нахождения функции $v(x, \alpha)$ построена бесконечная рекуррентная последовательность задач на отрезке $[0,1]$.

В параграфе 4.6 было показано, что при $q>0$ все константы $h_q = 0$. Поэтому рекуррентные уравнения (4.28) и граничные условия (4.30) и (4.32) принимают вид:

$$h_0 w_0'' + X^*(\bar{x}) = 0, \quad w_0|_{\bar{x}=0} = u_0, \quad h_0 w_0'|_{\bar{x}=1} = -P_0^* \quad (4.46)$$

$$h_0 w_n'' = 0, \quad w_n|_{\bar{x}=0} = -\left[\sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0}, \quad h_0 w_n'|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \text{при } n > 0 \quad (4.47)$$

Решение задачи (4.46) имеет вид:

$$\begin{aligned}
w_0(\bar{x}) &= u_0 + \frac{1}{h_0} \int_0^{\bar{x}} \left[-P_0^* + \int_z^1 X^*(y) dy \right] dz, \\
w_0' &= \frac{1}{h_0} \left[-P_0^* + \int_{\bar{x}}^1 X^*(y) dy \right], \quad w_0^{(q)} = \frac{1}{h_0} X^{*(q-2)}, \quad q \geq 2
\end{aligned} \quad (4.48)$$

Решением всех остальных задач (4.47) являются константы, то есть

$$w_n(\bar{x}) = k_n = -\left[N_n(\zeta) w_0^{(n)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} = \text{const.}, \quad n > 0 \quad (4.49)$$

Вследствие этого асимптотический ряд (4.26) для функции $v(\bar{x}, \alpha)$ принимает вид:

$$v(\bar{x}, \alpha) = w_0(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n k_n \Rightarrow v^{(q)} \equiv \frac{d^q v}{d\bar{x}^q} = \frac{d^q w_0}{d\bar{x}^q} \equiv w_0^{(q)}, \quad q > 0 \quad (4.50)$$

По формулам (4.11) и (4.12) найдем перемещение, деформацию и напряжение

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q N_q(\zeta) v^{(q)} = w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \left[N_q(\zeta) w_0^{(q)}(\bar{x}) + k_q \right] = \\ &= w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \left\{ N_q(\zeta) w_0^{(q)}(\bar{x}) - \left[N_n(\zeta) w_0^{(n)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} \right\} = \\ &= w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \int_0^{\bar{x}} \left[N_q(\eta) w_0^{(q)}(y) \right]' dy = w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \int_0^{\bar{x}} \left[\frac{1}{\alpha} N_q^| w_0^{(q)} + N_q w_0^{(q+1)} \right] dy = \\ &= w_0 + \int_0^{\bar{x}} N_1^| w_0' + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-1} \int_0^{\bar{x}} \left(\underbrace{N_q^| + N_{q-1}}_0 \right) w_0^{(q)} dy = w_0 + \int_0^{\bar{x}} N_1^| w_0' dy = \\ &= w_0 + \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{h_0}{E(\eta)} - 1 \right) w_0' dy = w_0 - \int_0^{\bar{x}} w_0' dy + \int_0^{\bar{x}} \frac{h_0}{E(\eta)} w_0' dy = \\ &= u_0 + h_0 \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{E(\eta)} w_0' dy = \mathbf{u}_0 + \int_0^{\bar{x}} \left[-\mathbf{P}_0^* + \int_z^1 \mathbf{X}^*(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)} = \mathbf{u}(\bar{x}), \end{aligned}$$

что полностью совпадает с полученным ранее точным решением (4.9) исходной задачи в безразмерных координатах!

5 Замечания по поводу рекуррентных уравнений для структурных функций. Класс Аппелевых многочленов.

Структурные функции индекса $q > 1$ выражаются непосредственно через начальную функцию $N_1(\zeta)$ по формулам (4.45). При этом, начальная функция $N_1(\zeta)$ определяется по формуле (4.33) через модуль Юнга $E(\zeta)$, а константы интегрирования определяются из условия нормировки.

Однако рекуррентную последовательность (4.36) можно рассматривать и при любых других интегрируемых начальных функциях $N_1(\zeta)$, а также при других условиях для определения констант интегрирования.

Сведем нашу рекуррентную последовательность (4.36) к известным последовательностям путем замены искомых функций на другие. В частности положим

$$\boxed{N_{q+1}(\zeta) = \frac{(-1)^q}{q!} A_q(\zeta), \quad q = 1, 2, \dots} \quad (5.1)$$

Тогда для новых функций получим эквивалентную рекуррентную последовательность вида:

$$A_q^I(\zeta) = qA_{q-1}(\zeta) \Rightarrow A_q(\zeta) = q \int_0^\zeta A_{q-1}(\eta) d\eta + a_q, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Многочлены, удовлетворяющие рекуррентной последовательности (5.2) называются **Аппелевыми многочленами** [32, стр. 299]. К Аппелеву классу относятся **многочлены Бернулли** [33, стр. 1090], **многочлены Эйлера** [34, стр. 927], **многочлены Эрмита и Лаггера** [32, стр. 299] и т.д. Другие примеры Аппелевых многочленов приведены в книгах [35], [36]. Таким образом, **структурные функции также относятся к Аппелеву классу**.

Для того чтобы рекуррентная последовательность (5.2) была полностью определена нужно задать начало рекурсии, то есть функцию $A_0(\zeta)$. Кроме этого, необходимо также определиться с правилом выбора константы интегрирования a_q

5.1 Многочлены Бернулли. Положим $A_0(\zeta) \equiv 1$. Константы интегрирования находим из условия равенство нулю средних значений $\langle A_q \rangle = 0$. При этих условиях получаются полиномы Бернулли, общепринятое обозначение которых $B_q(\zeta)$. Итак, в соответствии с формулами (5.2) и выше принятыми условиями

$$A_0(\zeta) \equiv 1, \quad a_q = -q \left\langle \int_0^\zeta A_{q-1}(\eta) d\eta \right\rangle \Rightarrow \langle A_q(\eta) \rangle = 0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Многочлены вычисленные по рекуррентной формуле (5.2) при ограничениях (5.3) определяются по формуле:

$$A_q(\zeta) = q \left[\int_0^\zeta A_{q-1}(\eta) d\eta - \langle (1 - \eta) A_{q-1}(\eta) \rangle \right], \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

5.2 Многочлены Эйлера. Положим, как и в предыдущем случае, $A_0(\zeta) \equiv 1$. Константы интегрирования выбираем из условий $\langle A_{2q-1} \rangle = 0$ и $A_{2q}(0) = 0$. При этих условиях получаются полиномы Эйлера — $E_q(\zeta)$.

$$\begin{aligned} a_{2q-1} &= -(2q-1) \left\langle \int_0^\zeta A_{2q-2}(\eta) d\eta \right\rangle \Rightarrow \langle A_{2q-1} \rangle = 0, \\ a_{2q} &= 0 \Rightarrow A_{2q}(0) = 0, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

В этом случае многочлены, вычисленные по рекуррентной формуле (5.2), при ограничениях (5.5), определяются по формуле:

$$A_{2q-1}(\zeta) = (2q-1) \left[\int_0^\zeta A_{2q-2}(\eta) d\eta - \langle (1-\eta)A_{2q-2}(\eta) \rangle \right],$$

$$A_{2q}(\zeta) = 2q \int_0^\zeta A_{2q-1}(\eta) d\eta, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Как видно из формул (5.5) $A_{2q}(1) = 0$. То есть, многочлены Эйлера четной степени на концах отрезка $[0, 1]$ обращаются в нуль.

5.3 Таблица некоторых первых многочленов Бернулли и Эйлера.

<u>Полиномы Бернулли</u>	<u>Полиномы Эйлера</u>
$B_0(\zeta) = 1$	$E_0(\zeta) = 1$
$B_1(\zeta) = \zeta - \frac{1}{2}$	$E_1(\zeta) = \zeta - \frac{1}{2}$
$B_2(\zeta) = \zeta^2 - \zeta + \frac{1}{6}$	$E_2(\zeta) = \zeta^2 - \zeta$
$B_3(\zeta) = \zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta^2 + \frac{1}{2}\zeta$	$E_3(\zeta) = \zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta^2 + \frac{1}{4}$
$B_4(\zeta) = \zeta^4 - 2\zeta^3 + \zeta^2 - \frac{1}{30}$	$E_4(\zeta) = \zeta^4 - 2\zeta^3 + \zeta$
$B_5(\zeta) = \zeta^5 - \frac{5}{2}\zeta^4 + \frac{5}{3}\zeta^3 - \frac{1}{6}\zeta$	$E_5(\zeta) = \zeta^5 - \frac{5}{2}\zeta^4 + \frac{5}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$
$B_6(\zeta) = \zeta^6 - 3\zeta^5 + \frac{5}{2}\zeta^4 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{42}$	$E_6(\zeta) = \zeta^6 - 3\zeta^5 + 5\zeta^3 - 3\zeta$

6 Метод Горбачева-Победри (МГП) для осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В этом разделе, на примере одномерной задачи, рассматривается другой подход к решению задач механики композитов. Основой нового подхода является представление решения исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующей задачи для уравнения с постоянными коэффициентами. Коэффициенты исходного уравнения могут быть произвольными интегрируемыми функциями координат, в том числе и периодическими функциями. В отличие от метода Бахвалова–Победри **в новом подходе нужно решать одну рекуррентную последовательность задач для нахождения структурных функций и один раз решить задачу для однородного тела с эффективными характеристиками. Более того коэффициенты уравнения могут быть не только функциями координат, но и функциями времени.** Такой случай рассмотрен в работе [37]. Таким образом, новый метод автоматически включает в себя и МБП для регулярных структур.

Вначале рассматривается задача для неоднородной (не обязательно периодически неоднородной) по толщине плиты из упругого материала. Поведение плиты описывается простыми уравнениями, допускающими точное решение.

Далее рассматривается обобщение нового метода на случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка общего вида с переменными интегрируемыми коэффициентами. Фундаментальное решение исходного уравнения находится методом возмущений. В результате получаются приближенные формулы для решения исходного уравнения. Получена оценка количества членов ряда, приближающая точное решение с заданной точностью. Для тестирования МГП рассмотрен конкретный пример уравнения Чебышева, имеющего точное решение.

6.1 Исходная модельная задача.

Исходная задача для неоднородной по толщине, бесконечной в плане плиты $-\infty < x_1, x_2 < +\infty, 0 \leq x_3 \leq L$, равномерно нагруженной сверху и закреплённой снизу описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} + X(x) &= 0, \quad \sigma = E(x)\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \\ \mathcal{L}(u) + X(x) &= 0, \quad u(0) = u_0, \quad E(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = -P_0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\mathcal{L}(u) \equiv \frac{d}{dx} \left[E(x) \frac{du}{dx} \right] \text{ — оператор исходного уравнения} \quad (6.2)$$

Общее решение исходного уравнения легко находится

$$u(x) = - \int_0^x \frac{dz}{E(z)} \int_0^z X(y) dy + K_1 \int_0^x \frac{dy}{E(y)} + K_2 \quad (6.3)$$

Константы интегрирования определяем из граничных условий

$$K_1 = -P_0 + \int_0^L X(y) dy, \quad K_2 = u_0 \quad (6.4)$$

6.1.1 Сопутствующая модельная задача.

Наряду с исходной задачей рассмотрим точно такую же задачу для однородной плиты

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dx} + X(x) &= 0, \quad \tau = E_o e, \quad e = \frac{dv}{dx}; \\ \mathcal{L}_o(v) + X(x) &= 0, \quad v(0) = u_0, \quad E_o \frac{dv}{dx}\Big|_{x=L} = -P_0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\mathcal{L}_o(v) \equiv E_o \frac{d^2 v}{dx^2} \text{ — оператор сопутствующего уравнения} \quad (6.6)$$

Общее решение сопутствующего уравнения запишем следующим образом:

$$v(x) = -\frac{1}{E_o} \int_0^x dz \int_0^z X(y) dy + \frac{K_1}{E_o} x + K_2 \quad (6.7)$$

Такая запись решения сопутствующего уравнения выбрана с той целью, чтобы произвольные константы K_1 и K_2 в исходном и сопутствующем уравнениях имели одинаковую размерность. В этом случае общее решение (6.3) исходного уравнения, при $E(x) = E_o$, будет полностью совпадать с решением (6.7) сопутствующего уравнения.

6.1.2 Фундаментальное решение исходного модельного уравнения.

Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение исходного уравнения (6.1). То есть, $G(x, \xi)$ — это любая функция переменных x и ξ удовлетворяющая следующему уравнению:

$$\mathcal{L}(G) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (6.8)$$

где $\delta(x - \xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [38, стр. 194], [39, стр. 42]. Основное свойство дельта-функции, которое нам здесь понадобится, заключается в следующем равенстве

$$\int_0^L \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in (0, L)$$

Уравнение (6.8) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (6.1), при разрывном коэффициенте $E(x)$, также является обобщенным [27, стр. 30-35].

Фундаментальное решение уравнения (6.8) имеет самый простой вид:

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dy}{E(y)}, \quad (6.9)$$

где $h(x - \xi)$ — функция Хевисайда

$$h(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < \xi \\ 1, & \text{if } x \geq \xi \end{cases}, \quad \frac{dh(x - \xi)}{dx} = \delta(x - \xi)$$

Константы интегрирования в формуле (6.11) выбраны нулевыми, поскольку нам нужно любое решение уравнения (6.8).

6.1.2.1 Замечание по поводу дифференцирования обобщенных функций.

Необходимо помнить, что функция $G(x, \xi)$, представленная формулой (6.11) является обобщенной функцией. Рассмотрим функцию

$$F(x, \xi) = h(x - \xi) f(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ f(x - \xi), & x \geq \xi \end{cases}$$

где $f(x - \xi) = O[(x - \xi)^n]$. Возьмём первую производную $F'_x(x, \xi)$. С одной стороны, применяем правило дифференцирования произведения функций, с другой стороны дифференцируем фигурную скобку в предыдущей формуле, получаем:

$$F'_x = \delta(x - \xi)f(x - \xi) + h(x - \xi)f'_x(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ f'_x(x - \xi), & x \geq \xi \end{cases} = h(x - \xi)f'_x(x - \xi)$$

Отсюда следует, что $\delta(x - \xi)f(x - \xi) = 0$ — обобщённый нуль, при $f(x - \xi) = O[(x - \xi)^n]$ и $n \geq 1$. В самом деле:

$$\int_0^L \delta(x - \xi)f(x - \xi)dx = f(\xi - \xi) = 0$$

Таким образом, нужные нам производные от фундаментального решения определяются по формулам:

$$\frac{dG(x, \xi)}{dx} = -\frac{h(x - \xi)}{E(x)}, \quad \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} = \frac{h(x - \xi)}{E(\xi)} \quad (6.10)$$

6.1.3 Интегральная формула представления решения исходного модельного уравнения.

Решение исходного уравнения (6.1) можно представить в виде следующей интегральной формулы [40, 41]:

$$u(x) = v(x) + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi, \quad (6.11)$$

где $\tilde{E}(\xi) = E_o - E(\xi)$. Непосредственной проверкой убедимся, что выражение (6.8) удовлетворяет уравнению (6.1). В самом деле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) + X(x) &= \mathcal{L}(v) + \int_0^L \frac{d}{d\xi} [\mathcal{L}(G(x, \xi))] \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) - \int_0^L \frac{d}{d\xi} [\delta(x - \xi)] \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} \int_0^L \delta(x - \xi) \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} [(E_o - E(x)) v'(x)] + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}_o(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) = \mathcal{L}_o(v) + X(x) = 0 \end{aligned}$$

6.1.4 Вывод общего решение исходного уравнения из интегральной формулы.

В данном случае общее решение исходного уравнения находится явно и определяется по формуле (6.3). Найдём теперь решение исходного уравнения с помощью интегральной формулы (6.8). Для этого подставим в интегральную формулу общее решение (6.7) сопутствующего уравнения и представим результат в виде:

$$u(x) = \Phi(x) + K_1 A(x) + K_2 B(x), \quad (6.12)$$

где K_1 и K_2 , как и ранее, произвольные константы интегрирования, а

$$\Phi(x) = -\frac{1}{E_o} \left[\int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right], \quad (6.13)$$

$$A(x) = \frac{1}{E_o} \left[x + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) d\xi \right], \quad (6.14)$$

$$B(x) = 1 \quad (6.15)$$

В задачах, где невозможно найти явный вид фундаментального решения, пользуются различными приближенными выражениями для фундаментального решения. Далее по формулам (6.12)-(6.15) получаем приближенное решение исходного уравнения.

6.1.5 Подстановка интегральной формулы в исходное уравнение.

Покажем, что в нашем модельном примере, где фундаментальное решение находится явно, формулы (6.12)-(6.15) дают точное общее решение исходного уравнения.

Для этого преобразуем выражения для $\Phi(x)$ и $A(x)$, учитывая явный вид производной от фундаментального решения (6.10)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{E_o} \left[\int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^L \frac{h(x-\xi)}{E(\xi)} \tilde{E}(\xi) d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{E_o} \left[\int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^x \frac{\tilde{E}(\xi)}{E(\xi)} d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{E_o} \int_0^x \left(1 + \frac{E_o}{E(\xi)} - 1 \right) d\xi \int_0^\xi X(y) dy = -\int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)} \int_0^\xi X(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{E_o} \left[x + \int_0^L \frac{h(x-\xi)}{E(\xi)} \tilde{E}(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{E_o} \left[x + \int_0^x \frac{\tilde{E}(\xi)}{E(\xi)} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{E_o} \left[x + \int_0^x \left(\frac{E_o}{E(\xi)} - 1 \right) d\xi \right] = \int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)} \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (6.12), получим точное общее решение (6.3) исходного уравнения.

7 Уравнения второго порядка общего вида.

Рассмотрим далее более сложное исходное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами общего вида [42]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (7.1)$$

Иногда такие уравнения допускают точные аналитические решения. Однако в большинстве важных случаев для решения подобных уравнений приходится прибегать к различным приближенным способам.

Ниже излагается ещё один приближенный способ нахождения общего решения исходного уравнения. Он основан на интегральном представлении решения исходного уравнения через общее аналитическое решение уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение) [43]. Осреднение дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами излагается в работе [44]. Сравнение метода МГП с методом Мори-Танака проводилось в работе [45]

Итак, пусть функция $f_2(x)$, при любом x , не обращается в нуль, тогда уравнение (7.1) можно свести к самосопряженной форме [46, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$[C(x)u']' + q(x)u + X(x) = 0, \quad (7.2)$$

$$C = \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad q = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad X = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx.$$

Будем считать, что коэффициент $C(x) > 0$, причем $C_{min} \leq C(x) \leq C_{max}$, а коэффициент $q(x)$ ограничен и может быть как положителен, так и отрицателен в зависимости от переменной x , то есть $q_{min} \leq |q(x)| \leq q_{max}$

Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения (7.2), то есть $G(x, \xi)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + q(x)G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad x, \xi \in (a, b), \quad (7.3)$$

где $\delta(x - \xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [38, стр. 194], [39, стр. 42]. Уравнение (7.3) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (7.2) при разрывных коэффициентах $C(x)$, $q(x)$ также является обобщенным [27, стр. 30-35].

Пусть $v(x)$ — решение, так называемого, сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами $C_o = const.$ и $q_o = const.$

$$C_o v''(x) + q_o v(x) + X(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (7.4)$$

Во всех трех уравнениях область определения одна и та же $[a, b]$. В исходном и сопутствующем уравнении одинаковые свободные члены.

7.0.6 Интегральная формула.

Воспользуемся результатами работ [40, 43] и представим решение $u(x)$ исходного уравнения (7.2) с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения (7.4) и фундаментальное решение (7.3) следующим образом:

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi, \quad (7.5)$$

где $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi)$.

Подстановкой выражения (7.5) в исходное уравнение (7.2) убеждаемся, что оно удовлетворяется. В самом деле, пусть

$$\mathcal{L}(\bullet) \equiv [C(x)(\bullet)]' + q(x)(\bullet), \quad \mathcal{L}^o(\bullet) \equiv C_o(\bullet)'' + q_o(\bullet)$$

— исходный и сопутствующий операторы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) + X(x) &= \mathcal{L}(v) + \int_a^b \frac{d\mathcal{L}(G(x, \xi))}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b \mathcal{L}(G(x, \xi)) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) - \int_a^b \frac{d\delta(x - \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi + \int_a^b \delta(x - \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} [\tilde{C}(\xi) v'(x)] + \tilde{q}(\xi) v(x) + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}^o(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) = \\ &= \mathcal{L}^o(v) + X(x) = 0 \end{aligned}$$

7.0.7 Общее решение сопутствующего уравнения.

Общее решение сопутствующего уравнения (7.5) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda_o x} + K_2 e^{-i\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \quad (7.6)$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (7.5) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda_o C_o} \left[e^{i\lambda_o x} \int X(x) e^{-i\lambda_o x} dx - e^{-i\lambda_o x} \int X(x) e^{i\lambda_o x} dx \right] \quad (7.7)$$

В формулах (7.6) и (7.7) можно выделить действительное решение. В случае $q_o > 0$

$$v(x) = K_1 \cos(\lambda_o x) + K_2 \sin(\lambda_o x) + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \quad (7.8)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[\sin(\lambda_o x) \int X(x) \cos(\lambda_o x) dx - \cos(\lambda_o x) \int X(x) \sin(\lambda_o x) dx \right] \quad (7.9)$$

Если же $q_o < 0$, тогда

$$v(x) = K_1 e^{\lambda_o x} + K_2 e^{-\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}}, \quad (7.10)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[e^{\lambda_o x} \int X(x) e^{-\lambda_o x} dx - e^{-\lambda_o x} \int X(x) e^{\lambda_o x} dx \right] \quad (7.11)$$

В формулах (7.7)-(7.11) K_1 и K_2 — произвольные действительные константы.

7.0.8 Общее решение исходного уравнения.

Подставив (7.6) в интегральную формулу (7.5), получим общее решение исходного уравнения (7.2)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x), \quad (7.12)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= e^{i\lambda_o x} + i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi = \\ &= \begin{cases} \cos(\lambda_o x) - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin(\lambda_o \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos(\lambda_o \xi) d\xi, & q_o > 0 \\ e^{-\lambda_o x} - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-\lambda_o \xi} d\xi, & q_o < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= e^{-i\lambda_o x} - i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi = \\ &= \begin{cases} \sin(\lambda_o x) - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \cos(\lambda_o \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \sin(\lambda_o \xi) d\xi, & q_o > 0 \\ e^{\lambda_o x} + \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{\lambda_o \xi} d\xi, & q_o < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (7.15)$$

7.0.9 Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения.

Постоянные коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения — это любые физически допустимые константы. Целесообразно увязать их со свойствами исходной задачи, например, положить их равными эффективным характеристикам [8, 27] так, что

$$C_o = \frac{1}{\langle 1/C \rangle}, \quad q_o = \langle q \rangle, \quad \langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (7.16)$$

В случае задачи Коши, среднее понимается как предельное значение при $b \rightarrow \infty$ [47, стр. 247-249].

7.0.10 Построение фундаментального решения исходного уравнения.

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (7.12), (7.13) если известно фундаментальное решение уравнения (7.3) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (7.3) методом возмущений [6, 48]. Для этого перепишем уравнение (7.3)

следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + \varkappa q(x) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (7.17)$$

где \varkappa — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным единице. Будем искать решение уравнения (7.17) в виде ряда по степеням параметра \varkappa

$$G(x, \xi, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x, \xi) \quad (7.18)$$

Подставим ряд (7.18) в уравнение (7.17), соберем коэффициенты при одинаковых степенях \varkappa и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$[C(x)G'_0(x, \xi)]' + \delta(x - \xi) = 0, \quad [C(x)G'_n(x, \xi)]' + q(x)G_{n-1}(x, \xi) = 0, \quad n > 0 \quad (7.19)$$

Или

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi) &= - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz, & G_n(x, \xi) &= - \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2 = \\ & & & = (-1)^{n+1} \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdots \int_a^{x_{2n-2}} \frac{dx_{2n-1}}{C(x_{2n-1})} \int_a^{x_{2n-1}} q(x_{2n}) dx_{2n} \int_a^{x_{2n}} \frac{h(z - \xi) dz}{C(z)}, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Здесь $h(x - \xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [39]. Константы интегрирования уравнений (7.19) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Преобразуем выражение (7.20) для функции $G_0(x, \xi)$

$$G_0(x, \xi) = - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz = - \begin{cases} 0, & x < \xi \\ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, & x \geq \xi \end{cases} = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, \quad (7.21)$$

Дифференцируя (7.21) по ξ , найдем обобщенную производную от $G_0(x, \xi)$ по ξ , которая нам понадобится в дальнейшем

$$\frac{\partial G_0}{\partial \xi} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \quad (7.22)$$

Используя формулы (7.21) и (7.22) перепишем выражения для коэффициентов $G_n(x, \xi)$ из (7.20) и их производных по переменным x и ξ при $n \geq 1$

$$G_n(x, \xi) = -(-1)^n h(x - \xi) \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}; \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} = -(-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)};$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} = (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n, \quad x_0 \equiv x.$$

Здесь для сокращения записи введено вспомогательное обозначение

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy, \quad \psi'_{\xi}(x, \xi) = -\frac{q(\xi)}{C(x)}$$

Пользуясь этим обозначением, можно записать выражение (7.23) в виде рекуррентного соотношения

$$G_n(x, \xi) = - \int_a^x \psi(y, \xi) G_{n-1}(y, \xi) dy, \quad (n > 0); \quad G_0(x, \xi) = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \quad (7.24)$$

Подставив далее выражения (7.23) для $G_n(x, \xi)$ в ряд (7.18) и положив в нём $\varkappa = 1$, получим фундаментальное решение исходного уравнения в виде бесконечного ряда. Причем, если $q(x) > 0$, то это знакопеременный ряд. Если же $q(x) < 0$, то ряд будет знакопостоянным. Итак:

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad x_0 \equiv x; \quad (7.25)$$

$$G'_x(x, \xi) = -\frac{h(x - \xi)}{C(x)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)} \right];$$

$$G'_{\xi}(x, \xi) = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \right]$$

Пусть $G^{(n)}(x, \xi)$ — частичная сумма ряда (7.25), тогда

$$G^{(n+1)}(x, \xi) = G^{(n)}(x, \xi) - h(x - \xi) (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}$$

Если $C = C_0 = const.$, а $q = q(x)$ — переменная, тогда

$$\int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 = \frac{1}{C_0} \int_{\xi}^x dx_1 \int_{\xi}^{x_1} q(y) dy = \frac{1}{C_0} \int_{\xi}^x (x - x_1) q(x_1) dx_1,$$

следовательно

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \left[\frac{x - \xi}{C_0} - \right.$$

$$\left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{C_0^{m+1}} \int_{\xi}^x (x-x_1)q(x_1)dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} (x_{n-1}-x_n)(x_n-\xi)q(x_n)dx_n + \cdots \right]$$

Если же $q = q_0 = const.$, а $C = C(x)$ — переменная, тогда

$$\psi(x, \xi) = q_0 \frac{x - \xi}{C(x)},$$

следовательно

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \left[\int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_0^n \int_{\xi}^x \frac{x_1 - \xi}{C(x_1)} dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_n} \frac{x_n - \xi}{C(x_n)} dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)} \right]$$

Пусть теперь $C = C_0 = const.$ и $q = q_0 = const.$, тогда из формулы (7.23), а также с учетом того, что

$$\int_{\xi}^x (x-z)(z-\xi)^m dz = \frac{(x-\xi)^{m+2}}{(m+1)(m+2)},$$

получаем

$$G_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} \frac{h(x-\xi)q_0^n}{(2n+1)! C_0^{n+1}} (x-\xi)^{2n+1}, \quad n \geq 0 \quad (7.26)$$

В этом случае ряд (7.25) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (7.5), которое понимается в обобщенном смысле и его можно найти, например, в книгах [49, 50]

$$G(x, \xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C_0} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s_0} \right)^{2n+1} = s_0 \sin \frac{x-\xi}{s_0}, \quad s_0 = \sqrt{\frac{C_0}{q_0}}, \quad q_0 > 0, \\ x - \xi, \quad q_0 = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_0}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s_0} \right)^{2n+1} = s_0 \operatorname{sh} \frac{x-\xi}{s_0}, \quad s_0 = \sqrt{\frac{C_0}{-q_0}}, \quad q_0 < 0. \end{array} \right.$$

В общем случае, когда коэффициенты C и q переменные, можно получить оценку абсолютной величины n -го члена ряда (7.25). Для этого воспользуемся выражением (7.26), в соответствии с которым при $x \geq \xi$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(x-\xi)^{2n+1} |q|_{\min}^n}{(2n+1)! C_{\max}^{n+1}} &\leq |G_n(x, \xi)| \leq \frac{(x-\xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n+1)! C_{\min}^{n+1}} \leq \frac{L^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n+1)! C_{\min}^{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{L^{2n+1} \langle q \rangle^n \langle 1/C \rangle^{n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n+1)! C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s^*} \right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sin \frac{x-\xi}{s^*}, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (7.25) сходится равномерно на всём промежутке $a \leq x \leq b$.

7.1 Примеры.

Рассмотрим некоторые известные уравнения [51, стр.254 № 1140]

$$\begin{array}{lll}
 x^2 u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0, & [xu']' + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)u = 0, & \text{Ур. Бесселя} \\
 xu'' + (1-x)u' + mu = 0, & [xe^{-x}u']' + me^{-x}u = 0, & \text{Ур. Лагерра} \\
 u'' - 2xu' + 2mu = 0, & [e^{-x^2}u']' + 2me^{-x^2}u = 0, & \text{Ур. Эрмита} \\
 (1-x^2)u'' - xu' + m^2u = 0, & [\sqrt{1-x^2}u']' + \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0, & \text{Ур. Чебышева} \\
 (1-x^2)u'' - 2xu' + m(m+1)u = 0, & [(1-x^2)u']' + m(m+1)u = 0, & \text{Ур. Лежандра}
 \end{array}$$

Более подробная информация о перечисленных и других подобных уравнениях содержится, например, в справочниках [52, глава 10], [53, глава 22], [54, глава 11].

7.1.1 Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$

Общее решение уравнения Чебышева имеет вид [51, стр.164 № 736]:

$$u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x), \quad (7.28)$$

где

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad U_m(x) = \sin(m \arccos x) \quad (7.29)$$

полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода. Функции $T_m(x)$ и $U_m(x)$ можно представить в виде полиномов m -й степени по от x , потому они и называются полиномами. Детальное исследование полиномов Чебышева дано в книгах [54, 55].

Рассмотрим более подробно самосопряженную форму уравнения Чебышева. В этом уравнении $C(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = m^2/\sqrt{1-x^2}$. По формулам (7.16) найдем коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения

$$\begin{aligned}
 C_o &= \frac{1}{\langle 1/C \rangle} = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[\arcsin x \Big|_0^1 \right]^{-1} = \frac{2}{\pi}, \\
 q_o &= \langle q \rangle = \frac{m^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{m^2 \pi}{2}
 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Далее по формулам (7.8) найдем общее действительное решение сопутствующего уравнения

$$v(x) = K_1 \cos \lambda_o x + K_2 \sin \lambda_o x, \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} = \frac{m\pi}{2} \quad (7.31)$$

Здесь K_1 и K_2 — произвольные действительные константы. Вычислим далее функцию $\psi(x)$

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy = \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}} \int_{\xi}^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = m^2 \frac{\arcsin x - \arcsin \xi}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.32)$$

Далее нам понадобится интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^x \frac{(\arcsin y - \arcsin \xi)^n}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \int_{\xi}^x (\arcsin y - \arcsin \xi)^n d(\arcsin y - \arcsin \xi) = \\ &= \frac{1}{n+1} (\arcsin y - \arcsin \xi)^{n+1} \Big|_{\xi}^x = \frac{1}{n+1} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{n+1} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \arccos^{n+1}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x > \xi \\ -\frac{1}{n+1} \arccos^{n+1}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x < \xi \end{cases}, \quad [33, \text{стр.63, №5}] \end{aligned}$$

Пользуясь этими результатами и формулами (7.21), (7.23) получаем, вместо ряда (7.25) из квадратур ряд из элементарных функций, который представляет собой разложение синуса в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sin [m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)] \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из (7.33) находим

$$\begin{aligned} G'_{\xi}(x, \xi) &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n} = \\ &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos [m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)] \end{aligned} \quad (7.34)$$

В формуле (7.34) удержана только регулярная часть, не содержащая дельта-функцию Дирака. Далее найдем коэффициенты

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi) &= \frac{2}{\pi} - \sqrt{1-\xi^2} = -\sqrt{1-\xi^2} \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right), \\ \tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi) &= m^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{m^2\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right), \end{aligned}$$

воспользуемся общими формулами (7.13), (7.14) и найдём функции $A(x)$ и $B(x)$

$$\begin{aligned} A(x) \equiv A_m(x) &= \cos \frac{m\pi x}{2} - \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^1 G'_{\xi}(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin \frac{m\pi\xi}{2} d\xi - \int_{-1}^1 G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos \frac{m\pi\xi}{2} d\xi = \\ &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot \left[\sin \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi \end{aligned} \quad (7.35)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\varphi(x, \xi) = \arcsin x - \arcsin \xi, \quad \varphi(x, x) = 0, \quad \varphi(x, -1) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Бесконечные ряды в формуле (7.35) представляют собой разложения в ряды Тейлора тригонометрических функций $\cos \varphi(x, \xi)$ и $\sin \varphi(x, \xi)$, поэтому эти ряды можно свернуть и получить точное решение уравнения Чебышева

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left\{ \left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \left[\sin \frac{m\pi\xi}{2} \cdot \cos(m\varphi) + \cos \frac{m\pi\xi}{2} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \sin(m\varphi) \right] \right\} d\xi = \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \sin \left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d\xi = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sin \left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d_\xi \left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left[(m\pi\xi)/2 + m\varphi(x, \xi) \right]^{2n+1}}{(2n+1)!} d_\xi \left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left[(m\pi\xi)/2 + m\varphi(x, \xi) \right]^{2n+2}}{(2n+2)!} \Big|_{-1}^x = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n}}{(2n)!} = \tag{7.36} \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} - \cos \frac{m\pi x}{2} + \cos(m \arcsin x) = \cos(\mathbf{m} \arcsin \mathbf{x}) \tag{7.37}
\end{aligned}$$

Прделав похожие преобразования в формуле (7.14), найдем

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv B_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \left[\cos \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sin \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi = \sin \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(\mathbf{m} \arcsin \mathbf{x}) \tag{7.38}
\end{aligned}$$

Функции $A_m(x)$ и $B_m(x)$ являются точными независимыми решениями уравнения Чебышева. Они представляют собой линейные комбинации функций Чебышева $T_m(x)$ и $U_m(x)$ (7.29). Для доказательства этого факта нужно всего лишь воспользоваться тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

В результате чего

$$A_m(x) = \cos \frac{m\pi}{2} T_m(x) + \sin \frac{m\pi}{2} U_m(x), \quad B_m(x) = \sin \frac{m\pi}{2} T_m(x) - \cos \frac{m\pi}{2} U_m(x)$$

Отсюда получаются формулы, приведенные в книге [56, стр. 59].

$$\begin{aligned} A_{2m} &= (-1)^m T_{2m}, & A_{2m+1} &= (-1)^m U_{2m+1}, \\ B_{2m} &= (-1)^{m+1} U_{2m}, & B_{2m+1} &= (-1)^m T_{2m+1} \end{aligned}$$

7.1.2 Приближенные формулы решения уравнения Чебышева. Сравнение с точными решениями.

Рассмотрим частичные суммы ряда (7.36) и затем сравним их с точным решением (7.37)

$$A_{m(I)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad (7.39)$$

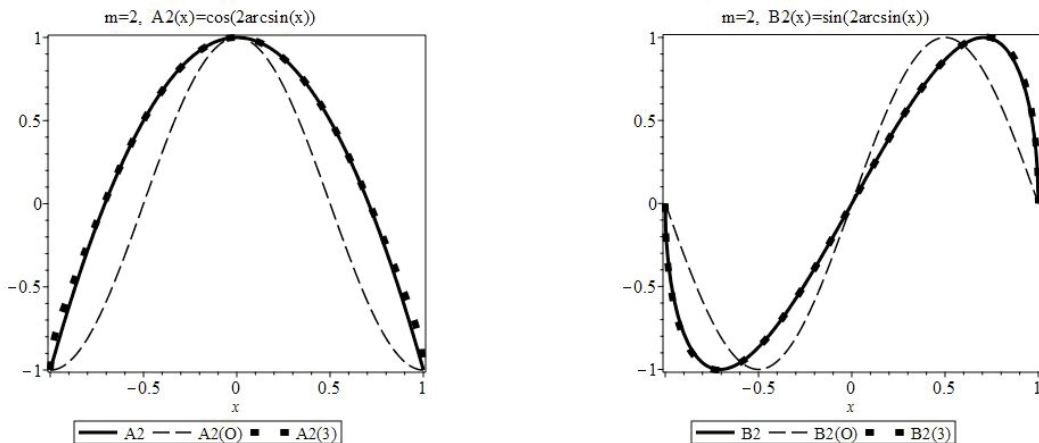
$$A_{m(I)} = A_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2I}}{(2I)!}, \quad A_m^{(0)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2}$$

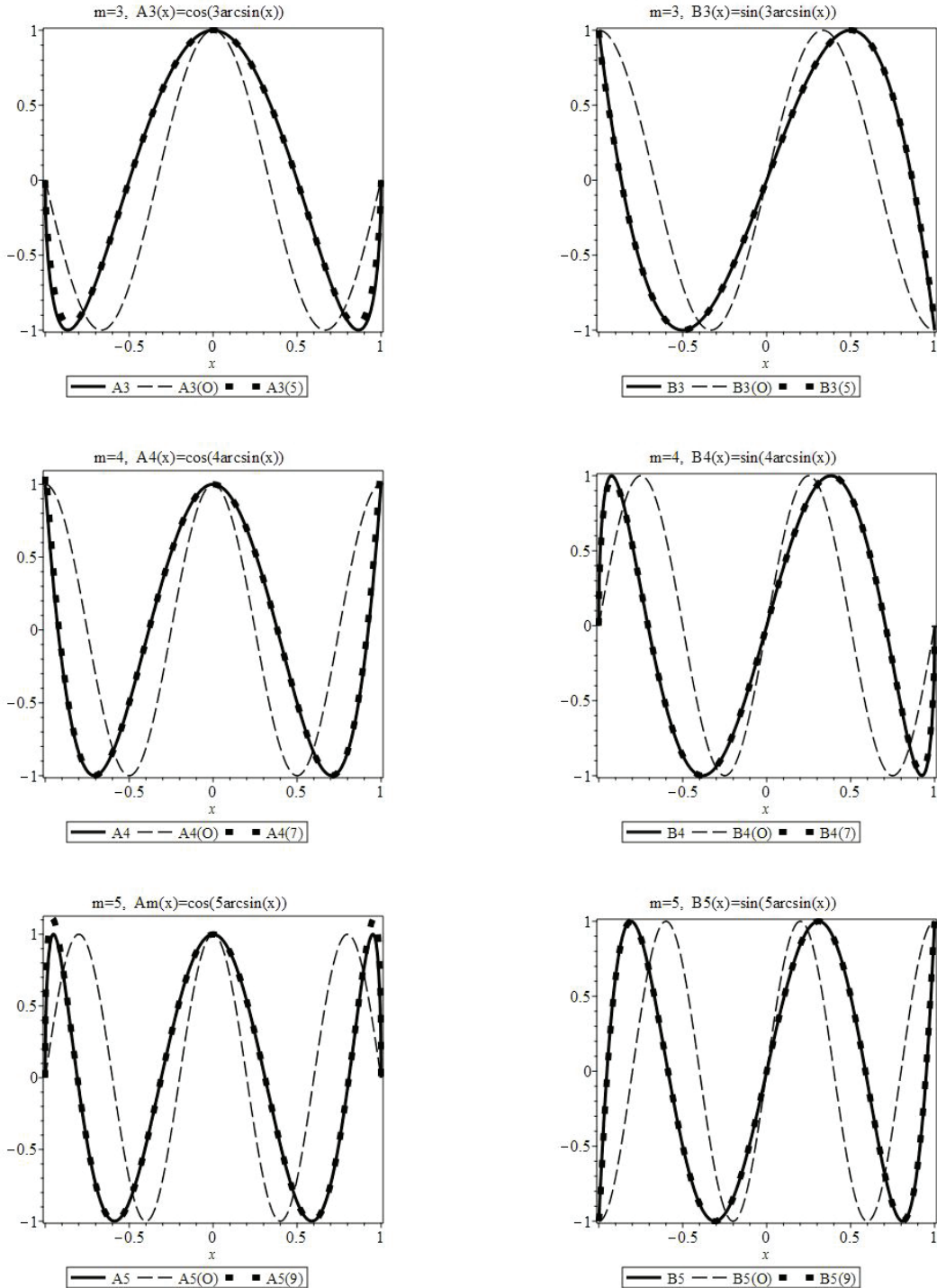
$$B_{m(I)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (7.40)$$

$$B_{m(I)} = B_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I+1} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2I+1}}{(2I+1)!}, \quad B_m^{(0)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2}$$

На представленных ниже рисунках изображены графики независимых точных $A_m(x)$, $B_m(x)$ и приближенных $A_{m(I)}(x)$, $B_{m(I)}(x)$ решений уравнения Чебышева в виде частичных сумм, вытекающих из общего интегрального представления (7.5).

Сплошной линией обозначены графики точных решений уравнения Чебышева $A_m(x)$, и $B_m(x)$ при $m=2,3,4,5$. Штриховые линии обозначают точные решения $A_{m(O)}(x)$, $B_{m(O)}(x)$ сопутствующего уравнения (7.33) с постоянными коэффициентами, найденные по общим формулам (7.16). Кривые обозначенные прямоугольными точками соответствуют приближенным решениям $A_{m(I)}(x)$ и $B_{m(I)}(x)$ в виде частичных сумм, найденным по формулам (7.39), (7.40). Число (I) в круглых скобках обозначает число членов в частичных суммах.





Графики решений уравн. Чебышева при различных значениях параметра m

Как видно из рисунков лишь функция $A_{5(9)}(x)$ визуально отличается от точного решения вблизи граничных точек $x_1 = \pm 1$. Функция $A_{5(10)}(x)$, которая является суммой из десяти членов ряда, (7.39) будет практически неотличима от точного решения.

Можно получить явные значения числа членов частичных сумм (7.39), (7.40), которые нужны для получения заранее заданного малого максимального отклонения ε приближенного решения от точного. Для этого воспользуемся оценкой (7.27) остаточного члена ряда для фундаментального решения в общем случае кусочно гладких коэффициентов

исходного уравнения. В случае уравнения Чебышева, с учетом формул (7.30), эта оценка принимает вид:

$$\frac{(b-a)^{2I+1} |\langle q \rangle|^I \langle 1/C \rangle^{I+1}}{(2I+1)!} = \frac{2^{2I+2} m^{2I}}{(2I+1)!} \leq \varepsilon \quad (7.41)$$

В таблице приведены значения чисел I , найденные по формуле (7.41), достаточные для достижения требуемой точности ε при заданных числах m .

	m								
$\varepsilon \downarrow$	1	2	3	4	5	10	20	50	100
0.5	1	3	5	8	10	24	50	131	267
0.1	2	4	6	11	11	24	51	132	267
0.01	3	5	8	13	13	26	52	133	268
0.001	3	6	9	14	14	27	53	134	270

8 Заключение. Направление дальнейших исследований.

В заключении сформулируем основные направления дальнейших исследований в области дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью МГП.

1. Исследование общего уравнения классических и неклассических ортогональных многочленов.
2. Прямая и обратная задача Штурма-Лиувилля.
3. Применение МГП для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
4. Осреднение обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Общий случай.
5. Устойчивость неоднородных стержней с переменным поперечным сечением под действием распределенной продольной силы.

Список литературы

- [1] Седов Л.И. *Механика сплошной среды. Том 1.* Наука, Москва, 1970.
- [2] Тимошенко С.П. *История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений.* Книжный дом 'Либроком', Москва, 2009.
- [3] Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* Наука, Москва, 1977.
- [4] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов.* Мир, Москва, 1982.
- [5] Нигматулин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред.* Наука, Москва, 1978.
- [6] Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел.* МГУ, Москва, 1976.
- [7] Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2015.
- [8] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* МГУ, Москва, 1984.
- [9] Берже М. *Геометрия. Том первый.* Мир, 1984.
- [10] Пагано Н. *Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. В кн. Механика композиционных материалов т.2., с.13-37. Пер с англ под ред. А.А Ильюшина и Б.Е. Победри.* Мир, 1978.
- [11] Победря Б.Е., Ломакин В.А. Об эффекте моментных напряжений в неоднородной среде. *Проблемы надёжности и строит. механики*, pages 112–117, 1967.
- [12] Ломакин В.А. О задачах теории упругости для тел с быстроосциллирующими упругими свойствами. *Вестник МГУ*, (2):??–??, 1967.
- [13] Ломакин В.А. *Статистические задачи механики деформируемых твердых тел.* Наука, Москва, 1970.
- [14] Победря Б.Е. Термовязкоупругая задача об армированном полом цилиндре. *Изв. АН СССР. МТТ*, (5):173–179, 1971.
- [15] Победря Б.Е. О структурной анизотропии в вязкоупругости. *Механика полимеров*, (4):622–179, 1976.
- [16] Победря Б.Е., Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов. *Вестник МГУ*, (5):101–111, 1977.
- [17] Горбачев В.И., Победря Б.Е. Об упругом равновесии неоднородных полос. *Известия АН СССР. МТТ*, (5):111–118, 1979.
- [18] Победря Б.Е., Т. Холматов. Деформирование слоистых композитов. *Механика композитных материалов*, (5):778–788, 1981.
- [19] Победря Б.Е. Об упругих композитах. *Механика композитных материалов*, (2):216–222, 1983.

- [20] Победря Б.Е. К теории вязкоупругости структурно- неоднородных сред. *Прикладная математика и механика*, 47(1):133–139, 1983.
- [21] Победря Б.Е., Горбачев В.И. Концентрация напряжений и деформаций в композитах. *Механика композитных материалов*, (2):207–214, 1984.
- [22] Мольков В.А., Победря Б.Е. Эффективные модули упругости однонаправленного волокнистого композита. *ДАН СССР*, 275(3):586–589, 1984.
- [23] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Наука, Москва, 1970.
- [24] Бахвалов Н.С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. *ДАН СССР*, 218(5):1046–1048, 1974.
- [25] Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осцилирующими коэффициентами. *ДАН СССР*, 221(3):516–519, 1975.
- [26] Бахвалов Н.С. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осцилирующими коэффициентами. *ДАН СССР*, 225(2):249–252, 1975.
- [27] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осредненные процессы в периодических средах*. Наука, Москва, 1984.
- [28] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*. Научная думка, М, 1974.
- [29] Э. Санчес-Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Мир, Москва, 1984.
- [30] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математические задачи теории сильно неоднородных сред*. Изд-во МГУ, Москва, 1990.
- [31] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. *Усреднение дифференциальных операторов*. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 1993.
- [32] Гл.ред. Виноградов И.М., editor. *Математическая энциклопедия. Т.1 А-Г*. Советская энциклопедия, Москва, 1977.
- [33] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Изд-во Наука, Москва, 1971.
- [34] Гл.ред. Виноградов И.М., editor. *Математическая энциклопедия. Т.5 Сл-Я*. Советская энциклопедия, Москва, 1985.
- [35] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Перевод с английского Н.Я. Виленкина*. Наука, Москва, 1973-1975.
- [36] Voas R.P., Buck R.C. Polynomial expansions of analitic funktions. *Континуальная теория дислокаций*. В., 1958.
- [37] Горбачев В.И. Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами. *Чебышевский сборник*, 18(3):209–233, 2017.

- [38] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, М, 1972.
- [39] Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Мир, Москва, 1978.
- [40] Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред. *Вычислительная механика деформируемого твердого тела*, (2):61–76, 1991.
- [41] Gorbachev V.I. Averaging equations of mathematical physics with coefficients dependent on coordinates and time.
- [42] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Наука, Москва, 1971.
- [43] Горбачев В.И. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. *Чебышевский сборник*, 20(4):108–123, 2019.
- [44] Gorbachev V.I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 40.
- [45] Горбачев В.И., Соляев Ю.О. Сопоставление методов Мори-Танака и Горбачева-Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 25.
- [46] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958.
- [47] Седов Л.И. *Механика сплошной среды. Том 2*. Наука, Москва, 1970.
- [48] Найфе А.Х. *Методы возмущений*. Мир, Москва, 1976.
- [49] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1971.
- [50] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*. Наука, Москва, 1976.
- [51] Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Росвузиздат, М, 1962.
- [52] H. Bateman, A. Erdelyi. *Higher transcendental functions. Volume 1. (Перевод с английского Н.Я. Виленкина. Изд. второе, стереотипное: М., Наука, 1974)*. MC GRAV-HILL BOOK COMPANY, INC., New York Toronto London, 1953.
- [53] M. Abramowitz, I. Stegun, editor. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. (Перевод: М., Наука, 1979)*. National bureau standards applied mathematics series.55, 1964.

- [54] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. *Специальные функции*. Наука, Москва, 1968.
- [55] Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. Наука: главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1979.
- [56] Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель. *Функции математической физики. Справочное руководство*. (Перевод с французского Н.Я. Виленкина. Наука, Москва, 1963.